目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第三篇　复变函数

第四篇 微分几何

第一篇 线性代数

线性代数作为数学学科的一部分，从理科的角度来说，它研究的对象主要是线性空间与线性变换的理论，而线性方程组的理论则是线性代数的基础内容或者说是线性代数的初等部份，但由于它是工程技术科学中的很多问题归结的数学形式，所以在工科学校中讲线性代数，就把它作为一个主要部分.在本篇中把它列为第四章.行列式以及矩阵的知识，是数学与科学技术中应用得很广泛的数学工具，特别是矩阵代数，它是线代数的基本方法，是本篇中的重点内容．至于n维向量空间，它是一般线性空间中的基本类型，同时又是三维几何空间的推广．其中n维向量的线性关系是本篇中的一个难点但又是解决矩阵以及线性方程组的理论问题中不能缺少的内容，所以必须把其中的一些概念（如线性相关性以及向量组的秩等）搞清楚．第五章内容中的相似矩阵是矩阵理论中重要问题之一，利用相似矩阵把实对称阵（二次型）化为标准形则是线性代数的一个重要课题．至于第六章的内容则带有更多的理科的色采，读者对其中的主要概念有一般性的了解就可以了．

第一章　行列式

本章内容提要与学习要求　行列式的理论是从研究线性方程组的解法中产生的．它不仅在数学上，而且在其他许多科学领域中有着广泛的应用，特别在线性代数本身的研究中更是不可缺少．行列式是一个重要的数学工具，是线性代数的最基本内容之一．

本章介绍n阶行列式的定义、性质和它的计算，以及应用行列式理论给出克莱姆法则．

n阶行列式的定义，要结合二阶、三阶行列式来体会，并且要正确理解和掌握它．

n阶行列式的性质和它的计算，是本章的重点．关于n阶行列式的性质，务必牢固掌握并会灵活运用；关于n阶行列式的计算，必须熟练地掌握“三角化方法”与“降阶法”，以及它们的综合运用，并且初步掌握数学归纳法和递推法．n阶行列式的计算需要一定的技巧，这就要靠多练、多想和善于总结规律，在解题过程中注意锻练和提高自己的计算技巧．要切记二阶、三阶行列式的“对角线展开法”不可乱用于n阶行列式的计算．

用克莱姆法则解线性方程组，虽然有其局限性，而且它不能判断一个方程组的解是否存在，但它仍是一个重要的方法，而且其求解公式在理论上也很重要，必须切实掌握．

§ 1-1-1 二阶、三阶行列式

在中学数学中，已由解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式. 我们先复习一下它们的定义和性质.

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

利用消元法，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组（1）有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

为了便于记忆，我们用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

符号（3）就叫做**二阶行列式**.

引进了二阶行列式的定义以后，公式（2）就可写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{4}$$

当 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，有唯一解

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})$$

同前面一样，为了便于记忆，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

表示代数和D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

我们把符号（5）叫做**三阶行列式**.

三阶行列式的值有六项，每一项是三个元素的乘积. 这三个元素在每行中占有一个，在每列中也占有一个，三项前带正号，另三项前带负号，然后求其代数和. 为了便于记忆，可按以下法则进行计算. 如图 1-1-1 所示，用三条实线和三条虚线联接行列式中不同行、不同列的三个元素，在实线上的三个元素的乘积取正号，在虚线上的三个元素的乘积取负号. 然后求出这六项的代数和就是三阶行列式的值.

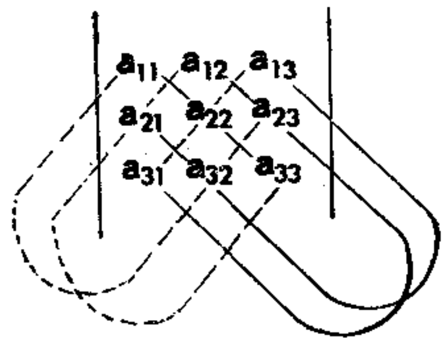

图 1-1-1

定义了三阶行列式后，对于方程组（4），当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这就是解三元线性方程（4）的**克莱姆（Cramer）法则**.

如果将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的行与列互换而不改变各行、各列的顺序，得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

叫做行列式D的转置行列式.

利用三阶行列式的定义，容易得出下面八个性质.

性质1）行列式与它的转置行列式相等.

性质2）交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号. 例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

性质3）把一个行列式的某行（列）的元素乘上某数k，等于用k乘行列式. 例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

性质4）行列式中有两行（列）的对应元素相等，则行列式等于零.

性质5）如果行列式的某行（列）的各元素是两项之和，那么这个行列式等于两个行列式之和. 例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

性质6）把行列式的任一行（列）的元素乘以同一个数后，加到另一行（列）的对应元素上去，行列式不变. 例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

在三阶行列式中，划去a_{ij}($i=1,2,3$; $j=1,2,3$) 所在的行和列的元素，余下的元素按原来的排法构成的一个二阶行列式叫做a_{ij}的余子式，记作M_{ij}. 把$(-1)^{i+j}M_{ij}$叫做a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}. 例如三阶行列式中元素a_{23}的代数余子式是

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

性质7）行列式D中任一行（列）中各元素与其代数余子式乘积之和等于该行列式. 即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik}=D,\ i=1,2,3 \tag{6}$$

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj}=D,\ j=1,2,3 \tag{7}$$

（6）与（7）两式分别叫做行列式D按第i行的展开式及按第j列的展开式.

性质8）在行列式D中，任一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,3$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,3$$

对于二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

我们把代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$又叫做二阶行列式的值. 同样，对于三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

把代数和$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$叫做三阶行列式的值. 通常所说计算行列式，就是求行列式的值.

关于二阶、三阶行列式的计算，可以直接利用定义，或者利用行列式的性质简化行列式的计算过程.

［例1］ 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \\ -5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

解法1：直接利用定义得

$$\begin{aligned} D&=3\times(-1)\times6+(-2)\times(-3)\times(-5)+5\times4\times4-5\times(-1)\\ &\quad\times(-5)-(-2)\times4\times6-3\times(-3)\times4\\ &=91 \end{aligned}$$

解法2：利用行列式的性质6），首先将第一行各元素乘以2加到第三行的对应元素上去，得

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \\ -5 & 4 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 16 \end{vmatrix}$$

然后将第二行各元素乘以（-2）加到第一行的对应元素上去，得

$$D=\begin{vmatrix}-5 & 0 & 11\\ 4 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 16\end{vmatrix}$$

根据性质 7）按第二列展开，得

$$D=(-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-5 & 11\\ 1 & 16\end{vmatrix}=91.$$

［例 2］ 计算

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}$$

解法 1：

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{加到第一行}]{\text{将二、三行}}\begin{vmatrix}3+a & 3+a & 3+a\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}$$

$$=(3+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{加到二、三列}]{\text{第一列的}(-1)\text{倍}}(3+a)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\end{vmatrix}=(3+a)a^2$$

解法 2：将行列式中每一元素写成两数之和，即

$$D=\begin{vmatrix}(1+a) & (1+0) & (1+0)\\ (1+0) & (1+a) & (1+0)\\ (1+0) & (1+0) & (1+a)\end{vmatrix}$$

然后利用性质 5），将这个行列式写成八个行列式之和，其中有四个行列式中有的两行为 1,1,1，有的三行都为 1,1,1，其值必为 0，剩下的四个行列式之和为

$$D=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=a^3+a^2+a^2+a^2=a^2(a+3).$$

［解 3］ 解线性方程组

$$\begin{cases}2x-y+z=0\\ 3x+2y-5z=1\\ x+3y-2z=4\,.\end{cases}$$

解：因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\3 & 2 & -5\\1 & 3 & -2\end{vmatrix}=28\neq 0$$

所以方程组有唯一解．又由

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 2 & -5\\4 & 3 & -2\end{vmatrix}=13,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 1 & -5\\1 & 4 & -2\end{vmatrix}=47,\quad D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\3 & 2 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix}=21$$

故所求的解为

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\quad z=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

§1-1-2 n 阶行列式

学习了二阶、三阶行列式之后，我们自然要问，能否把行列式的定义推广到四阶、五阶以至更一般的 n 阶呢？对于一般的含 n 个未知量由 n 个方程组成的线性方程组的解是否也可用 n 阶行列式来表达呢？回答是肯定的．但是，不能像§1-1-1中那样，由线性方程组的消元法类似地得出 n 阶行列式的定义．这是因为当 n 很大时，要从 n 个未知量中消去 $n-1$ 个，在理论上来说是可能的，但实际来作却是很困难的．因此，为了能从三阶行列式类推出 n 阶行列式的定义，必须首先介绍有关排列的一些知识．

一、n 级排列及其逆序数

大家都知道，n 个不同的元素按照任何一种顺序排成一列，称为这 n 个不同元素的一个全排列，其全排列的总数是 $n!$ 个．如果 n 个不同元素是前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$，那么它的一个全排列，我们称之为一个 **n 级排列**，一般用 $p_1\ p_2\cdots p_n$ 表示一个 n 级排列．

例如，321 就是一个 3 级排列；而所有的 3 级排列共有 $3!=6$ 个，它们是

123，132，213，231，312，321

又如，4132 是一个 4 级排列；而 4131，5412 都不是 4 级排列．

在所有 n 级排列中，只有排列 $1\ 2\ 3\cdots n$ 特殊，它是按数的大小次序，由小到大从前往后排列的，我们称它为**自然顺序排列**．其它任一个 n 级排列都一定会出现较小的数排列在较大的数之后的情况．例如在 4 级排列 2143 中，1 排在 2 之后，3 排在 4 之后．

定义 1 在 n 级排列 $p_1\ p_2\cdots p_n$ 中，$p_i<p_j$，而 p_i 却排在 p_j 的后面，则称 p_i 与 p_j 这对数构成一个**逆序**．排列 $p_1\ p_2\cdots p_n$ 中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记作 $\tau(p_1\ p_2\cdots p_n)$．

由定义1容易知道，n级排列$p_1\ p_2\cdots p_n$的逆序数$\tau(p_1\ p_2\cdots p_n)$，等于排列中每个数码后面小于该数码的数的个数之和．即

$$\tau(p_1\ p_2\cdots p_n)=(p_1\text{后面比}\ p_1\text{小的数字的个数})$$
$$+(p_2\text{后面比}\ p_2\text{小的数字的个数})$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+(p_{n-1}\text{后面比}\ p_{n-1}\text{小的数字的个数})$$

［例1］ 求排列32514的逆序数．

解： 因为在排列32514中，3后面有两个数比3小，2后面有一个数比2小，5后面有两个数比5小，1后面没有比1小的数，故

$$\tau(32514)=2+1+2+0=5$$

如果一个排列的逆序数是偶数，就称该排列为偶排列，如果逆序数是奇数，就称为奇排列．读者容易验证所有3级排列中：123，312，231是偶排列；321，132，213是奇排列．

把一个排列中的某两个数字的位置互换，而其它数字的位置保持不变，得到另一个排列，这样的一种变换称为作一次对换．对换对于排列的奇偶性是有影响的．例如，$\tau(23154)=3$，因此23154是奇排列，将1，3两个数字作一次对换得排列21354，易知它是一个偶排列．

定理一 排列经一次对换后改变奇偶性．

证： 以P表示排列$p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$，将$p_i$，$p_j$作一次对换，得排列$P'$为$p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$．

第一种情况：$j=i+1$，即p_i与p_j处于相邻的位置．

因为p_i与p_j处于相邻位置，故作一次对换后，除p_i与p_j两数的顺序改变外，其它任意两数的顺序并没有改变．所以当$p_i<p_j$时，$\tau(p_1\cdots p_i p_j\cdots p_n)=\tau(p_1\cdots p_j p_i\cdots p_n)-1$；当$p_i>p_j$时，$\tau(p_1\cdots p_i p_j\cdots p_n)=\tau(p_1\cdots p_j p_i\cdots p_n)+1$．故$P$与$P'$的奇偶性相反．

第二种情况：$j=i+k$，即p_i与p_j相隔$k-1$个数字．

这时，我们用下面的方法对换p_i、p_j：先把P中p_j与p_{j-1}对换，再把p_j与p_{j-2}对换，像这样作k次相邻两数的对换后，便得到排列P''为$p_1\cdots p_j p_i p_{i+1}\cdots p_{i+k-1}p_{j+1}\cdots p_n$；然后把$P''$中$p_i$与$p_{i+1}$对换，再把$p_i$与$p_{i+2}$对换，像这样作$k-1$次相邻两数的对换后，就得到$P'$．因此，用相邻两数对换的办法对换$2k-1$次后，就把$P$变成$P'$．由于$2k-1$是奇数，所以若$P$为奇排列，则$P'$必为偶排列，若$P$为偶排列，则$P'$必为奇排列．

［例2］ 证明所有n级排列中，奇排列与偶排列各占一半．

证： 设所有n级排列中，总共有s个奇排列，k个偶排列，则$s+k=n!$．任取一奇排列P为$p_1p_2\cdots$，p_n，把前面两个数字p_1、p_2作一次对换后所得到的排列P'为$p_2p_1\cdots p_n$，由定理1，则P'必为一个偶排列．用同样的办法，每一个奇排列P都可对应一个偶排列P'，而且不同的奇排列不能对应同一个偶排列．所以s个奇排列经过前面两个数字对换一次以后，便成为s个不同的偶排列．而所有偶排列共有k个，因此必有$s\leqslant k$．同

理可证$k \leqslant s$．故有$s = k = \frac{n!}{2}$.

二、n阶行列式的定义

有了以上的准备知识，就可以从三阶行列式类推出n阶行列式的定义．为此，先来分析一下三阶行列式的结构．

三阶行列式的定义是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

其中元素a_{ij}的第一个下标i表示这个元素位于第i行，称为行标；第二个下标j表示此元素位于第j列，称为列标．

经过对三阶行列式的观察与分析，可以得到以下几点．

1．三阶行列式是6项的代数和．

2．每一项是三个元素的乘积，而这三个元素又是取自不同行和不同列的，并且各项的三元素的行标排列顺序都是123（当然这是有意识地这样排的），列标排列顺序是：123，231，312，321，213，132，正好取尽了全部三级排列．因此三阶行列式中的每一项都可表示为$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$的形式，其中$p_1p_2p_3$是一个三级排列．

3．三阶行列式中第一项、第二项、第三项的列标排列依次是123，231，312，它们都是偶排列，而这三项前面均带正号．第四项、第五项、第六项的列标排列依次是321，213，132，它们都是奇排列，而这三项前面均带负号．因此每一项的符号可表示为$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$．

4．三阶行列式的代数和的项数正好等于所有三级排列的个数：$3! = 6$．

综上所述，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是表示所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} \tag{1}$$

的代数和，其中$p_1p_2p_3$是乘积中三元素的行标按自然顺序排列时相应的列标排列，它是一个三级排列，并且当$p_1p_2p_3$是偶排列时，项（1）前面带正号，是奇排列时带负号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2p_3)} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

这里 $\sum\limits_{(p_1p_2p_3)}$ 表示对所有的三级排列取和.

类似地可把行列式的定义推广到 n 阶.

定义 2 设有 n^2 个数，把它们写成一个 n 行、n 列的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 行第 j 列的数，叫做元素，它的第一个下标 i 称为行标，第二个下列 j 称为列标. 我们把符号（2）叫做 n 阶行列式，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{3}$$

的代数和，这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是乘积中 n 个元素的行标按自然顺序排列时相应的列标排列(它是一个 n 级排列)，并且当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为偶数时，项（3）前面取正号，为奇数时取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{4}$$

这里 $\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

行列式（2）可简记为 $|a_{ij}|$.（4）式又叫做 n 阶行列式的展开式.

二阶、三阶行列式是 n 阶行列式当 $n=2$ 与 $n=3$ 的特例. 当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$，这时要注意不要与绝对值符号混淆.

n 阶行列式的定义表明，n 阶行列式是一个数，这个数是 $n!$ 项的代数和. 为了计算 n 阶行列式，首先要作出所有位于不同行不同列的 n 个元素所构成的乘积，并把构成这些乘积的 n 个元素按行标排成自然顺序，然后由列标排列的奇偶性来确定它们的符号.

［例 3］ 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解： 这是一个四阶行列式，由定义知