最新试题精析　高考闯关必读

3+X 高考考点

解析与模拟训练

JIEXI YU MONI XUNLIAN

数学

主编／徐新斌　张克修

3+X

东师教辅
东北师范大学出版社

3+X高考考点解析与模拟训练

数　学

主　编　徐新斌　张克修

东北师范大学出版社
长　春

编写人员 齐如意 王兰秀 朱光辉 周红日
张红兵 胡和生 侯修国 黄 鹏
黄六生 胡家华 陈长伟 官爱民
林小芸 朱 林 熊 洁 刘 退
周应成 钟向阳 姜洪德

图书在版编目(CIP)数据

3+X高考考点解析与模拟训练．数学/徐新斌 张克修主编．
长春:东北师范大学出版社,2001.11
ISBN 7-5602-2910-7

Ⅰ.3… Ⅱ.①徐…②张… Ⅲ.数学课—高中—试题—升学参考资料 Ⅳ.G632.479

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第073042号

出版人:贾国祥
策划编辑:五编室 责任编辑:刘宗谊
封面设计:张 然 责任校对:岳国菊
责任印制:张文霞

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街138号(130024)
电话:0431—5695744 5688470
传真:0431—5695734
网址:http://www.nnup.com
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春新华印刷厂印刷
2001年10月第1版 2001年12月第2次印刷
开本:787mm×1092mm 1/16 印张:11 字数:302千
印数:10 001-20 000册

本册定价:12.00元

出 版 说 明

最近，教育部已明确表示，明年全国高考将告别实行多年的"3+2"方式，普遍实行"3+X"科目，即"3+文科综合/理科综合"，即小综合。高考"3+X 科目"设置改革3年表，对中学实施素质教育的积极作用已逐步显现，中学教学观念、教学方式、考核评价标准等正在发生深刻而可喜的变化。为了适应教育部3+X高考改革的形势，满足广大考生的需求，我们组织编写了《3+X 高考考点解析与模拟训练》丛书。

本丛书包括语文、数学、外语、文科综合、理科综合五本。每本书各含三大部分：第一部分为考点解析与试题精析。先指出各考点所含测试范围，然后挑选有代表性的试题(这几年的高考题或模拟题)进行分析，指导解题思路与方法；第二部分为高考模拟试卷，仿照2001年全国统一考试试题的题型及覆盖的内容，并结合对2002年高考的估测，编写10套左右模拟试卷，包括参考答案及解题说明；第三部分为2001年的全国统一考试高考试题和参考答案、评分标准。

本丛书具有显著的特点：

试题最新 站在3+X高考改革的最前沿，及时把最新的成果送给考生，仿佛是一把打开3+X高考之门的金钥匙。

含金量最高 本丛书由湖北、江苏省重点中学的著名特级、高级教师联合编写。他们长期担任高三教学工作，教学经验丰富，科研能力强，对高考尤其有深刻的研究，有独到的见解，仿佛名师为你指点迷津。

针对性最强 考点解析全面透彻，试题精析新颖而深刻，模拟训练逼真而恰到好处，无疑是广大考生高考复习与训练的最好选择。

丛书在手，广大考生一定会从本丛书中收到事半功倍的复习与训练效果，找到夺取高考胜利的秘方！

祝你成功！

东北师范大学出版社　五编室

2001年10月

目　录

第一篇　考点解析与试题精析

考点1　集　　合

考点解析

集合是每年高考必考的知识点，要求理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，能掌握有关的术语和符号，能正确进行交、并、补的运算，并会用这些法则解决实际问题．主要技能和方法包括：正确地表示集合；求已给集合的交集、并集或补集；判断两个集合之间的包含或相等的关系等．主要能力包括：对抽象数学符号理解和使用的能力；用图来表示集合并研究其关系的能力．

考试题型多是选择题，属容易题；重点考查分析和解决问题的能力以及等价转化数形结合等数学思想方法．

试题精析

例1　如图1-1所示，I是全集，M,P,S是I的3个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　)．

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$　　C. $(M\cap P)\cap\overline{S}$　　D. $(M\cap P)\cup\overline{S}$

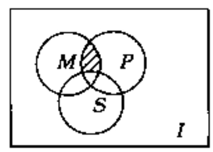

图1-1

【精析】　本题考查集合的子集、交集、并集、补集等基本概念及其运算．由图不难看出阴影部分既在$M\cap P$中，又在$\overline{S}$中，故由交集的定义知应选C.

例2　设全集$I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，集合$M=\left\{(x,y)\,|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}$等于(　　)．

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

【精析】　本题考查集合的符号语言转换．集合M为直线$y=x+1$上去掉$(2,3)$的全体点集；集合N为平面内除了直线$y=x+1$外的全体点集，于是$M\cup N$是平面内去掉点$(2,3)$的全体点集，因此有$\overline{M\cup N}=\{(2,3)\}$，故选B.

例3　已知集合$M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，其中$a\neq0$且$M=N$，求q的值．

【精析】　本题考查元素的互异性，集合相等的概念，由已知得

①$\begin{cases}a+d=aq\\a+2d=aq^2\end{cases}$，或②$\begin{cases}a+d=aq^2\\a+2d=aq\end{cases}$解①得$\begin{cases}a=1\\d=0\end{cases}$(舍)，解②得$\begin{cases}q=-\frac{1}{2}\\d=\frac{3}{4}a\end{cases}$故$q=-\frac{1}{2}$.

例4　集合$M=\left\{x\,|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则(　　)．

A. $M=N$　　B. $M\supset N$　　C. $M\subset N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

【精析】　本题考查集合之间的关系．

思路一：找出M与N中的元素的异同．M：$x=\frac{\pi}{4}(2k+1),k\in\mathbf{Z}$，$N$：$x=\frac{\pi}{4}(k+2),k\in\mathbf{Z}$，显然$M$中元素是$\frac{\pi}{4}$的奇数倍，$N$中元素是$\frac{\pi}{4}$的整数倍，$\therefore M\subset N$.

思路二：用列举法分别表示M与N．$M=\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\}$，$N=\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\cdots\}$，显然$M\subset N$.

思路三：因为M与N中元素都是k的一次式，故可考虑用等差数列判断．

M：$x=\frac{3\pi}{4}+(k-1)\frac{\pi}{2}$，$N$：$x=\frac{3\pi}{4}+(k-1)\frac{\pi}{4}$，首项均是$\frac{3\pi}{4}$，且$M$中公差是$N$中公差的2倍，故$M\subset N$.

例5　设全集$I=\{a,b,c,d,e\}$，集合$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么$\overline{M}\cap\overline{N}$是(　　)．

A. $\varnothing$　　B. $\{d\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{b,e\}$

【精析】 $\overline{M}\cap\overline{N}=\overline{M\cup N}=\overline{I}=\varnothing$. 故选 A.

例 6 已知 I 为全集，集合 $M,N\subset I$，若 $M\cap N=N$，则(　　).

A. $\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　B. $M\subseteq\overline{N}$　　C. $\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　D. $M\supsetneqq\overline{N}$

【精析】 $\because M\cap N=N$，$\therefore N\subseteq M$. 故有 $\overline{M}\subseteq\overline{N}$，故选 C.

【评述】 在解集合问题时，用常用性质求解，往往事半功倍. 如 $\overline{A}\cup A=I$，$\varnothing\cup A=A$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 等等.

例 7 设 $A=\{x\mid(x+2)(x+1)(x-1)>0\}$，$B=\{x\mid x^2+px+q\leqslant0\}$，若 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid1<x\leqslant3\}$，求 p,q 的值.

【精析】 本题考查集合的运算. 将 A 化简得 $A=\{x\mid-2<x<-1$，或 $x>1\}$，由 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid1<x\leqslant3\}$，结合数轴，知 $B=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant3\}$，由 -1 和 3 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两根，得 $p=-2,q=-3$.

【评述】 求解数集的交集、并集和补集的运算问题时，可先化简集合，并运用数轴表示的直观性简化运算，同时要注意端点的取舍.

考点 2　映射、函数、反函数

考点解析

函数是高考重点考查内容之一，要求理解映射、函数、反函数的概念，掌握函数的表示方法，会求函数的反函数，掌握函数与反函数图像间的关系，能建立简单的实际问题的函数式. 主要能力包括：用配方法、待定系数法和换元法等求函数的表达式. 让学生学会文字语言与图形语言相互转换，提高运用函数观点解决问题的意识.

考试题型多以选择题与填空题的形式出现，一般多为容易题和中等题. 复习时，应在集合与映射的基础上深刻理解函数概念，培养函数观点和方法.

试题精析

例 1 下列对应是否从 A 到 B 的映射，能否构成函数？

(1)$A=R,B=R,f:x\to y=\dfrac{1}{x+1}$；

(2)$A=\left\{a=\dfrac{1}{2},a\in\mathbf{N}\right\},B=\left\{b\mid b=\dfrac{1}{n},n\in\mathbf{N}\right\},f:a\to b=\dfrac{1}{a}$；

(3)$A=\overline{R}\ ,B=R,f:x\to y:y^2=x$；

(4)$A=\{$平面 M 内的矩形$\}$，$B=\{$平面 M 内的圆$\}$，f：作矩形的外接圆.

【精析】 (1)当 $x=-1$ 时，y 值不存在，∴不是映射. (2)是映射也是函数，因为 A,B 都是非空的数集. (3)不是映射，更不是函数. (4)是映射，但不是函数，因为 A,B 不是数集.

例 2 下列三组函数中，$f(x)$与 $g(x)$是否为同一函数：

(1)$f(x)=\lg x,g(x)=\dfrac{1}{2}\lg x^2$；(2)$f(x)=x,g(x)=\sqrt{x}$；

(3)$f(x)=\begin{cases}x+1 & -1<x<0\\ x-1 & 0<x<1\end{cases},g(x)=f^{-1}(x)$.

【精析】 判断两个函数是否为同一函数，关键是判断它们的对应法则，定义域和值域是否分别相同.

(1)$f(x)$的定义域为$[0,-\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故 $f(x)$与 $g(x)$不是同一函数.

(2)$f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$，$g(x)$的值域为$[0,+\infty]$，$\therefore f(x)$与 $g(x)$也不是同一函数.

(3)$\because g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & 0<x<1\\ x+1 & -1<x<0\end{cases}$，∴定义域、值域对应法则分别相同，故它们是同一函数.

例 3 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$(a,b 为常数且 $ab\neq0$)满足 $f(2)=1$，方程$f(x)=x$ 有惟一解，试求函数 $f(x)$的解析式和 $f[f(-3)]$的值.

【精析】 由 $f(2)=1$ 得 $2a+b=2$，由 $f(x)=x$ 即 $x(ax+b-1)=0$ 有惟一解，$\therefore a\neq0$ 且 $b-1=0$，从而得 $a=\dfrac{1}{2},b=1$，$\therefore f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$，$\therefore f[f(-3)]=\dfrac{3}{2}$.

例 4　已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像如图 2-1 所示，则(　　).

A. $b\in(-\infty,0)$　　B. $b\in(0,1)$　　C. $b\in(1,2)$　　D. $b\in(2,+\infty)$

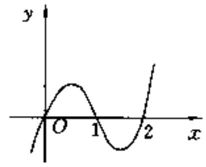

图 2-1

【精析】　本题考查识图、读图，将图形语言转化为数学符号语言的能力，故选 A．观察图形，从形向数转化，可得如下解法．

解法一：由题意得$\begin{cases}f(0)=d=0,\\f(1)=a+b+c+d=0,\\f(2)=8a+4b+2c+d=0\end{cases}$

解这个关于 b,c,d 的方程组，得 $b=-3a,c=2a,d=0$

由图知 $f(3)>0$，即 $f(3)=27a+9b+3c=6a>0$，$\therefore b=-3a\in(-\infty,0)$.

解法二：设 $f(x)=ax(x-1)(x-2)$，则 $ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-3ax^2+2ax$，比较系数，得 $b=-3a$，

$\because f(3)=a\cdot3\cdot(3-1)\cdot(3-2)=6a>0$，$\therefore b=-3a\in(-\infty,0)$.

【评述】　由图形特征建立数量关系，是数形转化的关键．(2000 年北京春季)

例 5　已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$.

(1)求 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$；(2)证明 $f^{-1}(x)$的图像关于原点成中心对称图形.

【精析】　本题考查函数的概念及性质、转化及变形的能力.

(1)设 $y=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$，则 $a^{2x}-2ya^x-1=0$．解得 $a^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$.

$\because a^x>0$，$\therefore a^x=y+\sqrt{y^2+1}$，于是 $x=\log_a(y+\sqrt{y^2+1})$.

$\therefore f^{-1}(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(x\in\mathbf{R})$

(2)证明：任取 $x\in\mathbf{R}$，必有 $-x\in\mathbf{R}$，且 $f^{-1}(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)=$

$\log_a\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)=-f^{-1}(x)$.

$\therefore f^{-1}(x)$是奇函数．$\therefore f^{-1}(x)$的图像关于原点成中心对称图形.

【评述】　在求反函数时，往往要用到各类方程求解，当 $y=f(x)$求出 $x=f^{-1}(y)$不惟一时，要根据 $f(x)$的定义域决定取舍．(2001 年广州市毕业班试题)

例 6　某种细菌每隔两小时分裂一次(每一个细菌分裂成两个，分裂瞬间的时间忽略不计)，研究开始计时时有两个细菌，在研究过程中不断进行分裂，细菌总数 y 是研究进行时间 t 的函数，记作 $y=f(t)$.

(1)写出函数 $y=f(t)$的定义域和值域；

(2)在给出的坐标系中画出 $y=f(t)(0\leqslant t\leqslant6)$的图像；

(3)写出研究进行到第 n 小时($n\geqslant0,n\in\mathbf{Z}$)时细菌的总数有多少个(用关于 n 的式子表示).

【精析】　(1)定义域为$[0,+\infty)$，值域为$\{y|y=2^n,n\in\mathbf{N}\}$.

(2)如图 2-2 所示；

(3)n 为偶数时：$y=2\times2^{\frac{n}{2}}$，n 为奇数时，$y=2\times2^{\frac{n-1}{2}}$.

【评述】　由实际问题建立简单的函数式，首先要选定变量，而后寻找等量关系，特别要注意定义域．(海淀区 2001 年测试题)

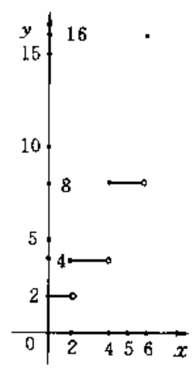

图 2-2

考点 3　函数的定义域、解析式

考点解析

(1)函数的定义域与解析式是函数的两大要素，讨论函数的性质、图像都必须以它为前提．涉及的主要考点有已知函数解析式，求其定义域，复合数的定义域以及借助函数的定义域求变量的取值范围.

(2)求函数定义域一般有四类问题：

① 若已知函数解析式比较复杂，求定义域时根据各种条件不等式组求解.

② 由 $y=f(x)$ 的定义域求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域.

③ 对含字母参数的函数，求定义域时注意对字母参数的分类讨论.

④ 若是实际问题除应考虑解析式本身有定义外，还应使实际问题有意义.

(3)函数的解析式与定义域每年必考，常常是通过函数性质或实际应用问题来考查的，复习时应必须树立起"定义域优先"的观点，应以基本类型和方法为主.

试题精析

例 1 求下列函数定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\lg(x+2)}{|x|-x}+\sqrt{2-x^2}$；(2) $y=\log_a(a^x-1)$.

【精析】 求函数定义域应注意使函数表达式中各部分均有意义，通常转化为不等式组的解.

(1)由 $\begin{cases}x+2>0\\|x|-x\neq0\\2-x^2\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2\\x<0\\-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\end{cases}$，∴其定义域为 $[-\sqrt{2},0)$.

(2)当 $a>1$ 时有 $a^x-1>0$，此时定义域为 $(0,+\infty)$.

当 $0<a<1$ 时有 $a^x-1>0$，此时定义域为 $(-\infty,0)$.

【评述】 对含参数的函数，求其定义域时要注意对参数进行分类讨论.

例 2 已知 y 是 x 的函数，其中 $x=\log_s t+\log_t s$，$y=\log_s^4 t+\log_t^4 s+m(\log_s^2 t+\log_t^2 s)$ $(s>1,t>1$，常数 $m\in\mathbf{R})$，求函数 $y=f(x)$ 的解析式，并求出它们的定义域.

【精析】 利用配方法将 y 表示为 x 的函数.

$\because \log_s t\cdot\log_t s=1$.

$\therefore y=(\log_s^2 t+\log_t^2 s)^2-2+m(\log_s^2 t+\log_t^2 s)=$

$[(\log_s t+\log_t s)^2-2]^2-2+m[(\log_s t+\log_t s)^2-2]=$

$(x^2-2)^2-2+m(x^2-2)=x^4+(m-4)x^2+2(1-m)$

$\because s>1,t>1$，$\therefore \log_s t>0,\log_t s>0$，$\therefore x=\log_s t+\log_t s\geqslant2\sqrt{\log_s t\cdot\log_t s}=2$.

故 $f(x)=x^4+(m-4)x^2+2(1-m)$ 定义域为 $[2,+\infty)$.

例 3 (1)已知函数 $y=\lg[(a^2-1)x^2+(a+1)x+1]$，若定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的范围.

(2)已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求函数 $F(x)=f(x+a)+f(x-a)\left(-\dfrac{1}{2}<a\leqslant0\right)$ 的定义域.

【精析】 (1)由对数的定义及题设条件 $(a^2-1)x^2+(a+1)x+1>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

∴当 $a^2-1\neq0$ 时应有 $\begin{cases}a^2-1>0\\\Delta=(a+1)^2-4(a^2-1)<0\end{cases}\Rightarrow a<-1$ 或 $a>\dfrac{5}{3}$.

当 $a^2-1=0$ 时，即 $a=\pm1$，当 $a=1$ 时，不满足题中条件，当 $a=-1$ 时，不等式恒大于 0.

∴a 的范围为 $(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$.

(2)由 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，∴ $\begin{cases}0<x+a<1\\0<x-a<1\end{cases}(a\leqslant0)$，∴ $\begin{cases}-a<x<1-a\\a<x<1+a\end{cases}$

当 $a=0$ 时，定义域为 $[0,1)$. 当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，$-a<1+a$ 的定义域为 $(-a,1+a)$.

例 4 等腰梯形 $ABCD$ 的两边分别为 $AD=2a$，$BC=a$，$\angle BAD=45°$，直线 $MN\perp AD$ 于 M，交折线 $ABCD$ 于 N，记 $AM=x$，如图 3-1 所示，试写出梯形 $ABCD$ 位于直线 MN 左侧的面积 y 的函数，并写出函数的定义域和值域.

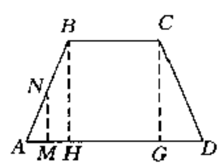

图 3-1

【精析】 要 MN 分别在 AB,BC,CD 之间时，符合条件的图形分别为三种情形，因而分三种情况：

(1)过 B,C 分别作 AD 的垂线，垂足为 H,G，则 $AH=\dfrac{a}{2}$，$AG=\dfrac{3}{2}a$，当 M 位于 H 左侧时 $AM=x$，$MN=x$，$\therefore y=S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}x^2\left(0\leqslant x<\dfrac{a}{2}\right)$.

(2)当 M 位于 H,G 之间时,$S_{\triangle MNB}=\frac{1}{2}(AM+BN)\cdot MN=\frac{1}{2}\left(x+x-\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{2}ax-\frac{a^2}{8}\left(\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{3a}{2}\right)$.

(3)当 M 位于 G,D 之间时 $y=S_{\text{//}ABCD}-S_{\triangle MDN}=\frac{a+2a}{2}\cdot\frac{a}{2}-\frac{1}{2}(2a-x)^2=\frac{-1}{2}x^2+2ax-\frac{5a^2}{4}\left(\frac{3}{2}a\leqslant x\leqslant 2a\right)$.

$$\therefore y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & \left(0\leqslant x<\frac{a}{2}\right)\\ \frac{1}{2}ax-\frac{a^2}{8} & \left(\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{3a}{2}\right)\\ -\frac{1}{2}x^2+2ax-\frac{5}{4}a^2 & \left(\frac{3}{2}a\leqslant x\leqslant 2a\right)\end{cases}$$

其定义域为$[0,2a]$,值域为$\left[0,\frac{3a^2}{4}\right]$.

【评述】 应用性问题中求函数的定义域,此时除考虑函数解析式有意义外,还应考虑所给问题的实际意义对自变量的制约.

例 5 已知 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$的定义域为$[-1,1]$,$|f(x)|$的最大值是$\frac{1}{2}$,求 $f(x)$的表达式.

【精析】 由 $f(x)$的最大值为$\frac{1}{2}$得 $f(0)=|b|\leqslant\frac{1}{2}$即$-\frac{1}{2}\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}$.

$\because|f(-1)|\leqslant\frac{1}{2},|f(1)|\leqslant\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\leqslant 1-a+b\leqslant\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\leqslant 1+a+b\leqslant\frac{1}{2}$

两式相加得$-1\leqslant 2+2b\leqslant 1$即$-\frac{3}{2}\leqslant b\leqslant-\frac{1}{2}$,又$-\frac{1}{2}\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}$,$\therefore b=-\frac{1}{2}$.

由$-\frac{1}{2}\leqslant 1-a+b\leqslant\frac{1}{2}$得 $0\leqslant a<1$,由$-\frac{1}{2}\leqslant 1+a+b\leqslant\frac{1}{2}$得$-1\leqslant a\leqslant 0$,$\therefore a=0$,$\therefore f(x)=x^2-\frac{1}{2}$.

【评述】 已知函数类型,利用待定系数法求函数解析式是常用方法.

考点 4　函数的值域

考点解析

(1)函数的值域依赖于函数的定义域及对应法则,求函数的值域常用以下方法:

① 配方法是求二次函数类值域最基本方法.

② 反函数法:利用函数和它的反函数的定义域和值域的关系.

③ 判别式法:把函数转化成关于 x 的二次方程,通过方程有实根,判别式 $\Delta\geqslant 0$,求得原函数的值域.

④ 不等式法:利用基本不等式求函数的值域.

除此之外还有换元法,利用函数的单调性,如求 $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$的值域,也可利用函数的图像求值域.

(2)求函数值域是对学生综合能力的考查,高考中求函数值域常出现在选择题、填空题中,利用上述方法求最值问题是高考考查的主要方式.

试题精析

例 1 求下列函数的值域:

(1)$y=\log_{\sin 3}\sqrt{4-x^2}$;　(2)$y=\frac{x-2}{x+1}$;　(3)$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

【精析】 (1)$\because 0<\sqrt{4-x^2}\leqslant 2,0<\sin 3<1,\therefore\log_{\sin 3}\sqrt{4-x^2}\geqslant\log_{\sin 3}2$.即 $y\in[\log_{\sin 3}2,+\infty)$.

(2)由 $y=\frac{x-2}{x+1}$解出 $x=\frac{2+y}{1-y}$,$\therefore$函数值域为$\{y|y\in\mathbf{R}$ 且 $y\neq 1\}$,利用反函数方法和分离常数或化部分分式法,

$\because y=\frac{x-2}{x+1}=1-\frac{3}{x+1}$,无论 x 取何值$(x\neq-1)y\neq 1$.

(3)由 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$可得 $e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}>0$,即 $y\in[-1,1]$.

【评述】 求函数值域主要利用函数的单调性与函数变换法,注意等价变换.

例 2 求下列函数的值域：

(1)$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$； (2)$y=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$；

(3)$y=|x|\sqrt{1-x^2}$； (4)$y=x+\sqrt{1-2x}$.

【精析】 (1)$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{2}{1+x^2}-1$，$\because 1+x^2\geqslant 1$，$\therefore 0<\dfrac{2}{1+x^2}\leqslant 2$，

$\therefore -1<y=\dfrac{2}{1+x^2}-1\leqslant 1$，即 $y\in(-1,1]$，也可以由 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}\geqslant 0$，解得$-1<y\leqslant 1$.

(2)定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x>0$ 时，$y=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}>-1$；当 $x<0$ 时，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore 0<y\leqslant\sqrt{2}$，函数的值域为$(-1,\sqrt{2}]$.

(3)由 $f(x)=\sqrt{x^2(1-x^2)}=\sqrt{-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$，$x^2\in[0,1]$知 $f(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，也可由 $0\leqslant f(x)=\sqrt{x^2(1-x^2)}\leqslant\dfrac{x^2+1-x^2}{2}=\dfrac{1}{2}$，即 $f(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

(4)令 $t=\sqrt{1-2x}$知 $y=\dfrac{1-t^2}{2}+t=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+1(t\geqslant 0)$，其值域为$(-\infty,1]$.

【评述】 本题求函数值域主要利用分离常数，二次函数配方，不等式及换元法，它与求函数的最值方法类似.

例 3 已知函数 $f(x)$的值域是$[2,5]$，求函数 $g(x)=\sqrt{f(x)-1}-f(x)$的值域.

【精析】 由 $f(x)\in[2,5]$知 $\sqrt{f(x)-1}\in[1,2]$，令 $t=\sqrt{f(x)-1}$即知$g(x)=-t^2+t-1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$在 $t\in[1,2]$为减函数，故得 $g(x)\in[-3,-1]$.

例 4 已知函数 $f(x)=\log_3\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[0,2]$，求 m,n 的值.

【精析】 函数 $y=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$的定义域为 $\mathbf{R}$，值域由题设知为$[1,9]$，由 $u=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$

得$(u-m)x^2-8x+(u-n)=0$，$\because x\in\mathbf{R}$ 且设 $u-m\neq 0$，

$\therefore \Delta=(-8)^2-4(u-m)(u-n)\geqslant 0$. 即 $u^2-(m+n)u+(mn-16)\leqslant 0$，

由 $1\leqslant u\leqslant 9$ 知关于 u 的一元二次方程 $u^2-(m+n)u+(mn-16)=0$ 的两根为 1 和 9，由韦达定理得 $\begin{cases}m+n=1+9\\mn-16=1\times 9\end{cases}$，解得 $m=n=5$.

若 $u-m\neq 0$，即 $u=m=5$ 对应 $x=0$ 符合条件. $\therefore m=n=5$ 为所求.

例 5 已知函数 $f(x)=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$.

(1)求 $f(x)$的定义域；(2)求 $f(x)$的值域.

【精析】 (1)要使函数有意义：$\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}>0\\x-1>0\\p>x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\x<p\end{cases}$，又函数定义域为非空集合，故 $p>1$，

$\therefore$函数的定义域为$(1,p)$.

(2)$f(x)=\log_2[(x+1)(p-x)]=\log_2\left[-\left(x-\frac{p-1}{2}\right)^2+\frac{(p+1)^2}{4}\right]$. 当$1<\dfrac{p-1}{2}<p$ 即 $p>3$ 时，

$f(x)\leqslant 2\log_2(p+1)-2$. 当$\dfrac{p-1}{2}\leqslant 1$ 即 $1<p\leqslant 3$ 时，$f(x)<1+\log_2(p-1)$.

综上所述，当 $p>3$ 时，$f(x)$的值域为$[-\infty,1+\log_2(p+1)-2)$.

当 $1<p\leqslant 3$ 时，$f(x)$的值域为$(-\infty,1+\log_2(p+1))$.

【评述】 求函数值域要注意函数的定义域的制约作用.

例 6 已知 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2x-x^2$.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)是否存在实数 $a,b(a\neq b)$使 $f(x)$在$[a,b]$上的值域为$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$,若存在,求 a 和 b,若不存在,说明理由.

【精析】 (1)设 $x<0$,则$-x>0$,由当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=2x-x^2$ 且 $f(x)$为奇函数得 $f(-x)=-2x-x^2$,

$\therefore f(x)=-f(-x)=-(-2x-x^2)=2x+x^2$. $\therefore f(x)=\begin{cases}2x-x^2 & x\geqslant 0\\ 2x+x^2 & x<0\end{cases}$.

(2)由$\begin{cases}a<b\\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<b\\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<b\\ \frac{b-a}{ab}\Rightarrow ab>0\end{cases}$

① 若 $0<a<b$,$\because f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1\leqslant 1$,又$\because f(x)$在$[a,b]$上值域为$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$,$\therefore \frac{1}{a}\leqslant 1$,即 $a\geqslant 1$,即 $1\leqslant a<b$,而 $f(x)=-(x-1)^2+1$ 在$[1,b]$上为减函数,因此 $f(a)=\frac{1}{a}$,$f(b)=\frac{1}{b}$.由 $2a-a^2=\frac{1}{a}$及 $2b-b^2=\frac{1}{b}$可知 a,b 为方程 $2x-x^2=\frac{1}{x}$的两根.将此方程化为 $x^3-2x^2+1=0$,$(x^3-x^2)-(x^2-1)=0$,$(x-1)(x^2-x-1)=0$,$x_1=1$,$x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍),$\therefore a=1$,$b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

② 若 $a<b<0$,$\because f(x)=2x+x^2=(x+1)^2-1\geqslant -1$,又$\because f(x)$为$[a,b]$上值域为$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$,$\therefore \frac{1}{b}\geqslant -1$,即 $b\leqslant -1$,即 $a<b\leqslant 1$,而 $f(x)=(x+1)^2-1$ 在$[a,-1]$上为减函数,因此 $f(a)=\frac{1}{a}$,$f(b)=\frac{1}{b}$.由 $2a+a^2=\frac{1}{a}$及 $2b+b^2=\frac{1}{b}$可知 a,b 为方程 $2x+x^2=\frac{1}{x}$的两根,将此方程化为 $x^3+2x^2-1=0$,$(x^3+x^2)+(x^2-1)=0$,$(x+1)(x^2-x-1)=0$,$x_1=-1$,$x_2=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍),$\therefore a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$b=-1$.

考点 5　函数的奇偶性

考点解析

函数的奇偶性是高考考查的重要内容,几乎每年必考,要求理解函数奇偶性的概念,能根据定义或图像的对称性判定给出函数解析式的函数的奇偶性.能利用函数的奇偶性求有关的函数解析式或数值.要注意从数和形两个角度理解函数的奇偶性,要充分利用 $f(x)$与 $f(-x)$之间的转化关系和图像的对称性解决有关问题.

考试题型多以选择题或填空题的形式出现,难度多数是容易题和中等题,重点考查分析和解决问题的能力,数形结合的方法.

试题精析

例 1　定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$都可以表示成一个奇函数 $g(x)$和一个偶函数 $h(x)$之和,如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$,$x\in(-\infty,+\infty)$,那么(　　).

A. $g(x)=x$,$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+20)$　　B. $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$,$h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

C. $g(x)=\frac{x}{2}$,$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$　　D. $g(x)=-\frac{x}{2}$,$h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

【精析】 题设直截了当地给出了一个定理:定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$均可表示成 $g(x)+h(x)$,其中 $g(x)$为奇函数,$h(x)$为偶函数.根据奇、偶函数的定义,得 $g(-x)=-g(x)$,$h(-x)=h(x)$.从而有

$\begin{cases}f(x)=g(x)+h(x),\\ f(-x)=-g(x)+h(x).\end{cases}$解得$\begin{cases}g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\\ h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].\end{cases}$

将 $f(x)=\lg(10^x+1)$,$f(-x)=\lg(10^{-x}+1)$代入,化简得 $g(x)=\frac{x}{2}$,$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$.故应选 C.

【评述】 由选择题的特点,只要根据 $g(x)+h(x)$是否等于 $f(x)$,且$g(x)$,$h(x)$是否依次为奇、偶函数,就可以判断各选择项的真伪.

例 2　$F(x)=\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)f(x)(x\neq0)$是偶函数，且 $f(x)$不恒等于零，则 $f(x)$(　　).

A. 是奇函数　　　　　　　　　　B. 是偶函数

C. 可能是奇函数也可能是偶函数　　D. 不是奇函数也不是偶函数

【精析】　本题既考查用定义判断函数奇偶性的能力，又检测对奇偶函数运算法则的掌握情况.首先要用定义判断$1+\frac{2}{2^x-1}$的奇偶性，设 $g(x)=1+\frac{2}{2^x-1}=\frac{2^x+1}{2^x-1}$，则 $g(-x)+g(x)=0$，可知 $g(x)$是奇函数，由"$F(x)$是偶函数"及奇偶函数的运算法则知 $f(x)$必为奇函数．故选 A.

例 3　已知 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$对一切实数 x,y 均成立且 $f(0)\neq0$，求证 $f(x)$是偶函数.

【精析】　本题主要考查根据定义证明偶函数，属抽象函数问题"恒成立问题"的常用技巧——赋值法．$\because f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$对 $x,y\in\mathbf{R}$ 均成立，令 $x=y=0$ 得 $2f(0)=2f^2(0)$．$\because f(0)\neq0,\therefore f(0)=1$ 再令 $x=0,y\in\mathbf{R}$ 可得 $f(-y)=f(y)$即 $f(-x)=f(x)$，$\therefore f(x)$是偶函数.

例 4　已知 $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$．(1)判断 $f(x)$的奇偶性；(2)证明$f(x)>0$.

【精析】　(1)$\because f(x)=x\cdot\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}$定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$关于原点对称，又 $f(-x)=-x\cdot\frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}=-x\cdot\frac{1+2^x}{2(1-2^x)}=x\cdot\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}=f(x)$．$\therefore f(x)$为偶函数.

(2)利用偶函数的对称性．当 $x>0$ 时 $f(x)>0$．当 $x<0$ 时有 $-x>0$．这时 $f(x)=f(-x)>0$，$\therefore$对一切 $x\neq0$ 的实数均有 $f(x)>0$.

例 5　设 $y=f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，并且它的图像关于直线 $x=1$ 对称，且当 $x\in[2,3]$时，$f(x)=2a(x-2)-4(x-2)^3$(其中 a 为常数).

(1)求函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上的解析式；(2)若 a 的值为 6，求 $f(x)$的最大值.

【精析】　(1)由 $y=f(x)$是偶函数，知 y 轴是 $y=f(x)$图像的对称轴．又直线 $x=1$ 也是它的对称轴，所以 $f(x)$是以 2 为一个周期的周期函数．这样利用周期性可求函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上的解析式.

设 $x\in[0,1]$，则 $x+2\in[2,3]$．$\therefore f(x)=f(x+2)=2a[(x+2)-2]-4[(x+2)-2]^3=2ax-4x^3$.

(2)由(1)知 $f(x)$是以 2 为一个周期的周期函数，又 $f(x)$是偶函数，

$\therefore f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值就是 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最大值.

$\because a=6,\therefore f(x)=12x-4x^3=4x(3-x^2),x\in[0,1]$．$\because x>0,3-x^2>0$，

$\therefore f(x)=\sqrt{16x^2(3-x^2)(3-x^2)}=\sqrt{8\cdot2x^2(3-x^2)(3-x^2)}\leqslant\sqrt{8\times\left(\frac{6}{3}\right)^3}=8$，当且仅当 $2x^2=3-x^2$ 即 $x=1$ 时，$f(x)$的最大值为 8.

【评述】　函数的奇偶性，从"形"理解说明了函数图像的对称性，从"式"理解给定了一个恒等式．利用函数解奇偶性问题，应从这两个方面思考.

考点 6　函数的单调性

考点解析

函数的单调性是高考考查的重点内容．要求理解函数单调性的定义，利用单调性的定义判断函数的单调性，求函数的单调区间和单调性的应用，表现在：(1)根据自变量的大小关系得到函数值的大小关系，(2)根据函数值的大小关系得到自变量的大小关系，要注意提高解析式变换的能力，代数推理论证能力，强化等价变换，化归转化和数形结合思想的运用.

在函数性质中，单调性占有重要地位，考题既有选择题与填空题又有解答题，难度既有容易题、中等题，也有难题，主要包括对函数单调性定义的考查，对单调函数图像的考查，对复合函数单调性和对函数单调性综合应用的考查.

试题精析

例 1　若奇函数 $f(x)$在$[3,7]$上是增函数且最小值为 5，则 $f(x)$在$[-7,-3]$上是(　　).

A. 增函数且最小值为-5　　　B. 增函数且最大值为-5

C. 减函数且最小值为-5　　　D. 减函数且最大值为-5

【精析】 本题考查函数的奇偶性、单调性、最值及其图像的特征．依题意画出$f(x)$的草图，借助图像易知$f(x)$在$[-7,-3]$上也是增函数，又由已知得$f(3)=5$，$\therefore f(-3)=-5$，可知$f(x)$在$[-7,-3]$上的最大值是-5．故选B.

例2 若函数$f(x)$是偶函数，$x\in\mathbf{R}$，在$x<0$时，$f(x)$是增函数，对于$x_1<0,x_2>0$且$|x_1|<|x_2|$，则(　　).

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$　　　B. $f(-x_1)<f(-x_2)$

C. $f(-x_1)=f(-x_2)$　　　D. $f(-x_1)\geqslant f(-x_2)$

【精析】 本题考查函数奇偶性和单调性，由$x_2>0$得$-x_2<0$，又$|x_1|<|x_2|$，$\therefore -x_2<x_1<0$，又$x<0$时$f(x)$是增函数，$\therefore f(-x_2)<f(x_1)=f(-x_1)$．故选A.

例3 设$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，当$x\leqslant -1$时，$y=f(x)$的图像是经过点$A(-1,-1)$，斜率为1的射线．又在$y=f(x)$的图像中有一部分是经过$A(-1,-1)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$两点的三次函数图像上的曲线段.

(1)写出函数$f(x)$的表达式；

(2)用单调性的定义证明$f(x)$在$[0,+\infty]$上是增函数，从而推测$f(x)$在$\mathbf{R}$上的单调性.

【精析】 (1)当$x\leqslant -1$时，$f(x)=x$．$\because f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，$\therefore$当$x\geqslant 1$时，$f(x)=x$，且$f(x)$的曲线段部分经过$(0,0)$，$(-1,-1)$，$(1,1)$，$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$四点，将其代入$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，

得$\begin{cases}d=0,-a+b-c+d=-1,\\ a+b+c+d=1,\\ \frac{1}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c+d=\frac{1}{8}.\end{cases}$　解得$a=1,b=0,c=0,d=0$，即$f(x)=x^3$，故$f(x)=\begin{cases}x,\ x\leqslant -1,\\ x^3,-1<x<1,\\ x,\ x\geqslant 1\end{cases}$

(2)任取$x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$x_2>x_1$，即$x_2-x_1>0$．当$0\leqslant x_1<x_2<1$时，由$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$，知$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$；当$0\leqslant x_1<1\leqslant x_2$时，$x_2-1\geqslant 0$，$1-x_1^3=(1-x_1)(1+x_1+x_1^2)>0$，$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1^3=(x_2-1)+(1-x_1^3)>0$；当$1\leqslant x_1<x_2$时，$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1>0$．综上均有$f(x_2)-f(x_1)>0$．故$f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数．从而可推知$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数．(2001华中师大一附中测试题)

例4 设函数$f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$其中$a>0$．求a的取值范围，使函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是单调函数.

【精析】 判断函数的单调性，可对函数式适当的分解变形，利用单调性的定义进行判断：在区间$[0,+\infty)$上任取x_1,x_2使得$x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right).$$

(1)当$a\geqslant 1$时，$\because \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$，$\therefore \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$，又$x_1-x_2<0$，$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$即$f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore$当$a\geqslant 1$时函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是单调递减函数.

(2)当$0<a<1$时，在区间$[0,+\infty)$上存在两点$x_1=0$，$x_2=\frac{2a}{1-a^2}$满足$f(x_1)=1$，$f(x_2)=1$，即$f(x_1)=f(x_2)$.

$\therefore$函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上不是单调函数.

综上所述，当且仅当$a\geqslant 1$时，函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是单调函数.

【评述】 证明函数的单调性是根据定义证明，否定$f(x)$在D上的单调性，只须举反例：存在$x_1,x_2\in D$且$f(x_1)=f(x_2)$.

例5 设函数$y=f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，当$x>0$时，$f(x)>1$，且对任意$x,y\in\mathbf{R}$有$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，当$x\neq y$时，有$f(x)\neq f(y)$.

(1)求$f(0)$；　　　　(2)证明$f(x)$在$\mathbf{R}$上递增；

(3)解不等式$f(\sqrt{x^2+1}-ax-1)\leqslant 1$(其中$a>0$).

【精析】 (1)$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，令$x=y=0$得$f(0)=[f(0)]^2$，$\therefore f(0)=0$，或$f(0)=1$.

若 $f(0)=0$，则当 $x\neq 0$ 时，有 $f(x+0)=f(0)\cdot f(x)=0$ 这与 $x\neq y$ 时，$f(x)\neq f(y)$ 矛盾，故 $f(0)=1$.

(2)设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，由题意知 $f(x_2-x_1)>1$.

由 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，得 $f(x_2)=f[x_1+(x_2-x_1)]=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)$.

当 $x_1\geqslant 0$ 时，$f(x_1)>0$；当 $x_1<0$ 时，$f(0)=f(x_1)\cdot f(-x_1)=1$.

$\because -x_1>0$，$\therefore f(-x_1)>0$，$\therefore f(x_1)>0$.

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_1)f(x_2-x_1)-f(x_1)=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1]>0$，

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$，因此 $f(x)$ 在 **R** 上是单调增函数.

(3)由(1)可知，不等式可化为 $f(\sqrt{x^2+1}-ax-1)\leqslant f(0)$. 由(2)不等式等价于 $\sqrt{x^2+1}-ax-1\leqslant 0$，即 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1$. 由此得 $1\leqslant 1+ax$，即 $ax\geqslant 0$，其中常数 $a>0$.

所以，原不等式等价于 $\begin{cases}x^2+1\leqslant(1+ax)^2\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ (a^2-1)x+2a\geqslant 0.\end{cases}$

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时不等式解集为 $\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}\right\}$.

当 $a\geqslant 1$ 时，不等式解集为 $\{x|x\geqslant 0\}$.

【评述】 若 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增(递减)，则 $f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}x_1,x_2\in D\\ x_1<x_2\end{cases}\left(\begin{cases}x_1,x_2\in D\\ x_1>x_2\end{cases}\right)$.

考点7 二次函数

考点解析

近几年来高考数学试题，涉及二次函数及其应用的题型连年出现，成为高考的一个热点，归纳起来，主要有两种类型：一种是直接考查二次函数知识的试题；另一种是运用构造二次函数法求解综合题的试题. 二次函数与二次方程、二次不等式之间有着密切的联系，在高中数学中应用十分广泛. 以二次函数为"背景"的解答题，考查综合运用数学知识，分析问题和解决问题的能力，具有较高的难度. 复习时应注意利用数形结合的思想，解决有关二次函数在闭区间上的最值问题，二次函数的对称性，二次函数的增减性，一元二次方程根的分布问题及变量的取值问题等内容.

以二次函数为知识载体，能有效地考查数学抽象思维能力和综合运用能力. 高考常常结合二次不等式、二次方程、以大题出现.

试题精析

例 1 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$ 且图像在 y 轴上的截距为 1，在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式.

【精析】 确定二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式，即根据条件确定系数 a,b,c 合理利用条件，能简化解题步骤，根据题目条件可设为一般式：$y=ax^2+bx+c$，顶点式：$y=a(x-x_0)^2+k$ 或 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

(1)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 由 $f(x-2)=f(-x-2)$ 得 $4a-b=0$……①

又 $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，$\therefore b^2-4ac=8a^2$……②

又由已知 $c=1$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$，$b=2$，$c=1$. $\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$.

(2)由 $f(x-2)=f(-x-2)$ 知 $y=f(x)$ 的图像的对称轴为 $x=-2$，

$\therefore$ 可设 $y=a(x+2)^2+k$，余下同(1)

(3)$\because y=f(x)$ 的图像有对称轴 $x=-2$ 又 $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$，

$\therefore f(x)$ 与 x 轴的交点为 $(-2-\sqrt{2},0)$，$(-2+\sqrt{2},0)$

故可设 $f(x)=a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$，$f(0)=1$. $\therefore a=\dfrac{1}{2}$(余下略).

【评述】 以上三种解法均是用待定系数法求二次函数的解析式，充分挖掘题目的隐含条件及充分利用图形的直观性是简化运算的手段.

例 2　设二次函数 $f(x)=x^2+x+a(a>0)$ 满足 $f(m)<0$，试判断 $f(m+1)$ 的符号．

【精析】　本题初看似乎无从下手，但从二次函数的图像性质着手，即从抛物线的开口方向、对称轴、与 x，y 轴的交点等方面对问题进行分析，不难得到问题的特性：

(1)二次函数图像过 y 轴正半轴上定点 $(0,a)$；

(2)二次函数的对称轴为定直线 $x=-\dfrac{1}{2}$；

(3)二次函数的开口向上；

(4)抛物线与 x 轴有两个不同交点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，其中 $x_1<x_2$；

(5)当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f(x)<0$；当 $x>x_2$ 或 $x<x_1$ 时，$f(x)>0$．所以只要判断 $m+1$ 是否在区间 (x_1,x_2) 即可．由于 $f(m)<0$，$\therefore m\in(x_1,x_2)$．

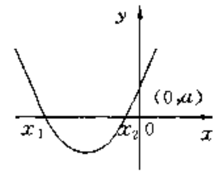

图 7-1

又 $\because \Delta=1-4a>0$，$a>0$，$\therefore 0<a<\dfrac{1}{4}$．$\because |x_1-x_2|=\sqrt{1-4a}<1$，$\therefore m+1\notin(x_1,x_2)$，

$\therefore f(m+1)>0$．

例 3　设 $f(x)=x^2-2ax+2$，当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

【精析】　$f(x)\geqslant a\Leftrightarrow f(x)-a\geqslant 0$，有关二次三项式恒大于或等于零的问题，可以利用判别式．即

$$\begin{cases}\Delta>0\\ -\dfrac{-2a}{2\cdot 1}<-1\\ (-1)^2-2a\cdot(-1)+2-a\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow a\in[-3,-2]\text{或}\Delta\leqslant 0\Rightarrow a\in[-2,1]，\text{综合得 } a\in[-3,1].$$

【评述】　本题也可以转化为求 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上的最小值，并令其大于或等于 a，从而求得 a 的范围．

$\because f(x)=x^2-2ax+2=(x-a)^2+2-a^2$ 在 $[-1,+\infty)$ 上的最小值是 $f(x)_{min}=\begin{cases}2-a^2 & a\in[-1,+\infty)\\ 2a+3 & a\in(-\infty,-1)\end{cases}$

由 $a\leqslant f(x)_{min}$ 知 $a\in[-3,1]$．

例 4　设函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最小值是 $g(t)$，求 $g(t)$ 的解析式．

【精析】　本题考查分类讨论的思想方法，二次函数在闭区间上的最值问题．解题的关键是确定对称轴与所给区间的位置关系．

$\because f(x)=(x-1)^2-2$，

(1)当 $1\in[t,t+1]$，即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$g(t)=f(1)=-2$；

(2)当 $t>1$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上递增，$\therefore g(t)=f(t)=t^2-2t-1$；

(3)当 $t+1<1$，即 $t<0$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上递减，$\therefore g(t)=f(t+1)=t^2-2$．

$$\therefore g(t)=\begin{cases}t^2-2 & t\in(-\infty,0)\\ -2 & t\in[0,1]\\ t^2-2t-1 & t\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

例 5　市场营销人员对过去几年某商品的价格及销售数量的关系作数据分析发现有如下规律：该商品的价格每上涨 $x\%(x>0)$，销售数量就减少 $kx\%$（其中 k 为正常数）．目前，该商品定价为 a 元，统计其销售数量为 b 个．

(1)当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，该商品的价格上涨多少，就能使销售的总金额达到最大？

(2)在适当的涨价过程中，求使销售总金额不断增加时 k 的取值范围．

【精析】　依题意，价格上涨 $x\%$ 后销售总额为

$y=a(1+x\%)b(1-kx\%)=\dfrac{ab}{10000}[-kx^2+100(1-k)x+10000]$

(1)取 $k=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{ab}{10000}\left[-\dfrac{1}{2}x^2+50x+10000\right]$，$\therefore x=50$ 即商品价格上涨 50%时 $y_{max}=\dfrac{9}{8}ab$．

(2)$y=\dfrac{ab}{10000}[-kx^2+100(1-k)x+10000]$ 此二次函数开口向下，对称轴为 $x=\dfrac{50(1-k)}{k}$．在适当涨价过程中，销售总金额不断增加，即要求此函数当自变量 x 在 $\{x|x>0\}$ 的一个子集内增大时 y 也增大．

$\therefore \dfrac{50(1-k)}{k}>0$ 解之得 $0<k<1$．

【评述】　对于实际应用问题关键是建立函数模型，本题是二次函数模型，利用二次函数求最值．（2001 北京西城区测试题）