张世英　杨楹　编著

随机过程与控制

天津大学出版社

随机过程与控制

张世英　杨楹　编著

天津大学出版社

内 容 简 介

本书结合工科院校的特点阐述随机过程及控制的理论和应用问题。全书共分八章。前四章比较系统地讲述了随机过程的有关问题。后四章分别讲述线性系统的最优滤波与预报、最小方差控制、随机适应性控制及线性系统随机最优控制问题。

本书可作为高等工科院校自动控制、系统工程、应用数学、电子工程等专业高年级大学生和研究生的教学用书，也可供高等院校理科有关专业以及有关专业的科技人员参考。

随机过程与控制

张世英 杨楹 编著

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：11 1/2 字数：300千字

1989年12月第一版 1989年12月第一次印刷

印数：1—2000

ISBN 7-5618-0174-2

TP·25

定价：2.30元

目 录

第一章　随机过程的基本概念

1.1　随机过程的概念

在概率论中研究了随机变量、随机向量以及无限多个相互独立的随机变量的收敛问题。但在实际问题中，常要涉及在实验过程中随时间不断变化的随机变量。这种将随机变量作为时间函数的一般化讨论是一切动态系统分析的数学基础。如在一给定的时间，一个城市的电力负荷是个随机变量，而在一段时间内，负荷（随机变量）就为时间的函数；某电话交换台第 n 天的电话呼唤次数 x_n 是个随机变量，而长期的记录 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 就为一族无限多个随机变量构成的时间函数；观察液面上作布朗（*Brown*）运动的微粒，用 $x(t)$，$y(t)$ 分别表示质点在时刻 t 的横坐标和纵坐标，则对固定的 t，$(x(t), y(t))$ 是二维随机变量，当不断地观察下去得到 $\{x(t), y(t),\ t\in(0,\infty)\}$ 为一族无限多个相互有关的二维随机变量。一般象控制系统、测量系统、调节系统等一些连续工作的系统，当分析系统的品质时，就必须考虑到各种随机干扰的影响，这些随机干扰本身及其所引起的系统的响应都为随时间变化的随机变量。

通常，把依赖于参数 $t\in T$ 的随机变量族 $\{x(t), t\in T\}$ 称为随机过程，更严格的定义为

定义　给定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 和参数集（标志集）

T，如对每个参数$t\in T$，有一定义在概率空间上的随机变量$x(t,\omega)$（$\omega\in\Omega$：样本空间），就称$\{x(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$为随机过程，简记$\{x(t),t\in T\}$。

参数集T通常是指时间参数，但也可以是其它物理参数。

当参数集取某个区间$T=\{t: a\leqslant t\leqslant b\}$或$T=\{t: t\geqslant 0\}$，$T=\{t: -\infty<t<\infty\}$时，该随机过程称为连续时间随机过程或随机函数。

当参数集取离散值时，如$T=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$或$T=\{0,1,2,3,\cdots\}$，该随机过程称为离散时间随机过程或随机序列，记为$\{x_n; n\in T\}$。

概率论中讨论过的n维随机变量$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$可看作是一随机过程，这时$T=\{1,2,\cdots,n\}$。随机变量列$\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$同样可看作一随机过程，这时$T=\{1,2,\cdots\}$。可见随机过程是随机变量的一般化。

一个随机过程$\{x(t),t\in T\}$实际上是两个变量的二元函数，其中一个变量为样本空间Ω中的ω（基本事件），另一个是参数集T中的t。当t固定为t_i时，$x(t_i,\omega)$为随机变量，而当ω固定为ω_i时，$x(t,\omega_i)$为时间t的非随机函数。由于ω固定，表示某一次实验，故称$x(t,\omega_i)$为随机过程的一个样本函数（一个现实）。在相同的条件下对随机过程作一组实验，将获得一族随机过程的现实。总之，随机过程兼有随机变量和函数的双重特点。

［例1.1］ 考虑一个最简单的标量线性系统

$$\dot{x}(t)=\omega,\ 且x(o)=0$$

其中ω为正态随机变量，且$N(0,1)$。容易解此微分方程，得

$$x(t)=\omega t$$

对于每一个 t 值（$t\geqslant 0$），$x(t)$是零均值和方差为t^2的正态随机变量。由此，$x(t)$表示具有参数t的随机变量族，因此它是随机过程。当取ω_i对应于结果（基本事件），$x(t)$有四种解释，

当$x(t_i, \omega_i) = \omega_i t_i$为确定数；

当$x(t_i, \omega) = \omega t_i$为随机变量；

当$x(t, \omega_i) = \omega_i t$为时间函数；

当$x(t, \omega) = \omega t$为随机过程。

图1.1中表示了该随机过程的几个现实。

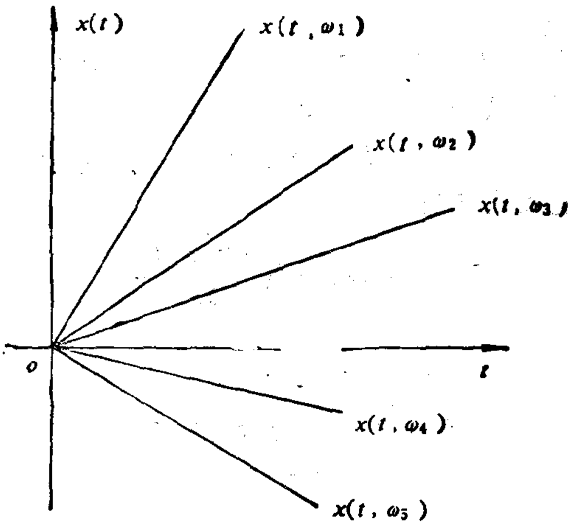

图1.1　随机过程$x(t) = \omega t$

在一些实际问题中，还需同时考虑几个随机过程，如卫星三个坐标分量的观测，就为三个随机过程。常把 n 个随机过程$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$看作 n 维随机向量过程 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$。这时，对每一个固定的 t，$X(t)$为一 n 维随机向量，而对每一固定的ω，$X(t)$为一非随机的时间

t 的函数，也称该随机向量过程的一个现实。根据参数集 T 的取法，同样分为随机向量序列和随机向量过程。特别，随机过程可以看作一维的随机向量过程。

顺便提及复随机过程，复随机过程可以用

$$z(t)=x(t)+iy(t) \tag{1.1}$$

表示，其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都为实随机过程。这样，$z(t)$ 完全由一个两维随机向量过程来确定。

1.2 随机过程的分布律

设 $\{x(t),t\in T\}$ 是一随机过程，对每个 $t\in T$，$x(t)$ 为随机变量，其分布函数定义为

$$F(x,t)\triangleq P\{x(t)<x\},\quad t\in T \tag{1.2}$$

相应的密度函数

$$f(x,t)\triangleq\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \tag{1.3}$$

或

$$F(x,t)=\int_{-\infty}^{x}f(\beta,t)d\beta \tag{1.4}$$

且 $f(x,t)\geqslant 0$。称 $F(x,t)$（$f(x,t)$）为随机过程 $\{x(t),t\in T\}$ 的一维分布。显然，一维分布不足以完全描述随机过程，它不能回答随机过程 $\{x(t),t\in T\}$ 在不同 t 时的相关性问题。进一步，当参数 t 取 t_1,t_2 时，就有两个随机变量 $x(t_1)$，$x(t_2)$，需考虑它们的联合分布

$$F(x_1,x_2;\ t_1,t_2)\triangleq P\{x(t_1)<x_1,\ x(t_2)<x_2\},\quad t_1,t_2\in T \tag{1.5}$$

称为随机过程 $x(t), t\in T$ 的二维分布函数。相应的二维密度函数$f(\beta_1,\beta_2;\ t_1,t_2)$ 由下式确定

$$F(x_1,x_2;\ t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\mathrm{d}\beta_1\int_{-\infty}^{x_2}f(\beta_1,\beta_2;\ t_1,t_2)\mathrm{d}\beta_2 \quad (1.6)$$

容易证明

$$f(x_1,t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2;\ t_1,t_2)\mathrm{d}x_2$$

$$f(x_2,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2;\ t_1,t_2)\mathrm{d}x_1$$

$$F(x_1,t_1)=F(x_1,\infty;t_1,t_2)$$

$$F(x_2,t_2)=F(\infty,x_2;t_1,t_2)$$

对于两个随机过程 $x(t), t\in T$ 和 $y(t), t\in T$ 的联合分布函数$F(x,y;\ t)$ 和密度函数 $f(x,y;\ t)$分别为

$$F(x,y;\ t)\triangleq P\{x(t)<x, y(t)<y\} \quad (1.7)$$

和

$$F(x,y;\ t)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}r\int_{-\infty}^{y}f(r,\lambda;\ t)\mathrm{d}\lambda \quad (1.8)$$

当然，两个随机过程 $x(t)$、$t\in T$ 和 $y(t)$，$t\in T$ 在不同时间的二维联合分布函数和二维密度函数分别为

$$F(x,y;\ t_1,t_2)\triangleq P\{x(t_1)<x,\ y(t_2)<y\} \quad (1.9)$$

和

$$F(x,y;\ t_1,t_2)=\int^{x}\mathrm{d}r\int^{y}f(r,\lambda;\ t_1,t_2)\mathrm{d}\lambda \quad (1.10)$$

一般地，对任意有限个$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$引入

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$= P\{x(t_1) < x_1,\ x(t_2) < x_2, \cdots, x(t_n) < x_n\} \quad (1.11)$$

称为随机过程$\{x(t), t \in T\}$的n维分布函数。全体分布函数$\{F(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1, t_2, \cdots, t_n),\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n \in T, n \geqslant 1\}$称为随机过程$\{x(t), t \in T\}$的有限维分布函数族。

需要注意的是，随机过程讨论的是无限维的问题，如何从有限维的知识来决定无限维的情况呢，一个随机过程的有限维分布函数族具有如下两个性质：

（1）对称性，对（1，2，$\cdots$，n）的任一个排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$= F(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n};\ t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n})$$

（2）一致性，有

$$F(x_1, x_2 \cdots, x_{n-1};\ t_1, t_2, \cdots; t_{n-1})$$
$$= \lim_{x_n \to \infty} F(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1, t_2, \cdots t_n)$$

则这一概率测度能扩展为Ω（样本空间）子集的波雷尔（Borel）域上完全可加的概率测度，并且存在一个随机过程$\{x(t), t \in T\}$使$\{F(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1, t_2, \cdots,\ t_n),\ n \geqslant 1\}$恰好是过程$\{x(t),\ t \in T\}$的有限维分布族（柯尔莫哥洛夫基本定理）。

［例1.2］　确定例1.1中随机过程的密度函数。对于任意$t \geqslant 0$，$x(t)$表示为

$$x(t) = \omega t$$

它是零均值和方差t^2的正态变量，由此$x(t)$的密度函数为

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} t} \exp\left\{\frac{-x^2}{2t^2}\right\}$$

该密度函数依赖于参数 t。

[例1.3] 一个随机过程表示为

$$x(t)=a\cos(\omega t+\phi)$$

其中振幅 a 和角频率ω是已知常数，t 是时间变量，相位 ϕ 是在$[-\pi, +\pi]$上的均匀分布随机变量，其密度函数为

$$f(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi\\ 0 & \varphi>|\pi|\end{cases}$$

确定随机过程$x(t)$的密度函数。

对于 t 的固定值t_1，$x(t_1)$是变量ϕ的代数函数

$$x(t_1)=a\cos(\omega t_1+\phi)$$

由此 $$\phi=\cos^{-1}\frac{x(t_1)}{a}-\omega t_1 \quad (-a\leqslant x(t_1)\leqslant a)$$

$$\frac{d\phi}{dx(t_1)}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2(t_1)}}$$

利用概率论中求随机变量函数分布的法则，确定$x(t)$的密度函数为

$$f(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(a^2-x^2)^{1/2}} & |x|<a\\ 0 & |x|\geqslant a\end{cases}$$

该随机过程是具有随机相位的正弦波，称为随机相位正弦波过程。可以注意到，该随机过程的密度函数不是时间的函数，这是由随机变量ϕ的取值范围所决定的。容易证明，当ϕ仅在 0 到$\dfrac{\pi}{2}$上为均匀分布时，随机过程$x(t)$的密度函数将为时间函数。

1.3 随机过程的数字特征

象在概率论中研究随机变量（向量）时所做的那样，在许多实际问题中建立一系列数字特征量（数学期望、方差、相关矩阵等）来说明随机变量(向量)某些方面的统计性质。对于随机过程，也常用一些数字特征量来表述一个过程或多个过程在某些方面的统计性质。这些数字特征，在一般情况下不为确定数，而是时间的函数。

(一)均值函数 随机过程$\{x(t), t\in T\}$的均值函数定义为

$$m_x(t)=E[x(t)]\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x,t)\,dx \qquad (1.12)$$

式中$f_1(x,t)$为随机过程的一维密度函数。$m_x(t)$是一非随机的时间函数，该过程的一切可能的现实都围绕它摆动（图1.2）。

(二)协方差函数 随机过程$\{x(t), t\in T\}$对任意两个时刻t_1和t_2的协方差函数为

$$\begin{aligned} r_x(t_1,t_2) &\triangleq E[(x(t_1)-m_x(t_1))(x(t_2)-m_x(t_2))] \\ &=\mathrm{Cov}(x(t_1),x(t_2)) \end{aligned} \qquad (1.13)$$

它描述过程在任意两个不同时刻t_1，t_2所对应两个随机变量$x(t_1)$和$x(t_2)$的相关性，为t_1和t_2的二元函数。特别当$t_1=t_2=t$时，有

$$r_x(t,t)=\mathrm{Var}[x(t)]=\sigma_x^2(t) \qquad (1.13a)$$

$\mathrm{Var}[x(t)]$称为过程的方差函数简称方差，而方差的平方根$\sigma_x(t)$称为过程的均方差（图1.2）。由此，方差就不作为

随机过程的基本特征量。

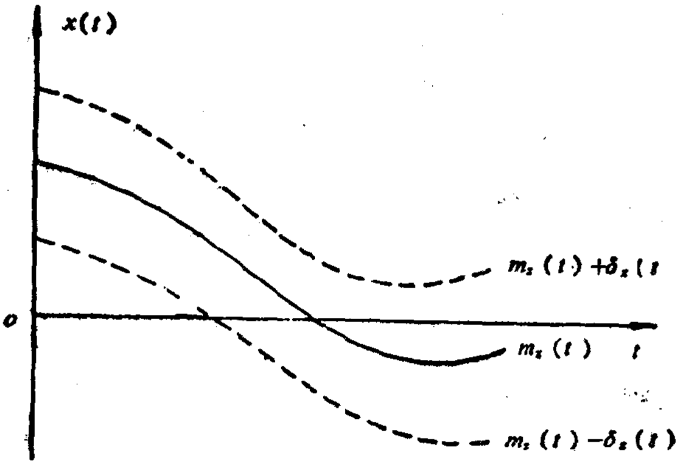

图1.2 过程的均值和均方差

由于两个随机变量$x(t_1)$和$x(t_2)$的相关矩与t_1和t_2的顺序无关，因而

$$r_x(t_1,t_2)=r_x(t_2,t_1) \tag{1.14}$$

即协方差函数具有对称性。

实用中还常用到标准化协方差函数$\rho_x(t_1,t_2)$，过程$\{x(t), t\in T\}$的标准化协方差函数定义为

$$\rho_x(t_1,t_2)\triangleq\frac{r_x(t_1,t_2)}{\sqrt{r_x(t_1,t_1)r_x(t_2,t_2)}} \tag{1.15}$$

当$t_1=t_2=t$时，$\rho_x(t,t)=1$。

(三)相关函数 实际应用中，还常用到过程$\{x(t), t\in T\}$的相关函数，其定义为

$$\varphi_x(t_1,t_2)\triangleq \mathrm{E}[x(t_1)x(t_2)] \tag{1.16}$$

可见，零均值过程（$m_x(t)\equiv 0$）的相关函数就是协方差函数。一般情况下，均值函数、相关函数和协方差函数间有如

下关系

$$r_x(t_1,t_2)=\varphi_x(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2) \tag{1.17}$$

为讨论两个随机过程的合成关系，需要表述随机过程间联合特性的特征量。

（四）互协方差函数 两个随机过程 $\{x(t),t\in T\}$ 和 $\{y(t),t\in T\}$ 的互协方差函数是指，该两过程在自变量 t_1，$t_2\in T$ 时，随机变量 $x(t_1)$ 和 $y(t_2)$ 的相关矩，即

$$\begin{aligned} r_{xy}(t_1,t_2) &\triangleq \mathrm{Cov}[x(t_1),y(t_2)] \\ &= \mathrm{E}[(x(t_1)-m_x(t_1))\ (y(t_2)-m_y(t_2))]\quad (t_1,t_2\in T) \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x-m_x(t_1))(y-m_y(t_2))\ \mathrm{d}^2F(x,y;\ t_1,t_2) \end{aligned} \tag{1.18}$$

所以两个过程的互协方差函数通过它们的二维分布律来决定。对于互协方差函数，由定义有性质

$$r_{xy}(t_1,t_2)=r_{yx}(t_2,t_1) \tag{1.19}$$

类似地，两个随机过程 $\{x(t),t\in T\}$ 和 $\{y(t),t\in T\}$ 的标准化互协方差函数为

$$\rho_{xy}(t_1,t_2)\triangleq\frac{r_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{r_x(t_1,t_1)r_y(t_2,t_2)}}\quad (t_1,t_2\in T) \tag{1.20}$$

（五）互相关函数 两个随机过程的互相关函数定义为

$$\varphi_{xy}(t_1,t_2)\triangleq\mathrm{E}[x(t_1)y(t_2)],\quad t_1,t_2\in T \tag{1.21}$$

互协方差函数和互相关函数间也有如下关系

$$r_{xy}(t_1,t_2)=\varphi_{xy}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_y(t_2) \tag{1.22}$$

同随机变量的情况相似，对随机过程也常用矩的概念来