中国学生解题方法大全系列

初中数学解题

IWEIFANGFA

思维方法大全

陆志昌 /编著

山西教育出版社

初中数学

解题思维方法大全

陆志昌　编著

山 西 教 育 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学解题思维方法大全/陆志昌编著. —太原：山西教育出版社，2001.5
ISBN 7—5440—2029—0

I.初...　II.陆...　III.数学课—初中—教学参考资料
IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 70408 号

山西教育出版社出版发行
（太原市迎泽园小区 2 号楼）
太原红星印刷厂印刷　新华书店经销
2001 年 5 月第 1 版山西第 3 次印刷
开本：850×1168 毫米　1/32　印张：9.875
字数：244 千字　印数：20 001—40 000 册
定价：10.00 元

前 言

人们常说,数学是训练思维的体操.而初中数学是打开人脑智慧之门的重要途径之一.要学好数学需要多种能力的综合,其中思维能力尤为重要.35年来,我一直在第一线进行数学教学,并潜心从事数学解题思维的研究,取得了令人满意的教研成果.今天,在山西教育出版社徐亚东先生的指点下,我把自己多年的教研成果汇成此书,献给全国的初中生和辛勤教育他们的老师.

本书有以下三个显著特点:

1.思维方法深入浅出,通俗易懂

本书的上篇(前十三章)集中讲授一些解题思维方法,这些窍门与日常生活中司空见惯的实例紧密结合,不仅简捷、巧妙,同时还十分有趣.运用这些思维方法来解答相应的问题准确而又快捷;本书的中篇(中十五章)针对学生在解题过程中,往往不会下手,或做几步以后就“卡壳”,有时运算过于繁、杂等普遍现象,应如何克服这些“毛病”,本书作了全面的介绍.同学们阅读之后都会有一个比较系统的了解.本书的下篇(后六章)介绍了解题的思维品质,克服思维品质中的缺陷是学好数学的法宝.

二、解法新颖巧妙,适合初中生理解

本书介绍的思维方法、解题窍门,符合初中生的思维特点和认识水平,深受同学们喜爱.这些是我在多年的教学中发现、积累、总结的,同时还是第一次系统地向全国初中生作介绍.例如,集装箱运货物的方法、吃馒头的方法、跳远的方法、查字典的方法、司马光砸缸救人的思维方法等等与初中数学有机结合,巧妙而有趣,易学、好用又好记.有这些思维方法窍门,不仅使解题快捷,而且更能

激发同学们学习数学的兴趣，提高灵活解题的能力.

三、讲练结合，利于辅导

本书囊括了初中数学全部的知识点，例题最为典型，每道例题都代表着一个类型、一个知识点，只要把握好例题的思维方法，就能很好地掌握一个或几个知识点；体例最新，每道例题，解前都有分析，解题后有点评和误区点拨，且每章后都有配套练习题，旨在提高学生综合运用知识的能力.另外，本书的每一章还可以独立成篇，这给我们的学习和辅导带来极大的方便.

本书内容翔实、知识点密集，实用性强，通过深入浅出、一点即通的讲解，既解决了初中学生解题中所遇到的难关，又把读者引到一个新的思维境界.同学们用它辅助数学学习，可开思维之窍，入解题之门，养成遇到问题抓本质的习惯；而且还可沟通不同知识的内在联系，有助于提高解题的技能和技巧，使学生受益终身；教师将它引入课堂，能活跃课堂气氛，增强教学艺术.所以它不仅是初中生开阔眼界、拓宽思维的有益读物，而且对初中数学教师也有一定的参考价值.

耕耘者总盼着丰收的金秋，这本书如能为身处题海中的初中生朋友送去一叶小舟，一副双桨，希你们顺利到达理想的彼岸.能为开启同学们的智慧带来一点裨益，作者将感到极大的欣慰.由于时间仓促，水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请广大读者批评指正.

内容提要

本书上篇介绍解题的思维方法（13种）和窍门。应用它，不仅使解题简捷、巧妙，而且十分有趣；中篇介绍学生在解题过程中不知从何下手、或做了几步“卡壳”、运算复杂等易出的“毛病”如何去克服它；下篇介绍了解题的思维品质。克服思维品质中的缺陷是学好数学的法宝。

本书囊括了初中数学全部的知识点。例题典型、新颖，掌握了一个例题，就等于掌握了一种类型题、一个知识点或几个知识点。体例较新，既有分析、解答，又有点拨和点评。本书内容翔实，知识点密集，实用性强，可供初中学生开思维之窍，入解数学题之门。亦可供初中数学教师参考，可使你增强教学艺术，活跃课堂气氛。

出版宣言

掌握一个解题方法

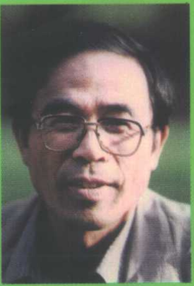
比做一百道题更重要

我们常常会看到这样一种现象：不少同学整天忙着做作业，什么“课后练习”、“单元测试”、“升学练兵”，手头资料一大堆，习题做了好几本，但学习成绩就是不提高，考试成绩不理想，这是为什么？

究其原因，就是没有吃透教材的基本原理，就是没有掌握解题的科学方法。吃透原理，是学好功课的根本保证；掌握方法，是攻克难题的有力武器。只有弄清原理，才能思路清晰，从容对答；只有掌握方法，才能触类旁通，举一反三。不管遇到什么难题，都能得心应手，迎刃而解；不管参加何种考试，都能超水平发挥，一举夺标！

我们精心策划出版的这套《中国学生解题方法大全》就是期望为同学们提供最为全面、最为系统、最为实用、最为完备的各类解题方法。它以新教学大纲为指导，以“突出素质教育、激发创新思维、增强实践应用、培养解题技能”为宗旨，按照新教材的体系分章编写。书中既有方法点拨，思维开拓；又有例题分析，针对训练。方法灵活巧妙，题型系统全面，思路清晰顺畅，点拨恰到好处。可以说，本书是同学们“学好功课的方法宝库，攻克难题的新式武器”。

愿本书成为你学习的一个支点，撑起你知识的一片蓝天！



作者简介

陆志昌　高级讲师，1941年生，江苏南通市人，1964年毕业于南京师范大学数学系。编著出版了《初中数学入门金钥匙》、《立体几何解题方法》等9部著作；发表了论文600余篇。

丛书主编　王宇鸿　王中峰
丛书编委　（按姓氏笔画为序）
王中峰　张树义
李殿起　徐　榻
徐　铮　曾庆安

选题策划　王宇鸿
责任编辑　王中峰
特约编辑　文　熙
复　　审　张大同
终　　审　徐亚东
装帧设计　薛　菲
印装监制　贾永胜

突出素质教育　激发创新思维
增强实践应用　培养解题技能

中国学生解题方法大全系列

——掌握巧解妙算的最佳方法
——攻克大题难题的新式武器

小学分册

小学数学奥林匹克竞赛解题方法大全
小学数学应用题解题方法大全

初中分册

初中代数解题方法大全
初中几何解题方法大全
初中数学典型错误诊疗大全
初中数学解题思维方法大全

高中分册

高中数学解题思维方法大全（高一）
高中数学解题思维方法大全（高二）
高中数学解题思维方法大全（高三）
中学语文学习方法大全

ISBN 7-5440-2029-0
9 787544 020299 >

ISBN 7-5440-2029-0
G·1838 定价：10.00元

目　　录

上 篇　初中数学解题思维方法

学习数学，离不开思维．那么什么叫思维呢？心理学中思维的定义是：思维是人脑对客观事物间接的和概括的认识过程．通过这种认识，可以把握事物的一般属性和本质属性．因此，学习收获的大小，学习成绩的优劣，最终都取决于思维活动的发展与思维能力的发挥．而思维方法是思维的钥匙，有了科学的思维方法，我们就能对感性材料进行合理的加工整理，形成严谨的理论系统；就能在迷离混沌的状态下，找到一条主导性的线索，从总体上把握事物的本质联系．从而，有效地提高发现问题和解决问题的能力．

初中数学是训练思维能力，打开人脑智慧之门的重要途径之一．数学思维训练和其他能力训练一样，亦存在着一个窍门问题．英国有一位社会专家，曾经调查了几十位诺贝尔奖获得者，他们中间的大多数人认为，在学习期间，掌握思维窍门比掌握具体知识更重要．这个成功的经验，是很值得每个人思考的．

初中数学问题千变万化，无穷无尽，谁也不可能夸下海口说他会做所有的数学题．因此，我们在了解了数学题型、掌握了它们的一般解法之后，更重要的是必须掌握一些解题思维窍门．这好比是一把把解题的金钥匙，有了它们就能顺利地开启数学的大门，并真正领略到解题的无穷乐趣．

一 整体思维

要把大小不一、杂七杂八的小东西搬走是件麻烦的事，但把它们集中在一个箱子里再运走就省事得多.用集装箱运货物的方法叫整体思维.日常生活这样，学习数学也不例外，有些题若按常规方法求解比较麻烦，这时我们可以将问题看作一个整体，这样往往出奇制胜！

1.利用整体思维，简化运算过程

有些数学题，按常规方法求解，往往带来繁杂的运算，如能根据题目的特点，巧用"整体代入法"，就能算得又对又快，收到事半功倍的效果.

【例 1】已知：$x^2+x-1=0$，求代数式 $2x^3+4x^2+3$ 的值.

【思路分析】此题如果先求出 $x^2+x-1=0$ 的根直接代入，计算过程相当繁.但若把所求的代数式变形，运用整体代入，则不仅化难为易，且妙趣横生.

【解法 1】$\because\ x^2+x-1=0$，$\therefore\ x^2+x+1=2$（其中 $x\neq 1$）.

$\therefore\ x^3-1=2(x-1)$. 即 $x^3=2x-1$.

$$\therefore\ 2x^3+4x^2+3=2(2x-1)+4x^2+3=4(x^2+x-1)+5=5.$$

【解法 2】$\because\ x^2+x-1=0$，$\therefore\ x^2+x=1$.

$\therefore\ 2x^3+4x^2+3=2x(x^2+x)+2x^2+3=2(x^2+x)+3=5.$

【题末点评】要想准确、迅速地解答化简（计算）求值题，必须认真审题，那种认为只有在解应用题时才需要认真审题的看法是不对的.事实上，对任何一个具体的问题都必须在真正理解题意、弄

清题目要考查的对象时才能目标明确、有的放矢地去解答它.

【例 2】已知当 $x=3$ 时,代数式 ax^5+bx^3+cx+1 的值是 5,求当 $x=-3$ 时,代数式 ax^5+bx^3+cx-1 的值.

【思路分析】本题应将 $x=3$ 代入代数式 ax^5+bx^2+cx+1 中去,这样与所求代数式有内在联系,便于整体代入.

【解】由已知得:$x=3$ 时,代数式

$$ax^5+bx^3+cx+1=3^5\cdot a+3^3\cdot b+3c+1=5,$$

$$\therefore\quad 3^5\cdot a+3^3\cdot b+3c=4.$$

当 $x=-3$ 时,代数式

$$ax^5+bx^3+cx-1=-3^5\cdot a-3^3\cdot b-3c-1=-1-4=-5.$$

【题末点评】本题两代数式中未知项部分相同,且 x 的指数都为奇数,所以当 x 取互为相反的两数时,这部分代数式的值就互为相反数.另外本题所求代数式的值与已知代数式的值也刚好互为相反数,为什么? 有兴趣的同学可探讨一下.

【例 3】把 20 以内的质数分别填入$\square$中(每个质数只用一次):$A=\dfrac{\square+\square+\square+\square+\square+\square+\square}{\square}$,使 A 是整数,A 最大是多少?

【思路分析】此题如果把 8 个质数轮流放一个在分母上,其余 7 个填到分子$\square$中,逐一计算,再作比较,那就太麻烦了.式中的分子是 7 个质数之和,20 以内的质数共有 8 个,先从整体上考虑这 8 个质数之和 $2+3+5+7+11+13+17+19=77$,再考虑 A 与这 8 个质数之和(77)有什么关系?

【解】设分母的质数为 x,则

$$A=\frac{77-x}{x}=\frac{77}{x}-1.$$

要使 A 是整数,x 只能是 77 的质约数,故 x 只能是 7 或 11,要使 A 最大,x 应取 7,这时 A 的最大值是 10.

【题末点评】本题中分子、分母的关系特殊,所以就采用了比较

特殊的方法,它比常规方法简便.

【例 4】若$(c-a)^2-4(a-b)(b-c)=0$,求证:$2b=a+c$.

【思路分析】这类题若按常规方法解,先用乘法公式展开合并,然后用配方法求解,运算太复杂,若把 $a-b$、$b-c$ 看成一个整体,则可得如下简捷解法.

【证明】$\because$ $(c-a)^2-4(a-b)(b-c)$

$$=[(c-b)+(b-a)]^2-4(a-b)(b-c)$$
$$=(c-b)^2+2(b-a)(c-b)+(b-a)^2-4(b-a)(c-b)$$
$$=(c-b)^2-2(b-a)(c-b)+(b-a)^2$$
$$=(c-b-b+a)^2=(a+c-2b)^2=0,$$

$\therefore$ $2b=a+c$.

【题末点评】这种题型常把已知条件恒等变形,牢记这个要点就能应付自如了.

此题还可以这样恒等变形,把已知条件整理成关于 c 的一元二次方程 $c^2+(2a-4b)c+(a^2-4ab+4b^2)=0$,

$$\because \quad \Delta=(2a-4b)^2-4(a^2-4ab+4b^2)=0$$
$$\therefore \quad c=\frac{-(2a-4b)}{2}$$
$$\therefore \quad 2b=a+c.$$

比较两种解法,易见用整体思维求解简捷、省时,真正做到了优中更优.

2. 利用整体思维,发现解题方法

有些数学题初看起来,无法入手,但如果认真分析题目结构,从整体着眼,就能找到解决问题的方法.

【例 5】分解因式 $(x^2+5x-3)(x^2+5x+1)-21$.

【思路分析】若把二次三项式(x^2+5x-3)与(x^2+5x+1)相乘,则将得到一个四次多项式,这时再分解因式就十分困难.但若

把 x^2+5x-3(或 x^2+5x)视为一个整体,即把 x^2+5x-3 看作一个新的变元 t,原式就变形为关于 t 的二次多项式,问题就容易解决了.

【解】设 $x^2+5x-3=t$,

则 $x^2+5x+1=t+4$.

原式 $=t(t+4)-21=t^2+4t-21=(t+7)(t-3)$.

再将 $t=x^2+5x-3$ 代入上式,得

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(x^2+5x-3+7)(x^2+5x-3-3)\\
&=(x^2+5x+4)(x^2+5x-6)\\
&=(x+1)(x+4)(x+6)(x-1).
\end{aligned}
$$

【题末点评】因式分解的方法很多,对某些多项式的因式分解,如果前一项的两个因式中只是常数项不同,则可将它们中的相同部分作为一个整体,用换元法可以降次,简化演算过程,这是处理这类题的窍门.

【例6】有甲、乙、丙三种货物,若购甲3件、乙7件、丙1件共需3.15元;若购甲4件、乙10件、丙1件共需4.20元.问购甲、乙、丙各1件共需几元?

【思路分析】设甲、乙、丙三种货物的单价分别为 x 元、y 元、z 元,根据题意得

$$
\begin{cases}3x+7y+z=3.15, & ①\\ 4x+10y+z=4.20. & ②\end{cases}
$$

要求的是 $x+y+z=?$ ③

已知条件是三元一次不定方程组,如果分别求出 x、y、z 再代入③,事情就不好办了.若把 $x+y+z$ 视为一个整体,问题就容易解决.为此将方程组变形为

$$
\begin{cases}2(x+3y)+(x+y+z)=3.15,\\ 3(x+3y)+(x+y+z)=4.20.\end{cases}
$$

解之得 $x+y+z=1.05$.

即购甲、乙、丙各1件共需1.05元.

【解】略.

【题末点评】在求解某些数学问题时,把一个较复杂的式子当作一个整体.根据其本身结构特征作整体处理,就能开拓思路,迅速求解.

3.利用整体思维,探索解题捷径

在解题中,对问题进行整体思维,往往可以少走弯路,或者跳过常规解法的步骤,使解法简洁明快.

【例7】任意调换5位数12345的各位数上数字的位置,所得5位数中质数的个数是 ( )

A.4; B.8; C.12; D.0.

【思路分析】一一写出各数进行验证太繁.现从整体考虑:在调换5位数12345的各个数字的位置时,其各位上数字和始终是不变的,其和为15.而15是3的倍数,因此,变换数字位置后的数字也一定是3的倍数,所以不可能得到质数,故应选择D.

【解】略.

【题末点评】本例看起来似乎与数字无关,但题目的数据大、项数多,一般都不宜直接"硬算".简便方法的得来,是建立在对题目认真观察分析及丰富联想基础上的,今后遇到类似的"难题",要有"求简"意识,万变不离其宗,力争找到巧妙方法.

【例8】有一个六位数,它的个位数字是6,如果将6移至第一位前面时,所得到的新的六位数是原数的4倍,那么这个六位数是________.

【思路分析】此题司空见惯的解法是根据乘法法则进行推理计算,设这个六位数为 $abcde6$,那么有 $abcde6\times4=6abcde$,我们可用竖式计算: