高等学校试用教材

线性规划

薛嘉庆 编著

高等教育出版社

高等学校试用教材

线 性 规 划

薛嘉庆 编著

高等教育出版社

本书是根据全国高等工业学校应用数学专业教材委员会拟订的《线性规划教材纲要》编写而成的. 书中系统地讲述了线性规划的基本理论与方法，包括线性规划的数学模型、单纯形法及其变型、对偶理论与对偶算法、灵敏度分析与参数分析、运输问题和分解算法.

本书可作为应用数学专业的线性规划教材，也可供其它理工科有关专业大学生、研究生、教师和科技人员参考.

高等学校试用教材

线性规划

薛嘉庆 编著

*

高等教育出版社出版

高等教育出版社照排中心照排

新华书店北京发行所发行

北京市制本总厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12 字数 290 000

1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷

印数 0001—3 150

ISBN 7-04-002440-3/O·821

定价 2.90 元

前　言

本书是根据全国高等工业学校应用数学专业教材委员会拟订的《线性规划教材纲要》编写而成的. 可作为应用数学专业的线性规划教材，也可供其它理工科有关专业大学生、研究生、教师和科技人员参考.

在编写中考虑到以下几方面:

一、线性规划的基本理论和方法是比较成熟的，本书力争反映它的概貌，对涉及的内容形成完整的理论体系.

二、注重实际应用，对所讲的算法都作了详细的描述，基本算法配有框图，以便于编写程序. 本书末附有三个常用程序.

三、尽可能做到推理严谨，论述详尽，通俗易懂，便于教学和自学.

四、本教材分为基本内容和选学内容，分别可用36学时和14学时讲完. 在标题上加有▲的章节是选学内容，跳过这些部分不会影响基本内容的学习.

教材委员会编委、东北工学院谢绪恺教授审阅了本书的初稿，责任编委、上海交通大学胡毓达教授对稿件作了最后的审定，他们都提出了很好的改进意见，作者向他们表示衷心的感谢!

由于本人水平有限，书中错误和缺点在所难免，恳请读者批评指正.

作者于东北工学院数学系

符 号 说 明

min —— 求极小或极小化

max —— 求极大或极大化

s.t. —— "满足于"，是subject to 的缩写.

$\supset$ —— 包含

$\subset$ —— 被包含

$\cap$ —— 集合交运算符

$\setminus$ —— 集合减法运算符

$\varnothing$ —— 空集

$\forall$ —— "对于任意的"

$\in$ —— 属于

$\notin$ —— 不属于

R^n —— n 维向量空间

D —— 容许集

a —— 数量

$\mathbf{x}$ —— 向量

x_i 或 $(\mathbf{x})_i$ —— 向量 $\mathbf{x}$ 的第 i 分量

$\mathbf{e}_i$ —— 第 i 分量为 1,其它分量为零的单位向量

$\mathbf{e}$ —— 所有分量为 1 的向量

$\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$ —— 以 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 为端点的线段

$\mathbf{A}$ —— 矩阵

$\mathbf{B}$ —— 基矩阵

$\mathbf{I}$ —— 单位矩阵

rank $(\mathbf{A})$ —— 矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩

σ_j —— 变量 x_j 的判别数

$\mathbf{x}^*$ —— 最优解

$\mathbf{x}_B$ —— 基变量向量

$\mathbf{x}_N$ —— 非基变量向量

$[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ —— 以$x_1, x_2, \cdots, x_n$为分量的列向量

$[u_1, u_2, \cdots, u_n]$ —— 以$u_1, u_2, \cdots, u_n$为分量的行向量

$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n]$ —— 以$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$为列向量的矩阵

$\{a, b, \cdots, c\}$ —— 以$a, b, \cdots, c$为元素的集合

(λ_1, λ_2) —— 开区间

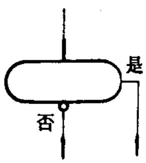
$[\lambda_1, \lambda_2]$ —— 闭区间

$\rightarrow$ —— “趋近于”

$\Rightarrow$ —— “推导出”

□ —— 论证或计算的结束

▲ —— 选学内容符号



—— 算法框图中的逻辑判断框. 带小圆圈的分支为“否”, 不带小圆圈的分支为“是”.

目　录

第一章　线性规划数学模型

§1.1 引　言

本世纪的三十年代末和四十年代初，也就是在第二次世界大战期间，随着现代工业、现代军事的迅速发展，在数学领域中出现了一门重要的应用数学学科，这就是运筹学．它是一门研究如何对具有多种可能方案的问题做出肯定决策的学科．运筹学发展到今日，有着广泛的内容．它包含规划论、排队论、对策论、存储论、图论、模型论、经济数学等．其中规划论是它的重要组成部分．规划论就是数学规划论，又称最优化，它包含线性规划、非线性规划、动态规划、整数规划、几何规划等．由此可见，线性规划仅仅是应用数学中的一个小分支．但是，它的实用性不容忽视．有人曾统计过，全世界电子计算机在数值计算方面（不包括数据处理）的大部分机时用于线性规划的求解上．足见线性规划在应用数学中的地位是多么重要了．

读者在微积分中学过求极大或求极小的问题．实际上，线性规划问题就是一种求极大或求极小的问题，只不过它的目标函数（即被求极大或求极小的 n 元函数）和约束函数（即自变量满足的隐函数关系）都是线性的．此外，约束中还包含有不等式．这种线性规划问题在工业、农业、商业、军事和经济管理等许多领域中都普遍地存在着．例如，使总运费最省的运输问题、生产的组织与计划问题、合理下料问题、最优配方问题等等都是常见的线性规划问题．线性规划问题的解（称为最优解）就是实际问题的最优方案．最优方案的实施就意味着，在同样条件下或者获得最大的经济效益，或者消耗最少的物质原料，或者处于最佳的生产状态．正因为如此，线性规划受到人们普遍的重视．

线性规划作为一门学科，早在本世纪三十年代末，Л. В.

Канторович (康托洛维奇，苏联数学家)等人从生产组织和运输问题等方面着手作了开拓性的研究[69]. 到 1947 年，G.B.Dantzig (美国数学家)首先给出了线性规划问题的一般求解方法 — 单纯形法，为线性规划理论奠定了基础. 从五十年代起随着电子计算机的普遍使用，线性规划理论日趋成熟，应用也日趋广泛.

目前，线性规划理论仍然向前发展着. 例如，面临大型线性规划问题 (即变量和约束个数在几百、几千以上的问题)，人们想构造出从理论上和实践上都比单纯形法还好的求解方法. Л.Г. Хачиян (哈奇扬，苏联数学家)在 1979 年，N.Karmarkar (印度数学家)在 1984 年先后构造出线性规划多项式时间算法就是重大的突破，他们的研究成果曾先后两次轰动运筹学界. 这方面的内容已超出本书的范围，感兴趣的读者可查阅第三章附注中指出的有关文献.

本书将讲述线性规划的基本方法及其理论. 只要有线性代数的基础，这门课程是比较容易学习和掌握的.

§1.2 实 际 问 题

实际中的线性规划问题有许多种类型. 这里仅列举三个典型问题.

1.2-1 成本最低问题

例 1.1 某精密仪器厂需要 P_1, P_2 两种金属各 432 公斤和 288 公斤，准备用三种不同的矿石 R_1, R_2, R_3 来冶炼. 矿石的成分 (即含 P_1 和 P_2 的百分数)和单价 (元／公斤)列于表 1.1 中. 问如何规划各种矿石的购买数量使成本最低. 试写出问题的数学模型.

解 设购买 R_1, R_2, R_3 矿石数量各为 x_1, x_2, x_3 (百公斤). 因为相应的单价是 180, 144, 100 (元／百公斤)，所以总成本是

$$z = 180\,x_1 + 144\,x_2 + 100\,x_3$$

目的是适当选取 x_1, x_2, x_3 使 z 取极小值. 但是这些变量受到如

下约束:

表 1.1

金属 \ 成分 \ 矿石	R_1	R_2	R_3	需要量(公斤)
P_1	12	16	0	432
P_2	15	8	10	288
矿石单价(元/公斤)	1.80	1.44	1.00	

(i) 购买来的各种矿石含有金属 P_1 的总量不能低于 432 (公斤). 根据表 1.1 的第 1 行数据可列出数学式为

$$12x_1+16x_2+0x_3 \geqslant 432$$

(ii) 购买来的矿石含有 P_2 的总量不能低于 288 (公斤). 根据表 1.1 的第 2 行数据可列出数学式为

$$15x_1+8x_2+10x_3 \geqslant 288$$

(iii) 所有变量都是非负的, 即 $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

于是得到如下数学模型:

$$\begin{aligned}
\min\quad & 180x_1+144x_2+100x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 12x_1+16x_2 \geqslant 432 \\
& 15x_1+8x_2+10x_3 \geqslant 288 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

□

(1.1)中的 min 是英文 minimize (求极小)的缩写, s.t. 是英文 subject to (满足于)的缩写. 上式表示求$180x_1+144x_2+100x_3$ (称为目标函数)的极小, 但要满足于在 s.t. 后面列出的所有数学式 (称为约束条件). 如果问题是求目标函数的极大, 则用 max 表示. max 是英文 maximize (求极大)的缩写.

1.2–2 生产利润最高问题

例 1.2 某工厂生产 n 种产品，每种产品都需要 m 道工序（见表 1.2）. 已知:

(1)第 j 种单位产品在第 i 道工序上加工所需要的工时是 a_{ij}；

(2)第 j 种单位产品的利润是 c_j；

(3)由于设备的限制，第 i 道工序每月最多可提供的总工时是 b_i .

问如何规划各种产品的数量，使得每获得的利润最高. 试写出问题的数学模型.

表 1.2

单位产品工时 \ 产品种类 \ 工序序号	1	2	…	j	…	n	每月最多总工时
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b
单位产品利润	c_1	c	…	c_j	…	c_n	

解 设用 x_j 表示每月生产第 j 种产品的数量. 因为第 j 种产品的单位利润是 c_j，所以这种产品获得的利润是 $c_j x_j$. 显然，总利润是 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n$.

约束条件有两类:

(i) 各工序总工时受到限制. 我们知道，生产数量为 x_j 的第 j 种产品所需第 i 道工序的工时为 $a_{ij}x_j$，而生产这 n 种产品所需第 i 道工序的总工时应为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. 按已知条件（3），这个和不超过

b_i，即 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$. 这类约束共有 m 个，令 $i=1,2,\cdots,m$ 即可得到.

(ii) 各变量是非负的，即 $x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n$.

综上所述，生产利润最高问题的数学模型是

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n \qquad \square$$

1.2－3 配料问题

例 1.3 设有 n 种原料，已知每种原料都含有 m 种成分，又知每种原料一个单位的成分含量如表 1.3 所示. 现在要用这 n 种原料配制一种产品，要求一个单位产品的各种成分含量依次等于 $b_1, b_2, \cdots, b_m$. 如果每种原料的单价分别为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，问如何配料才能使产品成本最低. 试列出数学模型.

表 1.3

成分＼成分含量＼原料	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	n	单位产品成分含量
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
原料单价	c_1	c_2	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	

解 设配制一个单位产品所需要的第 j 种原料为 x_j，显然其

成本为 $c_j x_j$. 我们追求的目标是总成本最低，即适当选取原料用量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 取极小值. 变量受到如下三类约束:

(i) $\sum_{j=1}^{n} x_j$ 等于一个单位;

(ii) 一个单位产品中第 i 种成分的含量为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$，要求它等于 b_i;

(iii) x_j 非负.

综上所述，配料问题的数学模型可表示成

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ & x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \qquad \square$$

§1.3 线性规划的几种形式

1.3-1 一般形式

由前节看到，线性规划有三个要素:

(1) 含有多个变量;

(2) 求这些变量组成的线性函数的极小或极大;

(3) 这些变量受到若干个线性约束的限制，这些约束通常用等式和不等式表示.

如用 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 表示变量，则线性规划的一般形式是

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{t} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{t} a_{pj} x_j \leqslant b_p, \quad p=1,2,\cdots,u \\
& \sum_{j=1}^{t} a_{qj} x_j \geqslant b_q, \quad q=u+1,\cdots,u+v \\
& \sum_{j=1}^{t} a_{rj} x_j = b_r, \quad r=u+v+1,\cdots,m \\
& \qquad x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,t
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

其中 $\sum_{j=1}^{t} c_j x_j$ 称为目标函数，$c_1, c_2, \cdots, c_t$ 称为价格系数. 其余各式称为约束. 用等式表示的约束称为等式约束；用不等式表示的约束称为不等式约束，其中 $x_j \geqslant 0$ 称为非负约束. 除非负约束之外的所有约束称为主约束. 在主约束中每个等号或不等号右边的数称为约束右端项. 在 (1.2)中共有 $m+t$ 个约束：有 u 个“小于等于”约束，有 v 个“大于等于”约束，有 $m-u-v$ 个等式约束，有 t 个非负约束.

定义 1.1 满足线性规划 (1.2)所有约束的 t 维向量 $[x_1, x_2, \cdots, x_t]^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划 (1.2)的容许解或容许点. 容许点的集合称为容许集.

定义 1.2 设用 D 表示线性规划 (1.2)的容许集. 若存在一点 $[x_1^*, x_2^*, \cdots, x_t^*]^{\mathrm{T}} \in D$，对于任意一点 $[x_1, x_2, \cdots, x_t]^{\mathrm{T}} \in D$ 都有

$$
\sum_{j=1}^{t} c_j x_j^* \leqslant \sum_{j=1}^{t} c_j x_j
$$

则称 $[x_1^*, x_2^*, \cdots, x_t^*]^{\mathrm{T}}$ 为线性规划 (1.2)的最优解或最优点. 目标函数在最优点处的取值 $\sum_{j=1}^{t} c_j x_j^*$ 称为最优值.

所谓求解线性规划是指，在容许集上找一点，使得目标函数在这一点的取值成为容许集上的极小值（或极大值）.

1.3－2 标准形式和典范形式

线性规划若呈现为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ & x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{1.3}$$

则称为标准形式，或称（1.3）为标准线性规划，其中 $m \leqslant n$. 这里是求目标函数的极小，而不是求极大. 实际上，求极小与求极大是可以互相转化的. 我们知道，函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $[x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*]^{\mathrm{T}}$ 处取极大值的充要条件是 $-f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在该点处取极小值. 因此，遇有求极大的线性规划，把目标函数反号，约束不变，就转化为求极小的线性规划了. 这两个线性规划具有相同的最优解，但最优值反号（习题 1.4）.

为了简便，经常把标准形式（1.3）写成如下的向量、矩阵形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_m]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$