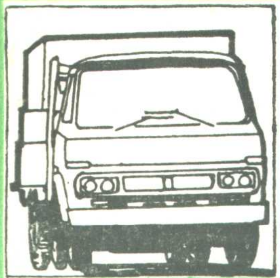
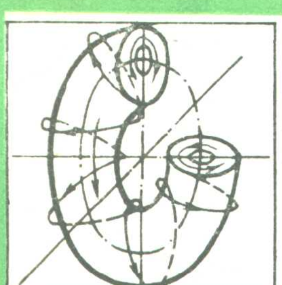
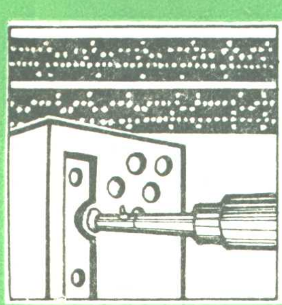
高等学校试用教材



弹性和塑性力学中的有限单元法

浙江大学 谢贻权 何福保 主编





机械工业出版社

高等学校试用教材

弹性和塑性力学中的有限单元法

浙江大学 谢贻权 何福保 主编

机械工业出版社

弹性和塑性力学中的有限单元法

浙江大学 谢贻权 何福保 主编

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
北京市密云县印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 14 3/4·字数 362 千字
1981 年 8 月北京第一版·1983 年 3 月北京第三次印刷
印数 8 601—18,600·定价 1.55 元

*

统一书号：15033·5049

前　言

本书按照1978年4月在天津召开的高等学校一机部对口专业会议及同年10月在杭州召开的固体力学专业教材会议上所审订的大纲编写的。

自从1960年Clough提出"有限单元法"的名称以来，有限单元法的研究工作蓬勃发展。它不仅已经成为结构分析中必不可少的工具，而且能够应用于连续体力学的各类问题而成为现象分析的一种手段。本书只限于讨论弹性和塑性力学问题范围内的有限单元法。

在我国，有限单元法的应用和研究，已受到普遍重视。目前，各高等学校的力学专业和部分工科专业都开设了这门课程。但是，比较全面地系统介绍有限单元法的书比较少，适用于机械类力学专业的教本则更感缺乏。为了能有一本适合于机械类力学专业的有限单元法的教材，我们在这里作了一次尝试。

我们在编写中，按照大纲要求，结合以往的教学经验，力求做到由浅入深，难点分散，循序渐进，从物理概念上说明问题。通过各章的工程实例来说明有限单元法的实际应用。本书未引入典型程序和计算实习方面的内容，读者可根据各自的情况，采用合适的计算程序。

全书共十二章，内容分三部分：即基本部分、专题部分和提高部分。第1～5章为基本部分；第6～8章为专题部分；第9～12章为提高部分。书的内容比较广泛，在讲授中可以根据专业需要作适当的选择。在深度上还有一定的伸缩性，所以既能适用于机械类力学专业的本科生，也可供一般工科专业的本科使用。本书也可作为研究生的参考用书。

本书由浙江大学谢贻权教授、何福保副教授主编；西安交通大学嵇醒副教授主审。书中第一、二、三章由谢贻权同志编写；第四、五、七、八章由丁皓江副教授编写；第九、十章由徐兴同志编写；第六、十一、十二章由何福保同志编写。嵇醒同志认真而详细地审阅了全部稿件，并提出许多宝贵意见。本书责任编辑孙祥根同志对本书内容亦提供了修订意见。在此一并表示感谢。

由于水平有限，经验不足，书中难免有错误和不妥之处，望给予批评指正。

目　录

第一章 绪 论

有限单元法是在高速电子数字计算机的应用日益普及，数值分析在工程中的作用日益增长的背景下发展起来的。虽然这一方法起源于结构分析，但是，由于它所依据的理论的普遍性，已经能够成功地用来求解其他工程领域中的许多问题。

§1-1 引 言

有限单元法是适应使用电子计算机而发展起来的一种比较新颖和有效的数值方法。

这个方法在50年代起源于航空工程中飞机结构的矩阵分析。结构矩阵分析法认为：整体结构可以看作是由有限个力学小单元互相连结而组成的集合体；每个单元的力学特性可以比喻作建筑物中的砖瓦，装配在一起就能提供整体结构的力学特性。

这种处理问题的思路，在1960年被推广用来求解弹性力学的平面应力问题，并且开始采用"有限单元法"这个术语。然而，对于一个连续体，实际上是由无限多个单元所组成的，这就使得实现数值解发生了困难。克服这个困难的办法是把连续体离散化，然后借用结构矩阵分析的方法来处理。首先，假想把连续体分割成数目有限的小块体(称为有限单元或简称单元)，彼此间只在数目有限的指定点（称为结点）处相互连结，组成一个单元的集合体以代替原来的连续体；又在结点上引进等效力以代替实际作用于单元上的外力。其次，对于每个单元根据分块近似的思想，选择一个简单的函数来近似地表示其位移分量的分布规律，并按弹、塑性理论中的变分原理建立单元结点力和位移之间的关系。最后，把所有单元的这种特性关系集合起来，就得到一组以结点位移为未知量的代数方程组，由这方程组就可以求出物体上有限个离散结点上的位移分量。有限单元法实质上就是把具有无限个自由度的连续体，理想化为只有有限个自由度的单元集合体，使问题简化为适合于数值解法的结构型问题。因此，只要确定了单元的力学特性，就可按结构分析的方法来求解，使得分析过程大为简化。但是，随着物体单元的细分，需要处理的数据数量十分庞大，用手工是难以完成的，因而必须求助于电子计算机。

根据以上的论述可知，有限单元法与经典的解析法不同。在经典的解析法中，通常都是从研究连续体中微元体的性质着手，在分析中容许微元体的数目无限多而它的大小趋近于零，从而得到描述弹性体性质的偏微分方程，求解微分方程可以得到一个解析解。这种解是一个数学表达式，它给出物体内每一点上所要求的未知量的值。然而，对于大多数工程实际问题，由于物体几何形状的不规则，材料的非线性或不均匀等原因，要得到问题的解析解，往往是十分困难的。有限单元法则是从研究有限大小的单元力学特性着手，最后得到一组以结点位移为未知量的代数方程组。应用现成的计算方法，总是可以得到在结点处需求未知量的近似值。

有限单元法具有很多优点，其中主要的优点有：

(1) 概念浅显，容易掌握，可以在不同的水平上建立起对该法的理解。我们可以通过非常

直观的物理途径来学习和运用这一方法，也可以为该法建立严格的数学解释。

(2) 该法有很强的适用性，应用范围极为广泛。它不仅是能成功地处理如应力分析中的非均质材料、各向异性材料、非线性应力-应变关系以及复杂边界条件等难题；而且随着其理论基础和方法的逐步改进和完善，还成功地用来求解如热传导、流体力学以及电磁场领域的许多问题。现在，它几乎适用于求解所有的连续介质和场问题。

(3) 该法采用矩阵形式的表达，便于编制计算机程序，可以充分利用高速电子计算机所提供的方便。因而，有限单元法已被公认为应力分析的有效工具而受到普遍的重视。

在用有限单元法求解应力分析问题中，并不是一定要取结点位移作为基本未知量，也可以取结点力作为未知量。因而，随着所取未知量的不同，有所谓位移法、力法和混合法。本书采用最为普遍的位移法，介绍弹性和塑性力学中有限单元法的基本理论和方法。

§1-2 一个简例

在讨论连续体问题之前，我们先来考察一个简单的例子，以说明如何确定单元的力学特性以及怎样从单元特性集合得到结构特性(力——位移关系)的概念。图 1-1 中为一个由两根杆件组成的桁架。杆件的截面积都为 A，弹性模量为 E，长度分别为 l_1 和 l_2。桁架的铰链处受到的外力分别为 X_1、Y_1、X_2、Y_2、X_3、Y_3。设取每根杆件作为一个单元，各杆端部的铰链作为结点。现在来确定单元 1 的结点力和结点位移的关系。在图 1-1 b 中 U_1^1、V_1^1、U_2^1、V_2^1 分别为结点 1、2 施于单元 1 的结点力沿坐标轴 x 和 y 方向的分量；u_1^1、v_1^1、u_2^1、v_2^1 分别为结点 1、2 的位移沿坐标轴 x 和 y 方向的分量。这里上标表示单元的号码，下标表示结点的号码。

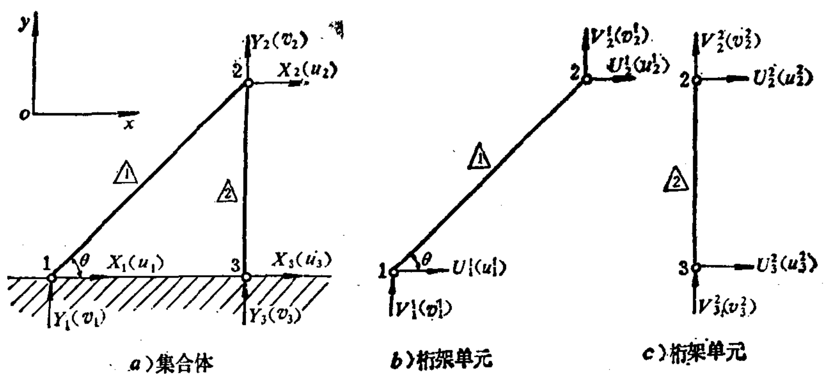


图 1-1 铰接桁架

因为杆件在结点处是铰接的，它不存在力矩。每个结点的力和位移各有两个分量，即每个结点具有两个自由度，全单元共有四个自由度，因此需要用以下四个方程来描述它的力——位移关系

$$
\begin{aligned}
U_1^1 &= k_{11}u_1^1 + k_{12}v_1^1 + k_{13}u_2^1 + k_{14}v_2^1 \\
V_1^1 &= k_{21}u_1^1 + k_{22}v_1^1 + k_{23}u_2^1 + k_{24}v_2^1 \\
U_2^1 &= k_{31}u_1^1 + k_{32}v_1^1 + k_{33}u_2^1 + k_{34}v_2^1 \\
V_2^1 &= k_{41}u_1^1 + k_{42}v_1^1 + k_{43}u_2^1 + k_{44}v_2^1
\end{aligned}
\tag{1-1}
$$

采用矩阵记号写成：

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ V_1^1 \\ U_2^1 \\ V_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix} \tag{1-2}$$

或简记作

$$\{R\}^1 = [k]^1 \{\delta\}^1 \tag{1-3}$$

式中 $\{\delta\}^1=[u_1^1\ v_1^1\ u_2^1\ v_2^1]^T$ 称为单元1的结点位移列阵；$\{R\}^1=[U_1^1\ V_1^1\ U_2^1\ V_2^1]^T$ 称为单元1的结点力列阵；$[k]^1$ 称为单元1的刚度矩阵(亦称劲度矩阵)；它的元素 k_{11}、k_{12}、k_{13}、$\cdots k_{44}$ 称为刚度系数。

刚度系数的物理意义可以说明于下。若令(1-1)各式中的

$$u_1^1=1$$

$$v_1^1=u_2^1=v_2^1=0$$

则得

$$U_1^1=k_{11} \quad V_1^1=k_{21} \quad U_2^1=k_{31} \quad V_2^1=k_{41}$$

它们表明，当结点1沿 x 方向产生一单位位移，而同时约束住单元1的所有其余的结点位移时，各结点施于单元1上的力(图1-2)。这些力组成一个平衡力系，它们表示单元1抵抗位移 u_1^1 的刚度。这些力的值很容易根据材料力学求得：当位移 $u_1^1=1$，其余结点位移都等于零时，单元的长度将缩短 $\Delta l_1=\cos\theta$，于是需要轴向压力为 $\left(\frac{EA}{l_1}\right)\Delta l_1=EA\cos\theta/l_1$；这就是结点1作用于单元1上的力，它在 x 和 y 方向的分量分别是

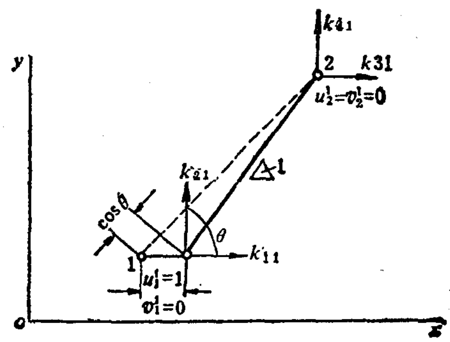


图1-2 $u_1^1=1$, $v_1^1=u_2^1=v_2^1=0$ 状态下的单元1

$$k_{11}=\frac{EA}{l_1}\cos^2\theta$$

$$k_{21}=\frac{EA}{l_1}\cos\theta\cdot\sin\theta$$

对于结点2作用于单元1上的力，它的大小与之相等而方向相反，即

$$k_{31}=-\frac{EA}{l_1}\cos^2\theta$$

$$k_{41}=-\frac{EA}{l_1}\cos\theta\cdot\sin\theta$$

继续对位移 v_1^1、u_2^1、v_2^1 作类似的分析，便可得到 $[k]^1$ 中其他各列的元素。将所有的结果汇集一起，得到

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ V_1^1 \\ U_2^1 \\ V_2^1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l_1} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix}$$

可见(1-3)式中，单元1的刚度矩阵是

$$[k]^1=\frac{EA}{l_1}\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta\\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{1-4}$$

同理可以求得作用于单元2的结点力和位移之间的关系如下

$$\begin{Bmatrix}U_2^2\\V_2^2\\U_3^2\\V_3^2\end{Bmatrix}=\frac{EA}{l_2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2^2\\v_2^2\\u_3^2\\v_3^2\end{Bmatrix}$$

于是单元2的刚度矩阵是

$$[k]^2=\frac{EA}{l_2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix} \tag{1-5}$$

两个单元的力——位移关系可加以集合得到结构的力——位移关系。为此，引进图1-1中结构的结点位移分量 u_1、v_1、u_2、v_2、u_3、v_3 和单元结点位移分量 u_1^i、v_1^i、u_2^i、v_2^i（其中上标 $i=1$ 或 2 表示单元的号码）之间的协调关系如下

$$u_1=u_1^1 \qquad v_1=v_1^1$$

$$u_2=u_2^1=u_2^2 \quad v_2=v_2^1=v_2^2 \quad u_3=u_3^2 \quad v_3=v_3^2$$

又根据各结点的平衡条件，要求作用在各结点上的载荷应等于围绕该结点的单元受到的结点力之和，即

$$X_1=U_1^1=\frac{EA}{l_1}(\cos^2\theta\,u_1+\cos\theta\sin\theta\,v_1-\cos^2\theta\,u_2-\cos\theta\sin\theta\,v_2)$$

$$Y_2=V_1^1=\frac{EA}{l_1}(\cos\theta\sin\theta\,u_1+\sin^2\theta\,v_1-\cos\theta\sin\theta\,u_2-\sin^2\theta\,v_2)$$

$$X_2=U_2^1+U_2^2=\frac{EA}{l_1}(-\cos^2\theta\,u_1-\cos\theta\sin\theta\,v_1+\cos^2\theta\,u_2+\cos\theta\sin\theta\,v_2)$$

$$Y_2=V_2^1+V_2^2=\frac{EA}{l_1}(-\cos\theta\sin\theta\,u_1-\sin^2\theta\,v_1+\cos\theta\sin\theta\,u_2+\sin^2\theta\,v_2)+\frac{EA}{l_2}(v_2-v_3)$$

$$X_3=U_3^2=0$$

$$Y_3=V_3^2=\frac{EA}{l_2}(-v_2+v_3)$$

这些方程就是结构的力——位移关系。写成矩阵形式，有

$$\begin{Bmatrix}X_1\\Y_1\\X_2\\Y_2\\X_3\\Y_3\end{Bmatrix}=EA\begin{bmatrix}\cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0\\ \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & 0 & 0\\ -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0\\ -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1+1/l_2 & 0 & -1/l_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & 1/l_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\\u_3\\v_3\end{Bmatrix} \tag{1-6}$$

或简写成

$$\{R\}=[K]\{\delta\} \tag{1-7}$$

这就是有限单元法所要建立的基本方程组。式中 $\{R\}$ 为作用在结点上的载荷组成的列阵，称为载荷列阵；$\{\delta\}$ 是由基本未知量结点位移所组成的列阵；矩阵 $[K]$ 称为结构的整体刚度矩阵，由(1-6)式可知

$$[K]=EA\begin{bmatrix} \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0 \\ \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & 0 & 0 \\ -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta+1/l_2 & 0 & -1/l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & -1/l_2 \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

建立整体刚度矩阵是运用有限单元法解题的核心内容，一旦建立了整体刚度矩阵，就等同于列出了有限单元法的基本方程组。结构的整体刚度矩阵是由单元的刚度矩阵叠加组成的。观察(1-8)式可以看出，其中左上方虚线划出的正是单元 1 的刚度矩阵，右下方虚线划出的正是单元 2 的刚度矩阵，而两个长方形重叠部分中的元素，系同位置上两个单元刚度矩阵的元素之和。因而，建立整体刚度矩阵的问题，又回到先要分析单元的特性，求出单元的刚度矩阵。

结构的整体刚度矩阵具有许多特性。首先，根据马克斯威尔互换定理可以证明，它是一个对称矩阵。又对角线上的主元素 k_{ii} 总是正的，否则作用力的方向将与它引起的对应位移的方向相反。再根据行列式的性质可以知道，矩阵 $[K]$ 的对应行列式的值等于零，所以它是奇异的。此时，方程组(1-6)还不能立即用来求解结点位移，其物理原因是结构的几何约束尚未设置，可能产生刚体位移。只有加上几何边界条件，对刚度矩阵加以修改，排除刚体位移后，才能解出全部位移分量。

以上我们通过这一简单的例子，说明了刚度矩阵的物理意义和它的性质以及从单元刚度矩阵集合成整体刚度矩阵的概念。这些性质带有普遍性，可以推广到连续体问题中去，这将在第二章中进一步加以讨论。

§1-3 有限单元法分析过程的概述

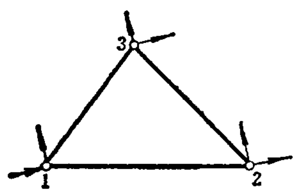
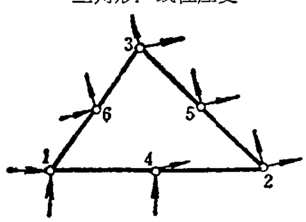
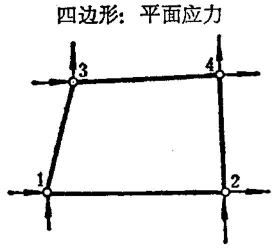
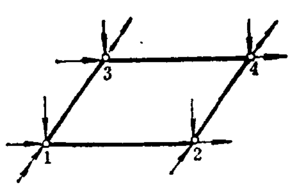
通过上节介绍的简单例子，我们对有限单元法取得了一个粗略的概貌。现在再把有限单元法的分析过程概述于下，以便学习和理解以后各章的内容。

有限单元法的分析过程，概括起来可以分为以下六个步骤。

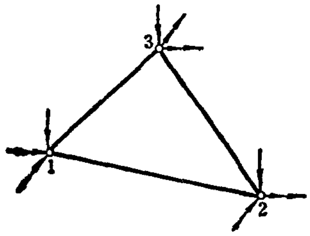
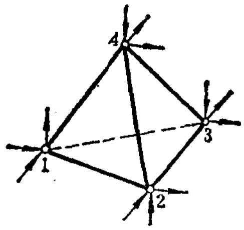
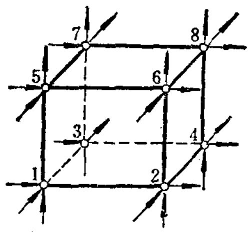
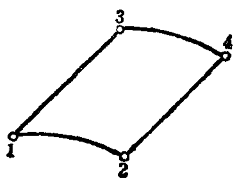
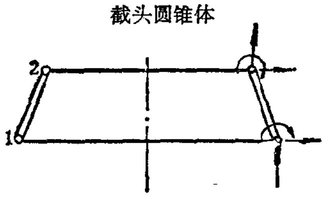
1．结构的离散化

结构的离散化是有限单元法分析的第一步，它是有限单元法的基础。所谓离散化的过程简单地说，就是将分析的结构物划分成有限个单元体，并在单元体的指定点设置结点，把相邻的单元体在结点处连接起来组成单元的集合体，以代替原来的结构。如果分析的对象是上节所举的桁架，那末这种划分是十分明显的，可以取每根杆件作为一个单元，因为桁架本来就是由杆件相互连接 [illegible] 但如果分析的对象是连续体，那末为了有效地逼近实际的连续体，就有选择单元的形 [illegible] 分方案等问题需要考虑。有关这方面的具体讨论将

表 1-1 若干典型单元类型一览表①

单　　元	典 型 应 用	结　点　数	每个结点的自由度数
杆 	桁　架	2	1
	平面刚架	2	3
三角形：常应变 	平面应力	3	2
三角形：线性应变 	平面应力	6	2
四边形：平面应力 	平面应力	4	2
矩形：弯曲 	板 弯 曲	4	3

（续）

单　　　　　　元	典 型 应 用	结　点　数	每个结点的自由度数
三角形：弯曲 	板弯曲	3	3
四　面　体 	三维应力	4	3
棱　柱　体 	三维应力	8	3
矩形壳单元 	圆柱壳瓦楞板	4	5～6
截头圆锥体 	轴对称壳体	2	3
环三角形截面 	轴对称实体	3	2

① 取自“有限单元法在应力分析中的应用” I. Holand K. Bell(凌复华译)，国防工业出版社，1978，第7～9页。

在§2-8中叙述。表1-1中给出若干常用的典型单元。

2．选择位移模式

在结构的离散化完成之后，就可以对典型单元进行特性分析。此时，为了能用结点位移表示单元体的位移、应变和应力，在分析连续体问题时，必须对单元中位移的分布作出一定的假定，也就是假定位移是坐标的某种简单的函数，这种函数称为位移模式或位移函数。

位移函数的适当选择是有限单元法分析中的关键。在有限单元法应用中，普遍地选择多项式作为位移模式。其原因是因为多项式的数学运算(微分和积分)比较方便，并且由所有光滑函数的局部看来都可以用多项式逼近，即所谓不完全的泰勒级数。至于多项式项数和阶次的选择则要考虑到单元的自由度和有关解的收敛性要求。一般说来，多项式的项数应等于单元的自由度数，它的阶次应包含常数项和线性项。详细的讨论见后面§2-7。

根据所选定的位移模式，就可以导出用结点位移表示单元内任一点位移的关系式，其矩阵形式是

$$\{f\}=[N]\{\delta\}^e \tag{a}$$

式中 $\{f\}$ 为单元内任一点的位移列阵；$\{\delta\}^e$ 为单元的结点位移列阵；$[N]$ 称为形函数矩阵，它的元素是位置坐标的函数。

在此，我们顺便指出：有限单元法比起经典的近似法具有明显的优越性。例如，在经典的里兹法中，要求选取一个函数来近似地描述整个求解区域中的位移，并须满足边界条件；而在有限单元法中则采用分块近似，只需对一种单元选择一个近似位移函数。此时，不必考虑位移边界条件，只须考虑单元之间位移的连续性就可以了。这样做当然比起在整个区域中选取一个连续函数要简单得多，特别是对于复杂的几何形状或者材料性质。对于作用载荷有突变的结构，采用分段函数，比起采用连续性较强的整段函数来近似精确的位移函数更为适宜。

3．分析单元的力学特性

位移模式选定以后，就可以进行单元力学特性的分析。它包括下面三部分内容。

(1) 利用几何方程，由位移表达式(a)导出用结点位移表示单元应变的关系式

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e \tag{b}$$

式中 $\{\varepsilon\}$ 是单元内任一点的应变列阵，$[B]$ 称为单元应变矩阵。

(2) 利用物理方程，由应变的表达式(b)导出用结点位移表示单元应力的关系式

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e \tag{c}$$

式中 $\{\sigma\}$ 是单元内任一点的应力列阵；$[D]$ 是单元材料有关的弹性矩阵。

(3) 利用虚功原理建立作用于单元上的结点力和结点位移之间的关系式，即单元的刚度方程

$$\{R\}^e=[k]\{\delta\}^e \tag{d}$$

式中 $[k]$ 称为单元刚度矩阵，在以后将导得

$$[k]=\iiint[B]^T[D][B]\,dx\,dy\,dz \tag{e}$$

上式的积分应遍及整个单元的体积。

在以上三项中，导出单元刚度矩阵是单元特性分析的核心内容。

4．计算等效结点力

弹性体经过离散化后，假定力是通过结点从一个单元传递到另一个单元，但是作为实际的

连续体，力是从单元的公共边界传递到另一个单元的。因而，这种作用在单元边界上的表面力以及作用在单元上的体积力、集中力等都需要等效移置到结点上去，也就是用等效的结点力来替代所有作用在单元上的力。移置的方法是按照作用在单元上的力与等效结点力，在任何虚位移上的虚功都相等的原则(下称虚功等效)进行的，具体的计算将在以后介绍。

5．集合所有单元的刚度方程，建立整个结构的平衡方程

这个集合过程包括有两方面的内容。一是由各个单元的刚度矩阵集合成整个物体的整体刚度矩阵；二是将作用于各单元的等效结点力列阵集合成总的载荷列阵。最常用的集合刚度矩阵的方法是直接刚度法。一般来说，集合所依据的理由是要求所有相邻的单元在公共结点处的位移相等。于是得到以整体刚度矩阵 $[K]$、载荷列阵 $[R]$ 以及整个物体的结点位移列阵 $\{\delta\}$ 表示的整个结构的平衡方程

$$[K]\{\delta\}=\{R\} \tag{f}$$

这些方程还应在考虑了几何边界条件，作适当的修改之后，才能够解出所有的未知结点位移。

6．求解未知结点位移和计算单元应力

由集合起来的平衡方程组(f)，解出未知位移。在线性平衡问题中，可以根据方程组的具体特点选择合适的计算方法。对于非线性问题，则要通过一系列的步骤，并逐步修正刚度矩阵或载荷列阵，才能获得解答。

最后，就可利用公式(c)和已求出的结点位移来计算各单元的应力，并加以整理得出所要求的结果。

第二章　平 面 问 题

用有限单元法解弹性力学平面问题，不仅本身具有实际意义，而且还带有一定的典型性。本章将通过三角形常应变单元，介绍有限单元法应用于弹性体应力分析的基本原理和方法。包括弹性体的离散化、单元特性的分析、刚度矩阵的建立、等效结点力的计算、解答的收敛性，以及实施步骤和注意事项等。同时对形函数和面积坐标的性质也作了简要的叙述。

本章对另一个常用的八个自由度的矩形单元也作了扼要的介绍。

§2-1　三角形常应变单元

一、离散化

用有限单元法分析弹性力学平面问题，第一步就是把原来连续的弹性体离散化。设我们采用三角形单元，把弹性体划分为有限个互不重叠的三角形。这些三角形在其顶点（即结点）处互相连接，组成一个单元集合体，以代替原来的弹性体(图 2-1)。

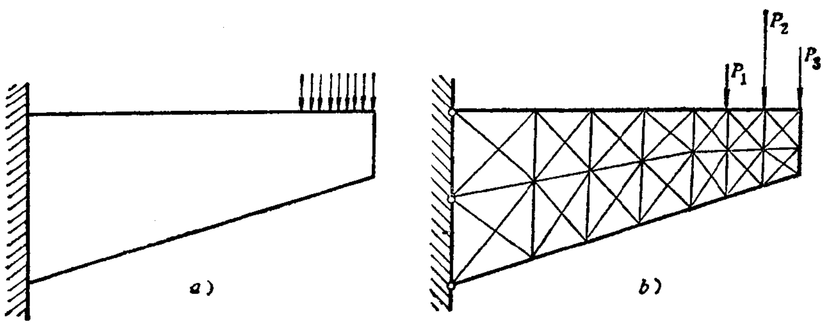


图 2-1　弹性体和有限单元模型

所有作用在单元上的载荷，包括集中载荷、表面载荷和体积载荷，都按虚功等效的原则移置到结点上，成为等效结点载荷(移置方法见 § 2-4)。这样就得到了有限单元的计算模型。

完成单元划分后，就对所有的单元和结点从 1 开始按序加以编号。

二、位移

从现在开始，我们来分析一个典型三角形单元的力学特性。首先建立以单元结点位移表示单元内各点位移的关系式。设单元 e 的结点号码为 i、j、m，见图 2-2。每个结点在其单元平面内的位移可以有两个分量，整个单元将有六个结点位移分量。可用列阵表示为

$$\{\delta\}^e=[\delta_i^T \quad \delta_j^T \quad \delta_m^T]^T=[u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T \tag{2-1}$$

其中子矩阵

$$\{\delta_i\}=[u_i \quad v_i]^T \qquad\qquad (i,\ j,\ m)^{\ominus} \tag{a}$$

⊖ 记号 $(i,\ j,\ m)$ 表明其他结点的位移分量 u_j、v_j、u_m、v_m 可以按下标 i、j、m 的轮换得到。以后将经常采用这种记号。

式中　u_i、v_i 是结点 i 在 x 轴和 y 轴方向的位移。

由于单元体也是一个二维的弹性体，单元内各点的位移分量是坐标 x、y 的函数，在进行有限元分析时，需要假定一个位移模式。按此位移模式，单元内各点的位移可以由单元结点位移通过插值来获得。这里，我们选择的是最简单的线性函数，即

$$u=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y \quad v=\alpha_4+\alpha_5x+\alpha_6y \tag{b}$$

式中　α_1、α_2、$\cdots\alpha_6$ 是待定常数，它可以确定于下。

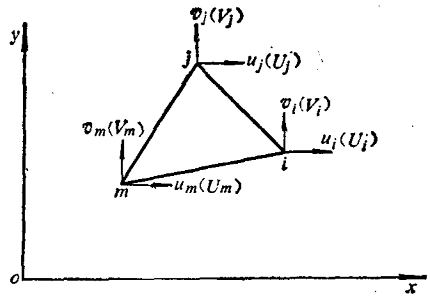


图 2-2　三角形单元的结点位移和结点力

设结点 i、j、m 的坐标分别为 $(x_i,\ y_i)$、$(x_j,\ y_j)$、$(x_m,\ y_m)$，将它们代入(b)式，得

$$\begin{aligned}
u_i&=\alpha_1+\alpha_2x_i+\alpha_3y_i \qquad & v_i&=\alpha_4+\alpha_5x_i+\alpha_6y_i\\
u_j&=\alpha_1+\alpha_2x_j+x_3y_j \qquad & v_j&=\alpha_4+\alpha_5x_j+\alpha_6y_j\\
u_m&=\alpha_1+\alpha_2x_m+\alpha_3y_m \qquad & v_m&=\alpha_4+\alpha_5x_m+\alpha_6y_m
\end{aligned} \tag{c}$$

联列解(c)式左边的三个方程，可以求得

$$\alpha_1=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i\\ u_j & x_j & y_j\\ u_m & x_m & y_m\end{vmatrix} \qquad \alpha_2=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i\\ 1 & u_j & y_j\\ 1 & u_m & y_m\end{vmatrix} \qquad \alpha_3=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i\\ 1 & x_j & u_j\\ 1 & x_m & u_m\end{vmatrix} \tag{d}$$

其中

$$2\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix} \tag{2-2}$$

从解析几何知，(2-2)式中的 Δ 等于三角形 i、j、m 的面积。为使求得面积的值不致成为负值，结点 i、j、m 的次序必须是逆时针转向，如图 2-2 中所示。

将(d)式代入(b)式中的第一式，并稍加整理，得到

$$u=\frac{1}{2\Delta}[(a_i+b_ix+c_iy)u_i+(a_j+b_jx+c_jy)u_j+(a_m+b_mx+c_my)u_m] \tag{e}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_i&=\begin{vmatrix} x_j & y_j\\ x_m & y_m\end{vmatrix}=x_jy_m-x_my_j\\
b_i&=-\begin{vmatrix} 1 & y_j\\ 1 & y_m\end{vmatrix}=y_j-y_m \qquad (i,\ j,\ m)\\
c_i&=\begin{vmatrix} 1 & x_j\\ 1 & x_m\end{vmatrix}=-(x_j-x_m)
\end{aligned} \tag{2-3}$$

同理得到

$$v=\frac{1}{2\Delta}[(a_i+b_ix+c_iy)v_i+(a_j+b_jx+c_jy)v_j+(a_m+b_mx+c_my)v_m] \tag{f}$$

如令

$$N_i=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_ix+c_iy) \qquad (i,\ j,\ m) \tag{2-4}$$

位移模式(e)、(f)就可以写成

$$\begin{aligned}
u&=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m\\
v&=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m
\end{aligned} \tag{2-5}$$

上两式可合并写成矩阵形式如下