初中数学奥林匹克同步教材

新版

● 获全国图书“金钥匙”奖

● 获全国优秀教育畅销书奖

初一卷

主审　陈传理

主编　伍龙驹

初中数学

奥林匹克系列

西南师范大学出版社

初中数学奥林匹克同步教材

初一卷

主　审　陈传理
主　编　伍龙驹
副主编　张　斌
编　者　伍龙驹　伍庆苏
　　　　江相铭　李光忠
　　　　金绍鑫　钟绍敏
　　　　谢大全

西南师范大学出版社

特约编辑：冯　异
责任编辑：胡小松
封面设计：王　煤

初中数学奥林匹克同步教材
初一卷

伍龙驹　主编

西南师范大学出版社出版、发行
（重庆　北碚）
重庆升光电力印务有限公司印刷
开本：787×1092　1/32　印张：8　字数：254 千
1999 年 9 月第 1 版　2001 年 11 月第 15 次印刷
ISBN 7-5621-0729-7/G・528

定价：7.50 元

序

初中是学生从儿童到少年的过渡阶段，体力、智力从量到质都有急剧发展，这个时期，他们的爱好不同，课外发展也就不尽相同，因此他们需要轻松、愉快、丰富多彩的课外活动。

数学奥林匹克是世界上深有影响的中学生学科竞赛活动，开展数学奥林匹克活动的根本目的，就在于吸引青少年对数学的兴趣，培养他们的数学探索能力，提高其的数学素质以适应未来发展的需要。

每年一次的数学奥林匹克竞赛吸引了上百万的青少年学生参加，这项有意义的课外教育活动已成为中学数学教育的重要组成部分，为此，不但应培养学生的参与精神，还应尽量做好在普及基础上的提高。

《初中数学奥林匹克同步教材》就是为提高学生数学能力，为学生适应初中数学

奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助教材。其主要特点：一是“竞赛”，二是“同步”。所谓“竞赛”是指内容的选取上和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性，并特别注重了创新能力的培养。所谓“同步”主要是指内容选取的基础性以及内容安排上与教学进度一致。这二者的有机结合将使学生的数学能力得到切实提高。

虽然数学竞赛有一定难度，但奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀的，也许本书会给你摘取明珠作好铺垫。

中国数学会普及工作委员会副主任

陈传理

1999 年 4 月于华中师大

前　言

近年来，在奥林匹克数学竞赛（IMO）中，我国选手频频取得优异成绩，在国外产生了极大反响，数学奥林匹克正吸引着越来越多的师生参加，全国各种层次的数学竞赛活动已空前活跃。为了满足广大师生开展课外活动的需要，我们组织编写了这套《初中数学奥林匹克同步教材》。

本套书以《九年义务教育的初中数学教学大纲》和《初中数学竞赛大纲》为指导，并与《九年义务教育初中数学》教材（人教版）同步，立足于大纲和教材的重点、难点，对教材的相应内容进行了必要的延伸和拓广。突出数学思想方法的渗透和分析、处理、解决问题的能力的培养。

本套书分初一卷、初二卷、初三卷、综合卷。其中初一、初二、初三卷均按知识、方法块为单元以课时形式进行编写，每课内

容及例题的安排均注重了由易到难、由浅入深，使不同层次的学生都能从中获得裨益。每课练习均分为A、B两组(并附有参考答案)，它们大多是国内外优秀的中考和数学竞赛试题，学生可根据不同需要选择使用。综合卷按年级编拟了32套竞赛模拟试题供广大师生强化训练时使用。

由于本套书在编写过程中既强调了与初中数学教材同步，又注意到了不同层次学生的需求，内容有梯度、有层次，因此，该书既可作为师生开展数学课外活动的教材，又可作为学生系统复习和进一步提高的参考读物。

由于编写时间仓促及编者水平所限，书中难免还存在一些疏漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　录

初一年级上期

第一课　整数与整除的基本性质(一) …………… (1)
第二课　质数与合数 …………………………… (9)
第三课　最大公约数和最小公倍数 ……………… (14)
第四课　有理数的计算技巧 …………………… (21)
第五课　有理数与绝对值 ……………………… (29)
第六课　一元一次方程 ………………………… (36)
第七课　列方程解应用题(一) ………………… (44)
第八课　列方程解应用题(二) ………………… (52)
第九课　整数与整除的基本性质(二) …………… (61)
第十课　奇数与偶数、完全平方数……………… (67)
第十一课　线段和角 …………………………… (75)
第十二课　相交线与平行线 …………………… (83)
第十三课　定义新运算 ………………………… (90)
第十四课　逻辑分析与推理 …………………… (98)
第十五课　抽屉原理(一)……………………… (104)

初一年级下期

第十六课　图形的面积………………………… (111)
第十七课　带余除法…………………………… (120)
第十八课　分类与讨论………………………… (126)

第十九课　一次方程组…………………………（133）
第二十课　一次不等式(组)……………………（140）
第二十一课　简单的一次不定方程……………（148）
第二十二课　整式的运算………………………（156）
第二十三课　整式的恒等变形…………………（162）
第二十四课　综合除法　余数定理……………（168）
第二十五课　归纳与猜想………………………（175）
第二十六课　抽屉原理(二)……………………（182）
第二十七课　恒等式与条件等式的证明………（189）
第二十八课　计数问题…………………………（195）
第二十九课　反证法初步………………………（201）
第三十课　竞赛题选讲…………………………（207）
答案与提示……………………………………（213）

第一课　整数与整除的基本性质(一)

一、整数

我们知道，自然数、零、负整数统称为整数. 非负整数是指 0 和正整数全体.

关于自然数，我们知道：1. 有最小的自然数 1；2. 自然数的个数是无限的，不存在最大的自然数；3. 两个自然数的和与积仍是自然数；4. 两个自然数的差与商不一定是自然数.

关于整数，我们知道：1. 整数的个数是无限的，既没有最小的整数也没有最大的整数；2. 两个整数的和、差、积仍是整数，两个整数的商不一定是整数.

在本课中 $a,b,c\cdots x,y\cdots$ 这些字母只用来表示十进制的整数，并且对每个整数中的各位数码如 3087 中的 3、0、8、7 叫做这个整数的各位数字. 因而一个整数的各位数字是小于 10 的非负整数. 我们把用字母表示的整数记为$\overline{ab}$，$\overline{abc}$等等，其中一个字母可表示一位或多位整数.

由十进制数的记数原理可知，两位数 67 可以写成 $6\times10+7$，四位数 1254 可以写成 $1\times10^3+2\times10^2+5\times10+4$. 同样地用字母表示的两位数$\overline{ab}=10a+b$，三位数$\overline{mnp}=m\times10^2+n\cdot10+p$，等.

例 1　用 0、1、2、…、9 这 10 个数字组成两个三位数和一个四位数，每个数字只用一次，要求它们的和是一个奇数，并且尽可能地小，那么这两个三位数及这个四位数的和是(　)

(A)1995.　(B)1683.　(C)1579.　(D)1401.

(第七届"五羊杯"初中数学竞赛初一试题)

解：为使和最小，四位数的千位数应为 1，百位上的数为 0；两个三位数上的百位应分别取 2 和 3；若三个数十位上的数分别是 4、5、6，则个位上的数便分别是 7、8、9，但 $7+8+9$ 是偶数，不合其和为奇数的要求，故三个数的十位应安排 4、5、7，个位便分别为 6、8、9，$6+8+9$ 为奇数，$1046+258+379=1683$，选(B)。

例 2　一个两位数，用它的个位、十位上的两个数之和的 3 倍减去 -2，仍得原数，这个两位数是(　　)

(A)26.　(B)28.　(C)36.　(D)38.

解：设这个两位数为 $\overline{ab}$，由题意，得：

$$3(a+b)+2=10a+b,$$

$$\therefore\ 7a=2b+2.\qquad 即\ 7a=2(b+1).$$

由于 $2(b+1)$ 为偶数，$\therefore$ a 必须为偶数，排除 C，D，又 $(b+1)$ 必是 7 的倍数，故选(A)。

例 3　一个两位数，加上 2 以后和的各数字之和只有原数字和的一半，这个两位数是____.

(1991 年"缙云杯"初中数学邀请赛题)

解：设这个两位数为 $\overline{ab}$，由于原数加上 2 后和的各数字之和比原数各数字和少，所以加上 2 发生了进位，由题意，得

$$a+1+(b+2)-10=\frac{1}{2}(a+b),\ \therefore\ a+b=14.$$

又由于 $b+2$ 后有进位，　$\therefore b=8$ 或 9，$a=6$ 或 5.

$\therefore$ 这个两位数为 68 或 59.

例 4　一个四位数与它的四个数字之和等于 1991，这个

四位数是______.（1991 年南昌市初中数学竞赛题）

解：∵ 四个数位上的数字之和最多不超过 36，

∴ 这个四位数的千位和百位数字分别是 1 和 9，故设这个四位数为 $1900+10m+n$，

∴ $1900+10m+n+1+9+m+n=1991$.

整理得 $11m+2n=81$.

又∵ $0\leqslant m\leqslant 9, 0\leqslant n\leqslant 9$ 且为整数， ∴ $m=7, n=2$.

∴ 这个四位数为 1972.

例 5 若三位数与组成该三位数的各位数字之和的比值为 M（如三位数 234，则 $M=\frac{234}{2+3+4}$），求 M 的最大值和最小值.

解：设这个三位数 $\overline{abc}=100a+10b+c$，

∴ $M=\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=100-\frac{90b+99c}{a+b+c}$，

显然 $\frac{90b+99c}{a+b+c}\geqslant 0$， 当其值为 0，即 $b=c=0$ 时，M 最大，其值为 $M=100-0=100$.

当 $\frac{90b+99c}{a+b+c}$ 最大时，M 最小，即 $b=c=9, a=1$ 时 $\frac{90b+99c}{a+b+c}=\frac{1701}{19}$. ∴ M 最小值为 $100-\frac{1701}{19}=\frac{199}{19}$.

例 6 设 $\overline{abc}$ 是一个各位数字互不相同的三位数，如果 $\overline{abc}$ 等于它的各位数字之和的 k 倍，那么将 $\overline{abc}$ 的各位数字都变动了位置的所有新数之和等于 $\overline{abc}$ 的各位数字之和的多少倍？

解：由题意 $100a+10b+c=k(a+b+c)\cdots$①

将 $\overline{abc}$ 的各位数字都变动位置所得的新数只有如下两种：a 在十位，b 在个位，c 在百位，即 $\overline{cab}$；a 在个位，b 在百位，c 在

十位，即$\overline{bca}$. 设$\overline{cab}+\overline{bca}=x(a+b+c)$，即有

$$100b+10c+a+100c+10a+b=x(a+b+c),$$

$$\therefore\ 11a+101b+110c=x(a+b+c)\cdots\cdots②$$

①+②得，$111(a+b+c)=(x+k)(a+b+c)$，

$$\therefore\ x=111-k.$$

二、能被一个数整除的数的特征

1. 能被 2 或 5 整除的数，它的末位数字能被 2 或 5 整除.

2. 能被 4 或 25 整除的数，它的最后两位数能被 4 或 25 整除.

3. 能 8 或 125 整除的数的，它的最后三位数能被 8 或 125 整除.

4. 能被 3 或 9 整除的数，它的各数位上的数字之和能被 3 或 9 整除.

5. 能被 11 整除的数，它的奇数位上数字之和与偶数位上数字之和的差是 11 的倍数.

6. 能被 7、11、13 整除的数，从个位起如果把它按 3 个数字一段分为若干段，那么它的奇位千进位的总和与偶位千进位的总和的差能分别被 7、11、13 整除.

如：3103425325，先分节，得 3，103，425，325 奇位千进位之和 325+103=428，偶位千进位之和 3+425=428，它们之差 428-428=0， ∵0 分别能被 7、11、13 整除，∴3103425325 能被 7、11、13 整除.

7. 0 能被任何非零整数整除，±1 能整除任何整数.

要判断某数能否被一个合数整除，只须将这合数分解成两个互质的约数的乘积，若这个整数能分别被这两个约数整

除，则这个整数能被这个合数整除.

例 7 能被 11 整除的最小九位数是多少？

解：若某数可被 11 整除，则其奇数位数字之和与偶数位数字之和的差为 0 或为 11 的倍数. 要这样的九位数最小，首位取 1，十位取 1，其余数位取 0，即所求数为 100000010.

例 8 一个四位数能被 9 整除，去掉末位数字后所得的三位数恰是 4 的倍数，求这样的四位数中最大的一个.

解：要求这样的四位数中最大的一个，因而设这个四位数为$\overline{99cd}$，要$\overline{99c}$为 4 的倍数，且要最大，$\therefore c=6$.

$\because \overline{99cd}$要能被 9 整除，$\therefore 9+9+6+d=24+d$ 能被 9 整除，$\therefore d=3$.

$\therefore$ 所求数为 9963.

例 9 两个三位数$\overline{abc}$，$\overline{def}$的和$\overline{abc}+\overline{def}$能被 37 整除，证明六位数$\overline{abcdef}$也能被 37 整除.

（第八届“祖冲之杯”数学邀请赛试题）

证明：$\because\ 37\mid(\overline{abc}+\overline{def})$，

$\therefore\ \overline{abc}+\overline{def}=37m$（$m$ 为整数）.

又$\because$

$$\begin{aligned}\overline{abcdef}&=\overline{abc}\times 1000+\overline{def}\\&=\overline{abc}\times 999+(\overline{abc}+\overline{def}),\end{aligned}$$

而 $999=9\times 3\times 37$，

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{abcdef}&=37\times 27\times\overline{abc}+37m\\&=37(27\times\overline{abc}+m),\end{aligned}$$

$\therefore\ 37\mid\overline{abcdef}$.

例 10 一个 101 位的自然数 $A=\underbrace{88\cdots8}_{50个}\boxed{}\underbrace{99\cdots9}_{50个}$能被 7 整除，问$\boxed{}$盖住的数字是几？

(1995 年北京市初中数学竞赛初二试题)

解：设$\square$盖住的数字是 a，由能被 7 整除的数的特征，将数 A 从右至左每 3 个数分一节，再求其代数和，得：

$999-999+\cdots+999-999+\overline{a99}-888+888-\cdots-888+888-88=\overline{a99}-88=\overline{a11}$，

$\therefore$ $\overline{a11}$能被 7 整除.

$\because$ $\overline{a11}=100a+11=7(14a+1)+2(a+2)$，

$\therefore$ $a+2$ 能被 7 整除. 而 $0\leqslant a\leqslant 9$，

$\therefore$ $a=5$.

例 11 已知一个七位自然数$\overline{62xy427}$是 99 的倍数(其中 x，y 是阿位伯数字)，试求 $950x+24y+1$ 的值，简写出求解过程.(第八届"希望杯"全国数学邀请赛初一试题)

解： $\because$ $99|\overline{62xy427}$，

$\therefore$ $9|\overline{62xy427}$ 且 $11|\overline{62xy427}$.

$\therefore$ $6+2+x+y+4+2+7=18+3+x+y$ 是 9 的倍数，即 $3+x+y=9m$. (m 为自然数)

$\because$ $0\leqslant x\leqslant 9$， $0\leqslant y\leqslant 9$，

$\therefore$ $3\leqslant x+y+3\leqslant 21$.

$\therefore$ $x+y+3=9$ 或 $x+y+3=18$，

$\therefore$ $x+y=6$ 或 $x+y=15$.

$\because$ $11|\overline{62xy427}$，

$\therefore$ $11|[(6+x+4+7)-(2+y+2)]$，

$\therefore$ $13+x-y=11k$， (k 是整数)

又$\because$ $-9\leqslant x-y\leqslant 9$， 即 $4\leqslant 13+x-y\leqslant 22$，

$\therefore$ $x-y=-2$ 或 $x-y=9$.

$\because$ $x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶，

$\therefore \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=15, \\ x-y=9; \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=12, \\ y=3; \end{cases}$（不合题意，舍去）

$\therefore \begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$

$\therefore 950x+24y+1=950\times2+24\times4+1=1997.$

练习一

A 组

1. 求一个四位数，它等于抹去它的首位数字后剩下的三位数的 3 倍减去 42.

2. 一个两位数，它的各位数字之和的 3 倍与这个数加起来所得的和恰好是原数的两个数码交换了位置后所得的两位数，满足这样条件的数有几个？分别写出它们.

3. 一个两位数，它是本身数字和的 k 倍，现将个位数字与十位数字调换位置组成一个新数，则新数为其数字和的（　）

(A) $(9-k)$倍.　　(B) $(10-k)$倍.

(C) $(11-k)$倍.　　(D) $(k-1)$倍.

4. 有一个五位数，前三位数字组成的三位数是后两位数的 5 倍，若将这个三位数移到这个两位数的后面，所得的新五位数比原五位数大 18648，求原来的五位数.

5. a,b,c,d 是数 0 或小于 10 的自然数，$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=1989$，则 $a=$____，$b=$____，$c=$____，$d=$____.

（1989 年“缙云杯”初中数学邀请赛试题）

6. 一个五位数$\overline{4x97x}$能被 3 整除，它的最末两位数字组成的数$\overline{7x}$能被 6 整除，求这个五位数.

7. 求全由奇数数字组成且能被 125 整除的最小六位数.

8. 如果一个三位数$\overline{xyz}$能被 9 整除，试说明三位数$\overline{zyx}$也能被 9 整除.

9. 在十进制中，各位数码是 0 或 1，并且能被 225 整除的最小自然数是____.（1989 年全国初中数学竞赛题）

10. 求由奇数数字组成且能被 9 整除的最小 7 位数.

B组

1. 如果十位数$\overline{1995xy5991}$能被 99 整除，其中 x、y 是未知数，则 $x=$____，$y=$____.

（第七届“五羊杯”初中数学竞赛初一试题）

2. 有一个四位数，把它从中间分成两半，得到前后两个二位数，将前面的二位数末尾添 0，然后加上前、后两个二位数的乘积，恰好等于原来的四位数，又知道原数的个位数字是 5，那么这个四位数是____.（1996 年江苏初中数学竞赛题）

3. $\overline{abcd}$是一个四位的自然数，已知$\overline{abcd}-\overline{abc}-\overline{ab}-a=1995$，试确定这个四位数.

（1995 年北京市初中数学竞赛初二试题）

4. 一个五位数，若前三个数字表示的三位数与后二个数字表示的两位数的和能被 11 整除，判断这个五位数能否被 11 整除，并说明理由.（1995 年重庆市等五市联赛初一试题）