

目 录

第一篇 线性代数

第一章 行列式	(1)
§ 1-1-1 二阶、三阶行列式	(2)
§ 1-1-2 n 阶行列式	(7)
§ 1-1-3 n 阶行列式的性质与计算	(13)
§ 1-1-4 克莱姆法则	(23)
综合例题 1-1	(26)
习 题 1-1	(29)
思考题 1-1	(32)
第二章 n 维向量	(35)
§ 1-2-1 n 维向量的概念	(35)
§ 1-2-2 向量的线性关系	(38)
§ 1-2-3 向量组的秩	(47)
§ 1-2-4 向量空间	(51)
综合例题 1-2	(55)
习 题 1-2	(57)
思考题 1-2	(58)
第三章 矩阵	(59)
§ 1-3-1 矩阵及其运算	(59)
§ 1-3-2 逆矩阵	(69)
§ 1-3-3 几种特殊类型矩阵	(74)
§ 1-3-4 分块矩阵	(77)
综合例题 1-3	(85)
习 题 1-3	(87)
思考题 1-3	(89)
第四章 线性方程组	(91)
§ 1-4-1 矩阵的秩与初等变换	(91)
§ 1-4-2 线性方程组有解的判别定理	(102)
§ 1-4-3 线性方程组解的结构	(108)
§ 1-4-4 利用矩阵的初等行变换解线性方程组	(115)
§ 1-4-5 初等矩阵	(119)
综合例题 1-4	(123)

习 题 1-4	(127)
思考题 1-4	(129)
第五章 相似矩阵与二次型	(132)
§ 1-5-1 矩阵的相似, 特征值与特征向量	(132)
§ 1-5-2 实对称矩阵的相似矩阵	(142)
§ 1-5-3 二次型及其矩阵表示	(152)
§ 1-5-4 化二次型为标准形	(154)
§ 1-5-5 用正交变换化二次型为标准形	(164)
§ 1-5-6 正定二次型	(167)
综合例题 1-5	(172)
习 题 1-5	(175)
思考题 1-5	(177)
*第六章 线性空间与线性变换	(179)
§ 1-6-1 线性空间的概念	(179)
§ 1-6-2 线性空间的维数、基和坐标	(182)
§ 1-6-3 基变换与坐标变换	(185)
§ 1-6-4 线性变换	(188)
§ 1-6-5 线性变换的矩阵	(192)
习 题 1-6	(195)
思考题 1-6	(197)
第一篇 习题答案	(198)

第二篇 概率论与数理统计

第一章 概率论的基本概念	(204)
§ 2-1-1 随机事件	(204)
§ 2-1-2 随机事件的概率	(209)
§ 2-1-3 条件概率与事件的独立性	(217)
§ 2-1-4 全概率公式, 贝叶斯公式	(223)
§ 2-1-5 贝努利概型, 二项概率公式	(227)
§ 2-1-6 初等概率的模型分类	(228)
习 题 2-1	(234)
思考题 2-1	(237)
第二章 随机变量及其分布	(238)
§ 2-2-1 随机变量的概念	(238)
§ 2-2-2 离散型随机变量的概率分布	(239)
§ 2-2-3 随机变量的分布函数	(245)
§ 2-2-4 连续型随机变量及其分布	(247)

§ 2-2-5 随机变量的函数的分布	(256)
综合例题 2-2	(259)
习 题 2-2	(263)
思考题 2-2	(265)
第三章 多维随机变量及其分布	(266)
§ 2-3-1 二维随机变量	(266)
§ 2-3-2 边缘分布	(271)
§ 2-3-3 相互独立的随机变量	(276)
§ 2-3-4 两个随机变量的函数的分布	(278)
综合例题 2-3	(281)
习 题 2-3	(284)
思考题 2-3	(286)
第四章 随机变量的数字特征	(288)
§ 2-4-1 数学期望	(288)
§ 2-4-2 方差	(293)
§ 2-4-3 几种常见的随机变量的数学期望和方差	(296)
§ 2-4-4 协方差和相关系数	(299)
§ 2-4-5 矩和协方差矩阵	(303)
综合例题 2-4	(307)
习 题 2-4	(311)
思考题 2-4	(313)
第五章 大数定律和中心极限定理	(315)
§ 2-5-1 大数定律	(315)
§ 2-5-2 中心极限定理	(317)
综合例题 2-5	(319)
习 题 2-5	(322)
第六章 样本及其分布	(324)
§ 2-6-1 随机样本和统计量	(324)
§ 2-6-2 抽样分布	(330)
§ 2-6-3 顺序统计量的分布	(340)
综合例题 2-6	(343)
习 题 2-6	(344)
思考题 2-6	(345)
第七章 参数估计	(347)
§ 2-7-1 点估计	(347)
§ 2-7-2 参数点估计方法	(349)
§ 2-7-3 估计量的评选标准	(357)

§ 2-7-4 区间估计	(363)
§ 2-7-5 正态总体均值与方差的区间估计	(364)
综合例题 2-7	(373)
习 题 2-7	(376)
思考题 2-7	(377)
第八章 假设检验	(379)
§ 2-8-1 假设检验问题	(379)
§ 2-8-2 单个正态总体均值和方差的检验	(384)
§ 2-8-3 两个正态总体的假设检验	(389)
§ 2-8-4 皮尔逊检验法	(397)
综合例题 2-8	(400)
习 题 2-8	(404)
思考题 2-8	(406)
第九章 方差分析	(408)
§ 2-9-1 方差分析的意义	(408)
§ 2-9-2 单因素的方差分析	(409)
§ 2-9-3 方差分析计算举例	(415)
习 题 2-9	(421)
思考题 2-9	(422)
第十章 回归分析	(424)
§ 2-10-1 一元线性回归分析	(425)
§ 2-10-2 回归直线的显著性检验	(431)
§ 2-10-3 预报和控制	(438)
§ 2-10-4 曲线回归	(440)
* § 2-10-5 多元线性回归	(446)
* § 2-10-6 多元线性回归的方差分析	(449)
* § 2-10-7 复相关系数与偏相关系数	(450)
习 题 2-10	(454)
第二篇 习题答案	(456)
第二篇 附表	(462)
附表 1 标准正态分布表	(462)
附表 2 泊松分布表	(464)
附表 3 t 分布表	(466)
附表 4 χ^2 分布表	(467)
附表 5 F 分布表	(469)
附表 6 相关系数检验表	(478)

第三篇 复变函数

第一章 复数与复变函数	(479)
§ 3-1-1 复数及其表示法	(479)
§ 3-1-2 复数的运算及其几何意义	(483)
§ 3-1-3 曲线与区域	(489)
§ 3-1-4 复数球面与无穷远点	(492)
§ 3-1-5 复变函数与映射	(493)
§ 3-1-6 复变函数的极限与连续性	(494)
综合例题 3-1.....	(497)
习 题 3-1.....	(499)
思考题 3-1.....	(500)
第二章 解析函数	(501)
§ 3-2-1 解析函数的概念	(501)
§ 3-2-2 解析函数的充要条件	(503)
§ 3-2-3 解析函数与调和函数	(506)
§ 3-2-4 初等函数	(508)
综合例题 3-2.....	(516)
习 题 3-2.....	(519)
思考题 3-2.....	(520)
第三章 复变函数的积分	(522)
§ 3-3-1 复变函数积分的概念	(522)
§ 3-3-2 柯西——古萨基本定理	(526)
§ 3-3-3 柯西——古萨基本定理的推广	(528)
§ 3-3-4 柯西积分公式	(530)
§ 3-3-5 解析函数的高阶导数	(532)
综合例题 3-3.....	(534)
习 题 3-3.....	(537)
思考题 3-3.....	(537)
第四章 级 数	(539)
§ 3-4-1 复级数	(539)
§ 3-4-2 幂级数	(541)
§ 3-4-3 泰勒级数	(543)
§ 3-4-4 罗伦级数	(547)
综合例题 3-4.....	(551)
习 题 3-4.....	(555)
思考题 3-4.....	(556)

第五章 留数	(557)
§ 3-5-1 孤立奇点	(557)
§ 3-5-2 留数及其算法	(560)
§ 3-5-3 留数在计算实函数积分上的应用	(565)
综合例题 3-5.....	(569)
习 题 3-5.....	(573)
思考题 3-5.....	(573)
第六章 保角映射	(575)
§ 3-6-1 保角映射的概念	(575)
§ 3-6-2 分式线性映射	(577)
§ 3-6-3 唯一决定分式线性映射的条件	(581)
§ 3-6-4 几类初等函数所构成的映射	(586)
综合例题 3-6.....	(589)
习 题 3-6.....	(591)
思考题 3-6.....	(593)
第三篇 习题答案	(594)

第四篇 微分几何

第一章 空间曲线	(600)
§ 4-1-1 向量函数 空间曲线的向量方程	(600)
§ 4-1-2 向量函数的微分法	(605)
§ 4-1-3 曲线的切向量 弧长参数	(612)
§ 4-1-4 空间曲线的基本三棱形	(619)
§ 4-1-5 空间曲线的曲率和挠率	(625)
§ 4-1-6 弗朗内公式 空间曲线在一点邻近的结构	(635)
综合习题 4-1.....	(639)
思考题 4-1.....	(640)
第二章 曲面	(641)
§ 4-2-1 曲面的参数方程 曲线坐标	(641)
§ 4-2-2 曲面的切平面和法线	(648)
§ 4-2-3 曲面的第一基本齐式 曲面上曲线的弧长	(652)
§ 4-2-4 曲面上曲线的交角 曲面域的面积	(657)
§ 4-2-5 曲面的等距变换	(662)
§ 4-2-6 曲面的保角变换	(666)
§ 4-2-7 曲面的第二基本齐式	(670)
§ 4-2-8 曲面的法曲率 默尼埃定理	(675)
§ 4-2-9 主方向与主曲率 欧拉公式	(681)

§ 4-2-10 主曲率和主方向的计算 曲率线	(685)
§ 4-2-11 测地曲率	(692)
§ 4-2-12 测地线	(695)
综合习题 4-2	(702)
思考题 4-2	(704)
第四篇 习题答案	(705)
第四篇 附 录	(713)

第一篇 - 线性代数

线性代数作为数学学科的一部分,从理科的角度来说,它研究的对象主要是线性空间与线性变换的理论,而线性方程组的理论则是线性代数的基础内容或者说是线性代数的初等部份,但由于它是工程技术科学中的很多问题归结的数学形式,所以在工科学校中讲线性代数,就把它作为一个主要部分.在本篇中把它列为第四章.行列式以及矩阵的知识,是数学与科学技术中应用得很广泛的数学工具,特别是矩阵代数,它是线代数的基本方法,是本篇中的重点内容.至于 n 维向量空间,它是一般线性空间中的基本类型,同时又是三维几何空间的推广.其中 n 维向量的线性关系是本篇中的一个难点但又是解决矩阵以及线性方程组的理论问题中不能缺少的内容,所以必须把其中的一些概念(如线性相关性以及向量组的秩等)搞清楚.第五章内容中的相似矩阵是矩阵理论中重要问题之一,利用相似矩阵把实对称阵(二次型)化为标准形则是线性代数的一个重要课题.至于第六章的内容则带有更多的理科的色泽,读者对其中的主要概念有一般性的了解就可以了.

第一章 行列式

本章内容提要与学习要求 行列式的理论是从研究线性方程组的解法中产生的.它不仅在数学上,而且在其他许多科学领域中有着广泛的应用,特别在线性代数本身的研究中更是不可缺少.行列式是一个重要的数学工具,是线性代数的最基本内容之一.

本章介绍 n 阶行列式的定义、性质和它的计算,以及应用行列式理论给出克莱姆法则.

n 阶行列式的定义,要结合二阶、三阶行列式来体会,并且要正确理解和掌握它.

n 阶行列式的性质和它的计算,是本章的重点.关于 n 阶行列式的性质,务必牢固掌握并会灵活运用;关于 n 阶行列式的计算,必须熟练地掌握“三角化方法”与“降阶法”,以及它们的综合运用,并且初步掌握数学归纳法和递推法. n 阶行列式的计算需要一定的技巧,这就要靠多练、多想和善于总结规律,在解题过程中注意锻炼和提高自己的计算技巧.要切记二阶、三阶行列式的“对角线展开法”不可乱用于 n 阶行列式的计算.

用克莱姆法则解线性方程组,虽然有其局限性,而且它不能判断一个方程组的解是否存在,但它仍是一个重要的方法,而且其求解公式在理论上也很重要,必须切实掌握.

§ 1-1-1 二阶、三阶行列式

在中学数学中, 已由解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式. 我们先复习一下它们的定义和性质.

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

利用消元法, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组 (1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

为了便于记忆, 我们用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

符号 (3) 就叫做二阶行列式.

引进了二阶行列式的定义以后, 公式 (2) 就可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

类似地, 对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (4)$$

当 $D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时, 有唯一解

$$x_1 = \frac{1}{D} (b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{22} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{D} (a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3 = \frac{1}{D} (a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31})$$

同前面一样，为了便于记忆，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

表示代数和 D ，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

我们把符号(5)叫做三阶行列式。

三阶行列式的值有六项，每一项是三个元素的乘积。这三个元素在每行中占有一个，在每列中也占有一个，三项前带正号，另三项前带负号，然后求其代数和。为了便于记忆，可按以下法则进行计算。如图1-1-1所示，用三条实线和三条虚线联接行列式中不同行、不同列的三个元素，在实线上的三个元素的乘积取正号，在虚线上的三个元素的乘积取负号。然后求出这六项的代数和就是三阶行列式的值。

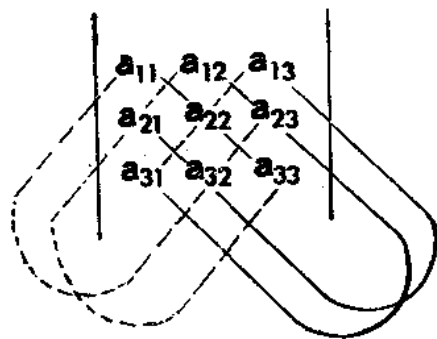


图 1-1-1

定义了三阶行列式后，对于方程组(4)，当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这就是解三元线性方程(4)的克萊姆(Cramer)法则。

如果将行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的行与列互换而不改变各行、各列的顺序,得到的行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫做行列式 D 的转置行列式.

利用三阶行列式的定义,容易得出下面八个性质.

性质 1) 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2) 交换行列式的任意两行或两列,行列式仅改变符号.例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 3) 把一个行列式的某行(列)的元素乘上某数 k ,等于用 k 乘行列式.例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 4) 行列式中有两行(列)的对应元素相等,则行列式等于零.

性质 5) 如果行列式的某行(列)的各元素是两项之和,那么这个行列式等于两个行列式之和.例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 6) 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后,加到另一行(列)的对应元素上去,行列式不变.例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在三阶行列式中,划去 a_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) 所在的行和列的元素,余下的元素按原来的排法构成的一个二阶行列式叫做 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} .把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij} .例如三阶行列式中元素 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

性质 7) 行列式 D 中任一行(列)中各元素与其代数余子式乘积之和等于该行列式.即

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}A_{ik} = D, \quad i=1,2,3 \quad (6)$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \sum_{i=1}^3 a_{ij}A_{ij} = D, \quad j=1,2,3 \quad (7)$$

(6) 与 (7) 两式分别叫做行列式 D 按第 i 行的展开式及按第 j 列的展开式。

性质 8) 在行列式 D 中, 任一行 (列) 的元素与另一行 (列) 对应元素的代数余子式的乘积之和等于零。即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}A_{jk} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j=1,2,3$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = \sum_{k=1}^3 a_{ki}A_{kj} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j=1,2,3$$

对于二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

我们把代数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 又叫做二阶行列式的值。同样, 对于三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

把代数 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ 叫做三阶行列式的值。通常所说计算行列式, 就是求行列式的值。

关于二阶、三阶行列式的计算, 可以直接利用定义, 或者利用行列式的性质简化行列式的计算过程。

[例 1] 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \\ -5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

解法 1: 直接利用定义得

$$\begin{aligned} D &= 3 \times (-1) \times 6 + (-2) \times (-3) \times (-5) + 5 \times 4 \times 4 - 5 \times (-1) \\ &\quad \times (-5) - (-2) \times 4 \times 6 - 3 \times (-3) \times 4 \\ &= 91 \end{aligned}$$

解法 2: 利用行列式的性质 6), 首先将第一行各元素乘以 2 加到第三行的对应元素上去, 得

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \\ -5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 16 \end{vmatrix}$$

然后将第二行各元素乘以 (-2) 加到第一行的对应元素上去, 得

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 11 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 16 \end{vmatrix}$$

根据性质 7) 按第二列展开, 得

$$D = (-1) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 91.$$

【例 2】 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

解法 1:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到第一行}]{\text{将二、三行}} \begin{vmatrix} 3+a & 3+a & 3+a \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \\ &= (3+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到二、三列}]{\text{第一列的}(-1)\text{倍}} (3+a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = (3+a)a^2 \end{aligned}$$

解法 2: 将行列式中每一元素写成两数之和, 即

$$D = \begin{vmatrix} (1+a) & (1+0) & (1+0) \\ (1+0) & (1+a) & (1+0) \\ (1+0) & (1+0) & (1+a) \end{vmatrix}$$

然后利用性质 5), 将这个行列式写成八个行列式之和, 其中有四个行列式中有的两行为 1,1,1, 有的三行都为 1,1,1, 其值必为 0, 剩下的四个行列式之和为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= a^3 + a^2 + a^2 + a^2 = a^2(a+3). \end{aligned}$$

【解 3】 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

解: 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

所以方程组有唯一解. 又由

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

故所求的解为

$$x = -\frac{D_1}{D} = -\frac{13}{28}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{47}{28}, \quad z = -\frac{D_3}{D} = -\frac{21}{28} = -\frac{3}{4}.$$

§ 1-1-2 n 阶行列式

学习了二阶、三阶行列式之后, 我们自然要问, 能否把行列式的定义推广到四阶、五阶以至更一般的 n 阶呢? 对于一般的含 n 个未知量由 n 个方程组成的线性方程组的解是否也可用 n 阶行列式来表达呢? 回答是肯定的. 但是, 不能像 §1-1-1 中那样, 由线性方程组的消元法类似地得出 n 阶行列式的定义. 这是因为当 n 很大时, 要从 n 个未知量中消去 $n-1$ 个, 在理论上来说是可能的, 但实际来作却是很困难的. 因此, 为了能从三阶行列式类推出 n 阶行列式的定义, 必须首先介绍有关排列的一些知识.

一、 n 级排列及其逆序数

大家都知道, n 个不同的元素按照任何一种顺序排成一列, 称为这 n 个不同元素的一个全排列, 其全排列的总数是 $n!$ 个. 如果 n 个不同元素是前 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$, 那么它的一个全排列, 我们称之为一个 n 级排列, 一般用 $p_1 p_2 \dots p_n$ 表示一个 n 级排列.

例如, 321 就是一个 3 级排列; 而所有的 3 级排列共有 $3! = 6$ 个, 它们是

$$123, 132, 213, 231, 312, 321$$

又如, 4132 是一个 4 级排列, 而 4131, 5412 都不是 4 级排列.

在所有 n 级排列中, 只有排列 $1 2 3 \dots n$ 特殊, 它是按数的大小次序, 由小到大从前往后排列的, 我们称它为自然顺序排列. 其它任一个 n 级排列都一定会出现较小的数排列在较大的数之后的情况. 例如在 4 级排列 2143 中, 1 排在 2 之后, 3 排在 4 之后.

定义 1 在 n 级排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 中, $p_i < p_j$, 而 p_i 却排在 p_j 的后面, 则称 p_i 与 p_j 这对数构成一个逆序. 排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 中逆序的总数称为该排列的逆序数, 记作 $\tau(p_1 p_2 \dots p_n)$.

由定义1容易知道, n 级排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$, 等于排列中每个数码后面小于该数码的数的个数之和. 即

$$\begin{aligned}\tau(p_1 p_2 \cdots p_n) = & (p_1 \text{后面比 } p_1 \text{ 小的数字的个数}) \\ & + (p_2 \text{后面比 } p_2 \text{ 小的数字的个数}) \\ & + \cdots \cdots \\ & + (p_{n-1} \text{后面比 } p_{n-1} \text{ 小的数字的个数})\end{aligned}$$

[例1] 求排列 32514 的逆序数.

解: 因为在排列 32514 中, 3 后面有两个数比 3 小, 2 后面有一个数比 2 小, 5 后面有两个数比 5 小, 1 后面没有比 1 小的数, 故

$$\tau(32514) = 2 + 1 + 2 + 0 = 5$$

如果一个排列的逆序数是偶数, 就称该排列为偶排列, 如果逆序数是奇数, 就称为奇排列. 读者容易验证所有 3 级排列中: 123, 312, 231 是偶排列; 321, 132, 213 是奇排列.

把一个排列中的某两个数字的位置互换, 而其它数字的位置保持不变, 得到另一个排列, 这样的一种变换称为作一次对换. 对换对于排列的奇偶性是有影响的. 例如, $\tau(23154) = 3$, 因此 23154 是奇排列, 将 1, 3 两个数字作一次对换得排列 21354, 易知它是一个偶排列.

定理一 排列经一次对换后改变奇偶性.

证: 以 P 表示排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$, 将 p_i, p_j 作一次对换, 得排列 P' 为 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$.

第一种情况: $j = i + 1$, 即 p_i 与 p_j 处于相邻的位置.

因为 p_i 与 p_j 处于相邻位置, 故作一次对换后, 除 p_i 与 p_j 两数的顺序改变外, 其它任意两数的顺序并没有改变. 所以当 $p_i < p_j$ 时, $\tau(p_1 \cdots p_i p_j \cdots p_n) = \tau(p_1 \cdots p_j p_i \cdots p_n) - 1$; 当 $p_i > p_j$ 时, $\tau(p_1 \cdots p_i p_j \cdots p_n) = \tau(p_1 \cdots p_j p_i \cdots p_n) + 1$. 故 P 与 P' 的奇偶性相反.

第二种情况: $j = i + k$, 即 p_i 与 p_j 相隔 $k - 1$ 个数字.

这时, 我们用下面的方法对换 p_i, p_j : 先把 P 中 p_j 与 p_{j-1} 对换, 再把 p_j 与 p_{j-2} 对换, 像这样作 k 次相邻两数的对换后, 便得到排列 P'' 为 $p_1 \cdots p_j p_i p_{i+1} \cdots p_{i+k-1} p_{j+1} \cdots p_n$, 然后把 P'' 中 p_i 与 p_{i+1} 对换, 再把 p_i 与 p_{i+2} 对换, 像这样作 $k - 1$ 次相邻两数的对换后, 就得到 P' . 因此, 用相邻两数对换的办法对换 $2k - 1$ 次后, 就把 P 变成 P' . 由于 $2k - 1$ 是奇数, 所以若 P 为奇排列, 则 P' 必为偶排列, 若 P 为偶排列, 则 P' 必为奇排列.

[例2] 证明所有 n 级排列中, 奇排列与偶排列各占一半.

证: 设所有 n 级排列中, 总共有 s 个奇排列, k 个偶排列, 则 $s + k = n!$. 任取一奇排列 P 为 $p_1 p_2 \cdots p_n$, 把前面两个数字 p_1, p_2 作一次对换后所得到的排列 P' 为 $p_2 p_1 \cdots p_n$, 由定理1, 则 P' 必为一个偶排列. 用同样的办法, 每一个奇排列 P 都可对应一个偶排列 P' , 而且不同的奇排列不能对应同一个偶排列. 所以 s 个奇排列经过前面两个数字对换一次以后, 便成为 s 个不同的偶排列. 而所有偶排列共有 k 个, 因此必有 $s \leq k$. 同

理可证 $k \leq s$. 故有 $s = k = \frac{n!}{2}$.

二、 n 阶行列式的定义

有了以上的准备知识, 就可以从三阶行列式类推 n 阶行列式的定义. 为此, 先来分析一下三阶行列式的结构.

三阶行列式的定义是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

其中元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素位于第 i 行, 称为行标; 第二个下标 j 表示此元素位于第 j 列, 称为列标.

经过对三阶行列式的观察与分析, 可以得到以下几点.

1. 三阶行列式是 6 项的代数和.

2. 每一项是三个元素的乘积, 而这三个元素又是取自不同行和不同列的, 并且各项的三元素的行标排列顺序都是 123 (当然这是有意识地这样排的), 列标排列顺序是: 123, 231, 312, 321, 213, 132, 正好取尽了全部三级排列. 因此三阶行列式中的每一项都可表示为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的形式, 其中 $p_1p_2p_3$ 是一个三级排列.

3. 三阶行列式中第一项、第二项、第三项的列标排列依次是 123, 231, 312, 它们都是偶排列, 而这三项前面均带正号. 第四项、第五项、第六项的列标排列依次是 321, 213, 132, 它们都是奇排列, 而这三项前面均带负号. 因此每一项的符号可表示为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

4. 三阶行列式的代数和的项数正好等于所有三级排列的个数: $3! = 6$.

综上所述, 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是表示所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} \quad (1)$$

的代数和, 其中 $p_1p_2p_3$ 是乘积中三元素的行标按自然顺序排列时相应的列标排列, 它是一个三级排列, 并且当 $p_1p_2p_3$ 是偶排列时, 项 (1) 前面带正号, 是奇排列时带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, j_3)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, j_3)} a_{1, j_1} a_{2, j_2} a_{3, j_3}$$

这里 $\sum_{(j_1, j_2, j_3)}$ 表示对所有的三级排列取和。

类似地可把行列式的定义推广到 n 阶。

定义 2 设有 n^2 个数，把它们写成一个 n 行、 n 列的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

其中 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 是第 i 行第 j 列的数，叫做元素，它的第一个下标 i 称为行标，第二个下标 j 称为列标。我们把符号 (2) 叫做 n 阶行列式，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1, p_1} a_{2, p_2} \cdots a_{n, p_n} \quad (3)$$

的代数和，这里 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是乘积中 n 个元素的行标按自然顺序排列时相应的列标排列（它是一个 n 级排列），并且当 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为偶数时，项 (3) 前面取正号，为奇数时取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1, p_2, \dots, p_n)} (-1)^{\tau(p_1, p_2, \dots, p_n)} a_{1, p_1} a_{2, p_2} \cdots a_{n, p_n} \quad (4)$$

这里 $\sum_{(p_1, p_2, \dots, p_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和。

行列式 (2) 可简记为 $|a_{ij}|$ ，(4) 式又叫做 n 阶行列式的展开式。

二阶、三阶行列式是 n 阶行列式当 $n = 2$ 与 $n = 3$ 的特例。当 $n = 1$ 时， $|a_{11}| = a_{11}$ ，这时要注意不要与绝对值符号混淆。

n 阶行列式的定义表明， n 阶行列式是一个数，这个数是 $n!$ 项的代数和。为了计算 n 阶行列式，首先要作出所有位于不同行不同列的 n 个元素所构成的乘积，并把构成这些乘积的 n 个元素按行标排成自然顺序，然后由列标排列的奇偶性来确定它们的符号。

【例 3】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解： 这是一个四阶行列式，由定义知