

工 程 数 学

# 线性代数与复变函数

王日奥 张福洲 编

中央广播电视大学出版社

工程数学  
线性代数与复变函数

王日爽 张福渊 编

中央广播电视大学出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
人民教育出版社印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 9 千字 187  
1984年9月第1版 1985年3月第1次印刷  
印数 1—110,000  
书号: 13300·27 定价: 1.25元

# 目 录

## 第一篇 线性代数

引 言	1
第一章 行列式	5
§ 1.1 二、三阶行列式的复习	5
§ 1.2 $n$ 阶行列式	10
§ 1.3 克莱姆(Cramer) 法则	19
第二章 向量空间	23
§ 2.1 $n$ 维向量	23
§ 2.2 向量组的线性相关性	31
§ 2.3 极大线性无关组	39
第三章 矩阵	44
§ 3.1 矩阵及其运算	44
§ 3.2 常用的几种特殊矩阵	51
§ 3.3 矩阵的初等变换	56
§ 3.4 矩阵的秩和逆矩阵	63
第四章 线性方程组	75
§ 4.1 解的存在性定理	75
§ 4.2 齐次线性方程组	80
§ 4.3 非齐次线性方程组	91

<b>第五章 二次型</b> .....	98
§ 5.1 二次型与对称矩阵.....	98
§ 5.2 化二次型为标准形.....	102
§ 5.3 特征值与特征向量.....	115
§ 5.4 相似标准形.....	124
§ 5.5 有定型.....	134
<b>*第六章 线性空间、线性变换及其它</b> .....	138
§ 6.1 线性空间.....	138
§ 6.2 线性变换.....	147
§ 6.3 欧氏空间.....	154
<b>第一篇 习题答案</b> .....	162

## 第二篇 复变函数与拉氏变换

<b>第一章 复数与复平面</b> .....	173
§ 1 复数.....	173
§ 2 复数的运算.....	177
§ 3 曲线方程.....	182
§ 4 区域.....	184
习题一.....	187
<b>第二章 解析函数</b> .....	190
§ 1 复变函数.....	190
§ 2 可导与解析的概念.....	196
§ 3 可导与解析的充要条件.....	200
§ 4 解析函数与调和函数的关系.....	204
§ 5 初等函数.....	207
习题二.....	214
<b>第三章 复变函数的积分</b> .....	217
§ 1 积分的概念及计算.....	217

§ 2 积分基本定理 .....	222
§ 3 柯西积分公式 .....	227
习题三 .....	231
<b>第四章 留数</b> .....	<b>234</b>
§ 1 孤立奇点 .....	234
§ 2 留数 .....	238
习题四 .....	243
<b>第五章 拉氏变换</b> .....	<b>245</b>
§ 1 拉氏变换 .....	245
§ 2 拉氏变换的性质 .....	251
§ 3 拉氏逆变换 .....	255
§ 4 拉氏变换的应用 .....	258
习题五 .....	262
<b>第二篇 习题答案</b> .....	<b>267</b>
<b>附录 拉氏变换简表</b> .....	<b>278</b>

# 第一篇 线性代数

## 引言

线性代数是数学中的一个古老分支，它同微积分有着同样的地位、同等重要。这不仅是因为它在实际中有着许多直接的应用，而且还因为它常被间接地引用，为数学的其它许多分支以及别的学科所借鉴。因此，学好线性代数就能为学好专业打好基础，就能掌握一种非常有用的数学工具。

其实，对线性代数我们并不陌生，在中学数学中就已接触过。例如，解二元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 & (2) \end{cases}$$

在解析几何中我们知道，方程(1)与(2)在  $xOy$  坐标平面上各代表一条直线。一般地说，这两条直线有唯一的交点。用二阶行列式可以把交点的坐标写出来，即

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{12} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{aligned} \right.$$

其中  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 。但是，在系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

的情形下,情况就不那么简单了.此时,从几何上看,由方程(1)和(2)所代表的两条直线平行或重合.何时平行?何时重合?这可分别由所给的两个方程的系数及常数项之间的关系来判别:在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

的情形下,两条直线平行,从而无交点,也就是说方程组(1)–(2)无解;在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{c_1}{c_2}$$

的情形下,两条直线重合,说明方程组(1)–(2)有无穷多组解,即重合的直线上的所有点的坐标都是解.

兹再举一例:已知  $xOy$  坐标平面上有三点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  和  $(x_3, y_3)$ , 欲通过这三点作一条对称轴平行于  $y$  轴的抛物线,问此抛物线的方程如何?

我们知道,这种抛物线方程的一般形式为

$$y = ax^2 + bx + c \quad (3)$$

而所要求的抛物线,就是在满足问题的条件下,确定出方程(3)中的系数  $a$ ,  $b$  和  $c$ . 为此,将已知的三点代入(3)式,即有

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases} \quad (4)$$

现在把  $a$ ,  $b$  和  $c$  视作未知数,由(4)式的改写形式,即三元一次联立方程组

$$\begin{cases} x_1^2 a + x_1 b + 1 \cdot c = y_1 \\ x_2^2 a + x_2 b + 1 \cdot c = y_2 \\ x_3^2 a + x_3 b + 1 \cdot c = y_3 \end{cases} \quad (5)$$

中解出来(也就是待定系数)。我们引用三阶行列式解方程组(5)的法则,有

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \\ b &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \\ c &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned} \quad (6)$$

其中方程组(5)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7)$$



我们指出, 将不难证明: 如果给定的三点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  和  $(x_3, y_3)$  不共(直)线, 当它们的  $x$  坐标互不相等时, 即(7)式成立, 那么过这三点有唯一的一条抛物线(3), 其系数  $a, b$  和  $c$  分别由(6)式给出, 当它们的  $x$  坐标有相等的时, (7)式将不成立, 即

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

那就没有过这三点而对称轴平行于  $y$  轴的抛物线存在; 如果给定的三点共(直)线, 且它们的  $x$  坐标互不相等时, 那么方程组(5)中的第一个未知数  $a=0$ , 此时方程(3)退化成直线方程, 从而通过这三点的抛物线也不存在, 当给定的三点中有两点以上重合时, 则有无数条抛物线合乎要求. 从几何上看, 这些情况都是十分明显的.

以上介绍的实例都是线性代数中经常遇到的最基本课题. 换句话说, 解  $n$  元一次联立方程组, 以下简称为线性方程组, 是线性代数中最普遍的内容之一. 同时我们强调, 学习线性代数必须着重于几何直观背景, 这是以后学好比较抽象的线性代数的一条主要途径.

### 习 题(引 言)

1. 试用行列式解下列线性方程组, 并在  $xOy$  坐标平面上用直线表示各方程, 用点表示方程组的解:

$$(1) \begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+y=9 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x-3y=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$$

2. 试证:

$$(1) \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

$$(2) \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}$$

并由此说明: 当以上两式右端的值为 0 时, (1) 与 (2) 的几何意义.

## 第一章 行列式

### § 1.1 二、三阶行列式的复习

我们已经学过二阶行列式和三阶行列式, 为了能把它们推广到更一般的情形, 首先对它们进行复习是有必要的. 然后我们从中找出规律, 引出  $n$  阶行列式.

二阶行列式和三阶行列式的一般形式可分别记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其中  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots$  称为行列式的元素. 这样的记法有好处,

例如,一看  $a_{32}$  就知道它处在行列式中的第 3 行、第 2 列的位置。我们应记住:在行列式中横的称为行,竖的称为列,带有两个下标的元素,其第 1 个下标表示所在的行序号,第 2 个下标表示所在的列序号。

我们早已知道,二、三阶行列式定义的是一个数值,它们是:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

以及

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

并且不难直接验证以下诸性质(以三阶行列式为例):

1° 转置行列式其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2° 交换任意两行其值改变符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3° 在任一行中可以提取公因子,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4° 任两行成比例, 其值为零, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} = 0$$

特别是, 当行列式中有两行相同, 或有一行为零, 则其值为零.

5° 某一行是两项的和, 可拆成两个行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6° 一行乘以一数加到另一行, 其值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由性质 1° 易见, 性质 2°—6° 对列也成立.

有了这些性质, 我们将能简化行列式的计算.

例 1 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

这可由三阶行列式的定义得知, 此行列式称为上三角行列式; 还有所谓下三角行列式, 它是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

## 例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 列、第 2 列分别乘以 1 加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{由第 1 列提取公因子 6}} 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行乘以 } (-1) \text{ 分别加到第 2、3 行}}$$

$$6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行乘以 1 加到第 3 行}} 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{由例 1}} 6[1 \times 1 \times (-3)] = -18$$

## 习 题(1.1)

1. 由三阶行列式的定义, 断定下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. 由行列式的性质, 断定下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ k \cdot d & k \cdot e & k \cdot f \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{21} & a_{31} + a_{22} \end{vmatrix}$$

3. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

4. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

5. 试证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## § 1.2 $n$ 阶行列式

回顾二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

及三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

我们发现它们有两个特点:

(1) 二阶行列式是  $2! = 2$  项的代数和, 其中每一项是取自不同行、不同列的两个元素的乘积; 三阶行列式是  $3! = 6$  项的代数和, 其中每一项是取自不同行、不同列的三个元素的乘积.

(2) 代数和中每一项的符号, 取决于各元素所在的位置, 即行和列的下标. 以三阶行列式为例说明之: 一般项

$$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

这里  $(i_1, i_2, i_3)$  表示列的下标, 它是数码  $(1, 2, 3)$  的一个全排列. 我们规定以自然数顺序为序, 若在一个全排列  $(i_1, i_2, i_3)$  中, 从左至右有数码违反自然顺序的次数, 则称此次数为逆序数. 当逆序数为偶数时, 就称它为偶逆序; 当逆序数为奇数时, 就称它为奇逆序. 例如  $(3, 1, 2)$  的逆序数为 2, 是偶逆序,

(3, 2, 1)的逆序数为 3, 是奇逆序. 于是我们可以说, 一般项  $a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} a_{i_3 i_3}$  中列下标的全排列  $(i_1, i_2, i_3)$  为偶逆序时, 此项在代数和中取“+”号,  $(i_1, i_2, i_3)$  为奇逆序时, 此项在代数和中取“-”号. 例如  $a_{13} a_{21} a_{32}$  取“+”号,  $a_{13} a_{22} a_{31}$  取“-”.

根据以上两点, 我们又可把二、三阶行列式分别记作:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1 i_1} a_{2 i_2}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1 i_1} a_{2 i_2} a_{3 i_3}$$

其中“+”、“-”号的选取, 分别取决于全排列  $(i_1, i_2)$  和  $(i_1, i_2, i_3)$  的逆序是偶数还是奇数, 偶数逆序取“+”号, 奇逆序取“-”号. 读者不妨与前述的定义印证之.

推而广之, 我们可以定义  $n$  阶行列式如下:

定义  $n^2$  个数排成  $n$  行、 $n$  列, 以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记之, 称为  $n$  阶行列式. 它代表一个数, 此数是取自上表示式中的不同行、不同列的  $n$  个元素乘积的代数和, 此代数和共有  $n!$  项, 每项的符号取决于一个全排列  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  的奇、偶逆序, 奇者为“-”, 偶者为“+”. 即有



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

根据这个定义, 我们可以计算几个特殊的行列式:

### 例 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

### 例 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

### 例 3

$$\begin{vmatrix} \sigma & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

特别需要指出的是, 对于  $n$  阶行列式 同样具有 §1.1 中所述的性质 1°—6°. 并且依此进行  $n$  阶行列式的计算很方便.

### 例 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{1}} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$