

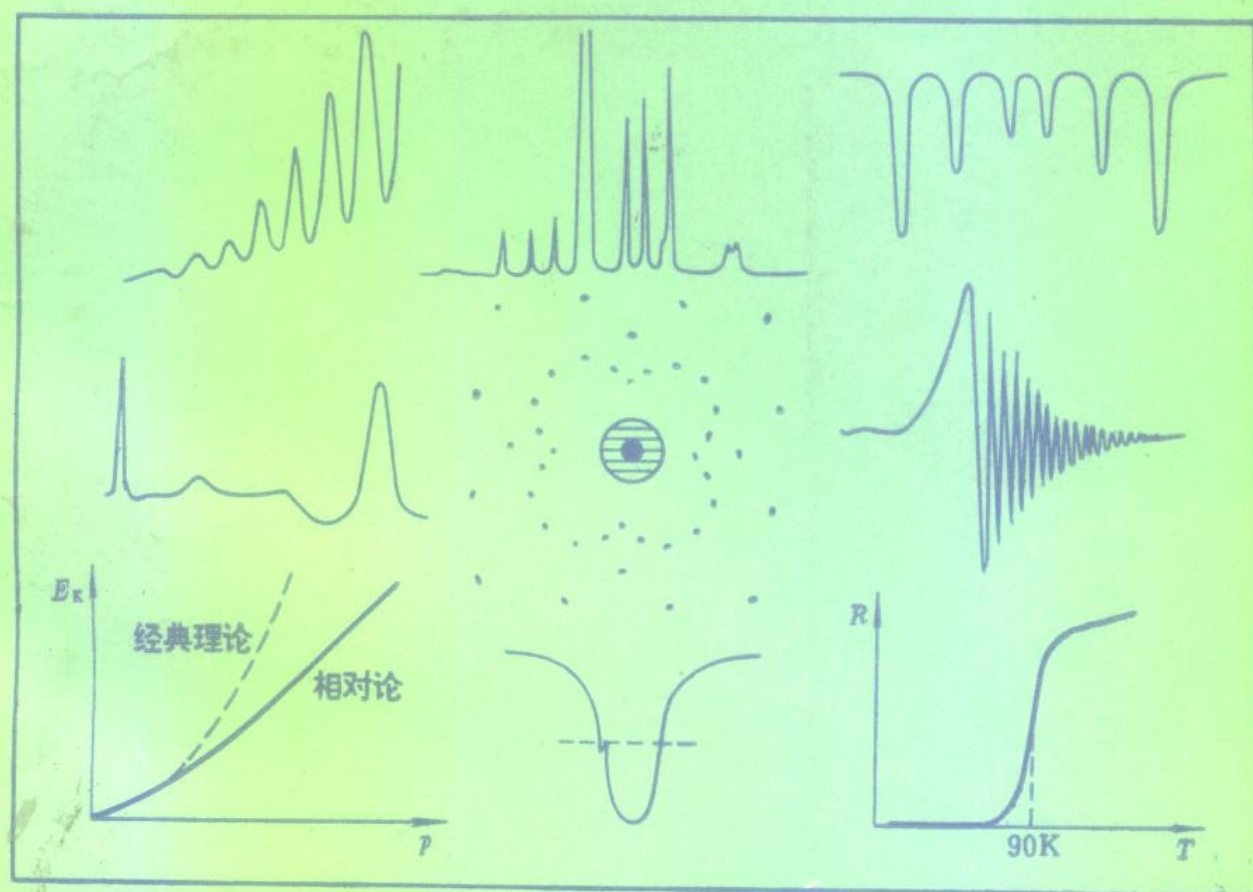
第一版获全国第二届教材优秀奖

近代物理实验

(第二版)

北京大学物理系近代物理实验室

吴思诚 王祖铨 主编



北京大学出版社

380632

近代物理实验

(第二版)

北京大学物理系近代物理实验室

吴思诚 王祖铨 主编



北京大学出版社

新登字(京)159号

021136 10

书 名: 近代物理实验 (第二版)

责 任 者: 吴思诚、王祖铨

标准书号: ISBN 7-301-00216-5/O·47

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京大学校内

邮政编码: 100871

排 印 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787×1092毫米 16开本 31.25印张 700千字

1995年一月第一版 1995年一月第一次印刷

印数: 00001—3500册

定 价: 28.50元

内 容 简 介

本书是在北京大学物理系近代物理实验室1978年恢复、重建以来开设的近代物理实验课程基础上,参照1980年教育部召开的全国综合性大学物理系“近代物理实验”课程设置和教材编写会议制定的教学大纲编写的,全书包括原子物理、核探测技术及应用、光学、真空技术、X射线和电子衍射、磁共振、微波、低温物理、半导体物理等方面十个单元。第二版包括基本实验30个,选做实验14个。

本书可作为高等院校物理专业本科生和其他专业本科生或研究生的近代物理实验课程的教学参考书,也可供从事实验物理的科技人员参考。

序 言

我国“近代物理实验”的教学实践是从1952年以后开始的。在实施新的物理系的统一教学计划后,在过去“近代物理实验”和“无线电实验”的基础上,参照和采用苏联Г.В.斯皮瓦克编写的《专门物理实验》一书中的部分实验,建立了“中级物理实验”课程,以后各校都曾根据自己的条件和经验有所发展,到60年代中已形成我国自己的“中级物理实验”的教学内容和方法。在60年代后期与70年代期间各校的中级物理实验室和教学均受到很大的破坏。1980年教育部在北京召开了综合性大学物理系“近代物理实验”课程的设置和教材会议,讨论了“近代物理实验”在物理系整个实验教学中的地位 and 作用、实验的目的和要求,并提出迅速恢复和发展近代物理实验室和实验教学的具体要求和措施,希望加强校际交流以促进“近代物理实验”教学水平的尽快提高。教育部领导制定的“近代物理实验”教学大纲就是在1980年会议所提出的原则基础上产生的。从那时以后,各校均组织师资和实验技术力量大力恢复和发展这门实验课程,而且在综合性大学和高等师范院校范围内已召开了三次全国性的“近代物理实验”教学经验交流会,促进各校相互学习、取长补短,在实验室的建设、教学仪器的研制、教学内容及方法的改革和创新、师资和实验技术人员的培养等方面均取得前所未有的成绩。在这期间一些院校还编写了自己的“近代物理实验”教材相互交流,但至今尚未出版一本正式的“近代物理实验”参考书。

“近代物理实验”是继“普通物理实验”和“无线电电子学实验”后一门重要的基础实验课程,在物理专业的整个实验教学中起着承上启下的作用。与普通物理实验不同,近代物理实验所涉及的物理知识面很广,具有较强的综合性和技术性。它在丰富和活跃学生的物理思想,锻炼他们对物理现象的洞察能力,引导他们了解实验物理在物理学发展过程中的作用,正确认识新物理概念的产生、形成和发展的过程,培养严谨的科学作风,学会近代物理中的一些基本实验技术和方法等方面都是非常重要的。可以说,“近代物理实验”是培养学生的独立工作能力,学习如何用实验方法研究物理现象和规律的关键性的一环。所以教师在近代物理实验的教学过程中,应当引导学生明确这门实验课程的目的、要求,注意实验中的物理思想、实验方法并加强实验技能的锻炼。

“近代物理实验”教学大纲所规定的教学指导思想和原则,经这几年的教学实践证明它是正确的。但“近代物理实验”作为物理系教学计划中一门基础的实验课程,它的内容选择和各校所实施的物理专业教学计划中上面和下面的实验课程有密切关系。如何上下衔接取决于各校的具体情况和条件,它的实验内容和教学方法应当具有一定的灵活性。随着实验条件的改善和教学水平的提高,某些近代物理实验可能下放作为普通物理实验,而某些专门组实验可能下放作为近代物理实验,在实验内容的安排上应当没有死板的要求。如果说,“近代物理实验”课程是一个培养学生的物理思想和实验工作能力及素养的教学过程,它的内容在一定时间内应保持相对稳定,但又是不断变化的一种教学手段。

这本书把全部实验分为十大块,每块从培养学生的物理思想及实验工作能力和素养出发

提出它的教学目的和要求。每块中包含的若干个实验都有选择的余地。参考和使用本书时，每一块要选择哪些实验作为教材可以根据教师所用的教学方法而有所不同，特别是因为各校条件不同更不应强求一律，只要学生按每块的具体的目的要求得到必需的训练；而且选择哪些块也应当因条件而异。我认为，这本书应当是一本可以灵活运用的参考书，希望在兄弟院校参考使用和交流经验的基础上，在丰富近代物理实验的内容，进一步明确它的目的要求，创造更新的教学方法等方面都能有所前进，不断地把近代物理实验的教学完善起来。

虞福春

一九八四年一月

编 者 的 话

“近代物理实验”是继“普通物理实验”和“无线电电子学实验”之后为高年级学生开设的一门综合性较强的课程，它在培养学生独立工作能力、学习如何用实验方法研究物理现象与规律、掌握近代物理实验主要领域中的一些基本实验方法与技能、配合理论课程掌握近代物理主要领域中的新概念等方面起到重要的作用。根据本课程在教学中的地位和目的，我们在选题时注意了以下几点：（1）配合与量子力学发展有密切关系的原子物理学课程，我们在第一单元中安排了一组实验，其中有不少是物理学发展史上的著名实验。做好这些实验对于如何用实验手段研究物理现象和规律以及了解实验物理在物理学发展中的地位 and 作用是有帮助的。（2）在近代物理发展的一些重要领域（如核物理、现代光学、低温物理、半导体物理等）里，结合我校专业设置情况，我们选取了那些在内容上能反映该领域基本的物理现象与规律、在实验方法与技术上有代表性的实验。对于这方面的选题，我们特别注意到尽量选取那些切合学生实际水平，不要求有太多专业知识的基础实验。（3）注意介绍近代实验物理研究中经常要碰到的一些实验技术，如真空技术、低温技术、微波技术、X光与电子衍射、磁共振技术等，此外还尽量使学生有机会接触到一些比较现代化的电子实验技术，如纳秒脉冲取样技术以及锁相放大器和多道脉冲分析器的使用，这些都有助于提高学生的实验工作能力和扩大学生的知识面。为避免搞成纯技术性的操作，在设计这方面的实验时，同时安排若干具有物理内容的实验课题，以提高学生理论联系实际、解决具体问题的能力。（4）在选题时，还注意吸收我校教师科学研究工作的成果，如相位法测量光的速度、高压强电离真空计的校准、单光子计数、晶体的电光效应及其应用等，其中有些实验的原理虽然比较简单，但是由于结合了科研工作已有的经验，可分析考虑的问题较多，实验上供学生选择和扩展的余地较大。这样做也有利于加快实验室的更新与建设。

本书第一版包括北京大学物理系近代物理实验室1978年恢复重建以来先后开设的47个实验，在实验讲义基础上经过修改写成的。第一册包括1980年教育部召开的全国综合性大学物理系“近代物理实验”课程设置和教材编写会议制定的教学大纲中规定的基本实验或同类型实验共29个，第二册包括一些比较深入的或者是在做过基本实验后才适宜于完成的选做实验18个。根据上述大纲规定，对于物理专业本课程总学时（课内）约为150学时，平均每周课内4学时，课外6学时，每个实验的课内学时平均为8学时，因此每个学生只能完成16个左右的实验。由于不同实验的难易程度相差较大，为了使学生对每个实验的原理和方法、实验装置、实验中出现的各种现象、实验结果的可靠程度、误差的大小及其来源等问题有充裕的时间考虑、分析和判断，对某些实验而言，实验课内的8学时是不够的，可以适当减少实验个数，把某些实验增加到12—16学时。本课程可安排在三年级下学期和四年级上学期进行。在实验题目的安排上尽可能做到在学习了原子物理、电动力学、量子力学、固体物理等课程的有关章节后进行。对于非物理专业的学生和研究生，可以根据各专业的教学要求选修一定个数的实验。对实验特别有兴趣的学生，可以鼓励他们在规定的学时之外或假期中到实验室深入钻研某些实验或选修某些未做过的实验。为了适应不同情况的需要，许多实验中除了基

本的必做内容外,还附有若干选做内容,便于灵活掌握。

在每一单元的开始部分编写了一节引言,介绍每一领域的概况、选题的原则、教学的要求以及各个实验的基本内容等。根据不同情况,引言中还可能包括有本单元实验所共同需要的原理、基础知识、测量方法、实验装置、安全知识等。考虑到多数学生做实验以前没有学过微波和半导体物理课程,在这两个单元的引言中还分别编写了微波和半导体物理的基本知识作为附录,供选做这两方面实验的学生参考。

为了使学生在实验中出现各种现象和规律能独立地分析和解释,考虑到国内资料比较缺乏的情况,在本书中我们力图把有关的基础理论叙述清楚以供参考。但在原理的介绍上,尽量避免繁琐的数学推导,力求物理图像清晰,使学生在做实验之前对实验原理和方法有比较清楚的了解,尽可能在理解的基础上做好实验,实在必要的数学推导则安排在该实验的末尾作为附录或给出有关的参考文献。在实验的操作部分,除了一些技术性较强的操作和某些特殊的实验,一般不罗列操作步骤,而让学生在掌握了实验原理和方法的基础上,根据实验要求和仪器说明书自己设计实验的步骤。

为了使学生在实验中有更多动手的机会并便于学生作各种试验,或改变实验条件验证他们的各种想法,我们所用的实验装置不要求都是最先进、自动化程度最高的。除了通用的测试设备外,有相当一部分是教员及实验室工作人员动手设计、加工和组装而成的,例如振动喇曼光谱实验中,我们不是利用现成的激光喇曼光谱仪,也没有采用比较昂贵的氦离子激光器,而是用普通的10 mW的He-Ne激光器和单色仪,采用机械斩波、选频放大的方法来做实验。这样的装置可以更放手大胆地让学生使用,学生也能从中碰到更多的问题和学到更多的东西。

在误差和数据处理方面,考虑到一些近代物理实验中物理量固有的统计涨落现象十分明显,以及电子计算机在数据分析处理应用中的日益发展,更有必要让学生从概率和数理统计的基础上来理解误差并掌握数据处理中一些常用的方法,为此,在本书的开头介绍了概率论和数理统计的一些基本概念及与测量、数据分析有关的一些处理方法。此外,结合本课程中的具体实验,对发现和消除系统误差的一些方法作了简要的介绍。

在物理量的单位制方面,我们采用我国法定计量单位,个别地方也采用习惯使用的其他单位制单位,但都加以适当说明。

实验教学是一件集体的事业,从实验的建设、教材的编写到课程内容的不断完善与改进,都是广大教师和实验室工作人员多年辛勤劳动的结晶。除了书中每一个实验列出了参与该实验建设及教材编写的主要人员外,近代物理实验室的黄飞、郭元恒、黄植文、杨威生、赵汝光、朱生传、吕斯骅、陆果、王偕文、林万桔、方胜等同志在课程的建设中做了许多工作;原中级物理实验组的水永安、钱竹年、袁成杰、励子伟、吕晋育、金仲辉等同志所积累的教学经验对本书的编写帮助很大。在编写过程中我们还得到了我校技术物理系和无线电电子学系的大力支持。郑乐民、甘子钊、宋增福、秦克诚、夏宗璜、林福亨、陶如玉等同志从各方面给予了热情的支持。特别需要提出的是虞福春教授从课程大纲的制定到全书的编写,尤其是对书中每一单元教学的指导思想(引言部分)都进行了具体的指导,在百忙中还为本书写了序言,使编写工作得以顺利进行,在这里我们致以衷心的感谢。

由于近代物理实验课程从1978年重新恢复以来的时间还比较短,一些重要实验如史特恩-盖拉赫实验、电子顺磁共振(微波波段)、噪声等方面的实验因客观条件限制一时尚未排出;

考虑到我校物理系专业设置的特点，一些重要领域如电子物理、声学等方面的内容也没有得到反映；一些新排实验的教学实践的时间不长，因此在内容选取、教学要求的掌握等方面还很成熟，此外，由于我们的学术水平有限，一定存在不少的缺点和错误，敬请读者批评指正。

编 者

一九八四年十月

目 录

实验误差和数据处理.....	(1)
§ 1 引言.....	(1)
§ 2 随机变量.....	(2)
§ 3 数据处理(I): 分布参数估计与分布规律的检验.....	(10)
§ 4 数据处理(I): 曲线拟合.....	(22)
§ 5 限制和消除系统误差的一些方法.....	(27)
 第一单元 原子物理.....	(30)
1-0 引言.....	(30)
1-1 弗兰克-赫兹实验	(33)
1-2 氢原子光谱的同位素移位.....	(41)
附录 平面光栅摄谱仪.....	(44)
1-3 钠原子光谱的拍摄与分析.....	(50)
1-4 塞曼效应.....	(58)
1-5 X 射线标识谱与吸收	(68)
1-6 CO 埃氏(Angstrom)带系光谱.....	(74)
* 1-7 振动喇曼光谱.....	(80)
 第二单元 核探测技术及应用.....	(96)
2-0 引言.....	(96)
附录一 核衰变的统计规律和放射性测量的统计误差.....	(98)
附录二 常用核电子仪器的功能及其使用.....	(101)
附录三 放射源的安全操作与防护.....	(107)
2-1 盖革-米勒计数器和核衰变的统计规律	(110)
2-2 NaI(Tl)闪烁谱仪测定 γ 射线的能谱	(118)
2-3 符合测量.....	(127)
* 2-4 穆斯堡尔效应.....	(135)
* 2-5 用 β 粒子验证相对论的动量-动能关系	(148)
附录 等效平均磁感应强度的计算.....	(153)
* 2-6 正电子在物质中寿命的测量.....	(154)
 第三单元 激光、全息与光学信息处理	(162)
3-0 引言.....	(162)
3-1 He-Ne气体激光器放电条件的研究	(164)
3-2 He-Ne激光器的纵模及横模分析	(172)
3-3 全息照相与全息干涉计量方法.....	(178)

3-4	利用复合光栅实现光学微分处理	(191)
	附录 傅里叶变换的基本公式	(197)
* 3-5	图像识别	(199)
第四单元 其他光学实验		(205)
4-0	引言	(205)
4-1	相位法测量光的速度	(207)
	附录 相位测量中的周期误差	(215)
4-2	用反射椭偏仪测量折射率和薄膜厚度	(217)
4-3	法拉第效应	(228)
* 4-4	单光子计数	(237)
* 4-5	晶体的电光效应及其应用——用相位补偿测量双折射样品的微小相位差	(249)
* 4-6	光学双稳实验	(263)
	附录 会聚偏振光的干涉	(269)
第五单元 真空技术		(271)
5-0	引言	(271)
	附录 常用真空泵和真空计简介	(272)
5-1	高压强电离真空计的校准	(280)
5-2	磁偏转质谱仪	(284)
第六单元 X射线和电子衍射		(292)
6-0	引言	(292)
	附录 晶体衍射的基本知识	(293)
6-1	用X射线测定多晶体的晶格常数(德拜相法)	(301)
6-2	电子衍射	(306)
* 6-3	有确定取向晶体的X光劳厄相	(314)
* 6-4	单晶体晶轴方向的确定(非对称劳厄相)	(318)
第七单元 磁共振		(326)
7-0	引言	(326)
7-1	核磁共振	(330)
7-2	电子自旋共振	(343)
7-3	光泵磁共振	(348)
	附录一 二级塞曼效应及双量子跃迁的观察	(355)
	附录二 角动量耦合及耦合磁矩的矢量模型	(357)
第八单元 微波实验		(359)
8-0	引言	(359)
	附录 微波基本知识	(361)
8-1	反射式速调管的工作特性和波导管的工作状态	(381)
8-2	用传输式谐振腔观测铁磁共振	(386)

* 8-3	用谐振腔微扰法测量介质材料的微波介电常数和磁导率	(394)
* 8-4	用谐振腔特征方程法测量微波介质材料的特性	(399)

第九单元 低温物理实验 (403)

9-0	引言	(403)
	附录 使用低温液体的注意事项	(406)
9-1	纯铜低温热导率的测量	(407)
9-2	电阻的温度关系和减压降温技术	(412)
9-3	液氮温区高温超导体两个基本特性的观察	(418)

第十单元 半导体物理实验 (426)

10-0	引言	(426)
	附录 半导体物理的基础知识	(429)
10-1	硅的霍尔系数及电阻率的测量	(443)
10-2	用电容-电压法测量半导体中的杂质分布	(452)
* 10-3	用取样示波器测量晶体二极管的反向恢复时间	(462)
* 10-4	肖脱基势垒的测量	(474)

附表 (480)

附表 1	常用物理常数	(480)
附表 2	标准正态分布的分布函数 $N(x; 0, 1)$ 数值表	(481)
附表 3	χ^2 分布的 $\chi^2_{\alpha}(v)$ 数值表	(482)
附表 4	t 分布的 t_{α} 数值表	(484)
附表 5	里德伯表	(486)

实验误差和数据处理

(王祖铨、吴思诚)

§1 引言

物理学是一门实验的科学,物理规律的认识和证实都是通过观察物理现象、定量测量有关的物理量,并根据测量结果分析这些物理量之间的关系而实现的。由于各种因素的影响,使得测量结果总是或多或少地偏离真实数值,测量值与真值之差称为误差。由于测量总有误差,因此对一个物理量的测量,不仅在实验之后对数据进行分析处理时需要有关于误差的知识,而且在实验的设计阶段(方法、仪器的选择等)以及实验进行过程中的控制和监测也需要误差的知识,才能使测得的结果更接近真实数值并对结果的可靠程度作出合理的估计。

误差按其性质通常分为系统误差和偶然误差。

系统误差总是使测量结果向一个方向偏离,其数值一定(如仪表的零点误差)或按确定的规律变化(如刻度圆盘偏心差的周期性变化),用相同的方法在相同的条件下多次重复测量,再求其平均不能使系统误差消除。在测量方面,系统误差来源于仪器不准确(未经校准或校准条件和使用条件不同、制造上的缺陷等)、测量条件偏离公式成立的条件以及观测者固有的习惯等;测量方法、公式的不完善或公式的近似性也是系统误差的来源之一。在物理实验中往往要做许多工作来发现并消除系统误差;或者根据系统误差的大小对测量结果进行修正。在某些重要的精密实验中,对系统误差的分析处理甚至对整个工作的科学意义和水平起决定作用。

在测量中,即使完全消除或不存在显著的系统误差,在一定的实验条件下重复同一测量时,每次测量结果也并不一致。这种不一致仍然是由于每一次测量值与真值之间的差别造成的,这种差别时正时负、时大时小,带有偶然性或随机性,称这种误差为偶然误差或随机误差。偶然误差来源于测量方面的原因,事实上,所谓“一定的实验条件”是相对于观测者所能控制的程度而言,由于实验技术水平的限制,总是存在着观测者未知或尚不能控制的某些偶然因素,使得各次测量的实验条件发生微小的变化,如环境条件的无规起伏、仪器性能的统计涨落、微小的干扰等等都导致测量的偶然误差;此外,观测者感官分辨本领的限制也是偶然误差的一个来源。在现代的一些重要实验中,往往在实验的设计上花费很大的力量来分析各种造成测量误差的偶然因素,并尽可能采取适当的措施来减少或消除它们的影响。

测量的偶然误差和系统误差之间的差别往往是一种程度上的差别,并非种类上的差别。上面说过,一定的实验条件是相对于观测者所能控制的程度而言,事实上,偶然误差本身正是许多微小的、独立的、在给定的实验条件或操作程序中难以控制的、不可分解的系统误差的随机组合。以后将指出,它们遵从一定的统计规律,可以用统计的方法处理。

测量中,常用精密度(precision)来描述重复测量结果之间的离散程度,它和偶然误差大小有关,如果测量的偶然误差小,说明重复测量的离散程度小、重复性好,称之为精密度高;常用测量的准确度(accuracy)来描述测量结果和真值偏离的程度,如果测量的系统误

差和偶然误差综合的结果小,则称为精确度高。由于目前误差的名词尚未统一,因此文献中同一名词的意义不完全相同,如准确度一词,可能指系统误差与偶然误差综合的结果,也可能单指系统误差的大小。

在物理量的测量中,观测值的随机性除了来自测量的偶然误差以外,有时还来自物理现象固有的随机性质,这种随机性质使物理量本身的实际数值围绕着平均值起伏变化,并服从一定的统计规律。处于平衡态的宏观物体的热力学量和某些与微观过程相联系的物理量的统计涨落就是这种情形。有时物理量本身固有的统计涨落造成的测量结果的离散程度大大超过测量的偶然误差可能造成的离散,这时测量结果的随机性主要反映物理现象本身固有的随机性质,是无法用提高测量的精密度予以减小或消除的。在核物理实验中,利用各种探测器检测原子核衰变产生的各种射线时,计数率的统计涨落常常是造成测量数据离散的主要因素。

通常把测量的偶然误差和物理现象固有的随机性质带来的物理量测量中观测值的统计涨落总称为统计误差(在核探测技术中,统计误差一词通常专指测量对象固有的统计涨落),对于统计误差,必须用概率论和数理统计的方法进行分析。在§5中结合本书的具体实验介绍发现与消除系统误差的一些方法,其余各节介绍与统计误差有关的一些基本概念和数据分析处理方法。左上角标有“*”的小节初次学习时可先跳过,当遇到处理与这些问题有关的实验数据时再阅读。

§2 随 机 变 量

由于测量存在着偶然误差以及测量对象本身的统计涨落,使得每次测得的数值带有随机性质,因此对测量数据的分析处理必须应用随机量的数学,即定量研究随机现象规律性的科学,否则就得不出合理的结论,也无法知道结论的可靠程度。误差理论是一门以概率论和数理统计为基础的专门学科,其内容十分丰富,在本书中不可能作系统、全面的介绍和详细的推导,只着重介绍与测量数据的分析和处理有关的一些基本概念及其应用,以帮助读者从概率和统计的意义上理解误差,并学习一些有关的数据分析和处理方法。

一、随机变量的分布

(一) 随机事件的概率

在一定条件下,某一事件 A 可能发生,也可能不发生,则事件 A 称为随机事件。对于随机事件,决定该事件是否出现的因素显然没有全部包括在给定的条件中,否则就是必然事件或不可能事件而不再是随机事件了。在物理实验中,在一定条件下测量某个物理量时,由于仍然存在着观测者未知或尚不能控制的许多偶然因素,某一观测值的出现是一个随机事件。

如果在一定的条件下进行试验,共进行 N 次,其中事件 A 发生了 N_A 次,比值 N_A/N 称为事件 A 发生的频率。如果随着试验的次数 N 增加,频率 N_A/N 愈来愈趋近某个确定值,那么,当 $N \rightarrow \infty$ 时,频率的极限值称为事件 A 的概率,记为 $P_r(A)$,即

$$\frac{N_A}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P_r(A)$$

(二) 随机变量和随机子样

如果所研究的各个随机事件可以分别用一个数来表示,这个数就是随机事件的函数,称

为随机变量。在物理量的测量中，测量结果为某一个特定的数值是一个随机事件，这个数值就是随机变量的取值。

随机变量全部可能取值的集合称为母体，或总体。一次测量得到随机变量的一个具体数值，称为随机变量的一个随机数。如果总共进行了 N 次独立的试验，得到随机变量的 N 个随机数 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ，称为随机变量的一个随机子样（或称为样本），简称为子样。一个子样中随机数的数目 N 称为子样的容量。物理量的测量结果总是获得某些随机变量的子样，子样的容量由重复观测的次数决定。

随机变量按其取值的情况分为离散型与连续型：只能取有限个或可数的一串数值的随机变量称为离散型随机变量；可能值布满某个区间的随机变量称为连续型的随机变量。在核物理实验和单光子计数实验中，粒子或光子的计数率是离散型的随机变量，在物理量的测量中，更多见的是连续型的随机变量。

（三）分布函数、概率函数和概率密度函数

对于随机变量，我们关心的不只是随机变量的全部可能取值，还必须了解各种可能取值的概率，即随机变量的概率分布。无论是离散型还是连续型的随机变量，其可能的全部取值可以排列在实数轴上，亦即是实数轴上的一个子集合，因此可以定义随机变量 X 的分布函数 $P(x)$ 为 $P(x) = P_r(X \leq x)$ 。根据定义，它必须满足

$$P(-\infty) = 0 \quad (2-1)$$

$$P(\infty) = 1 \quad (2-2)$$

对于离散型变量 X ，它只能取可数个的数值 $x = x_1, x_2, \dots$ ，除了用分布函数描述外，还可以用概率函数 $p(x)$ 来描述它的分布。概率函数在某一点 x 的取值等于随机变量 X 取值为 x 的概率，即

$$p(x) = P_r(X = x)$$

根据分布函数和概率函数的定义，有 $P(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$ 。

对于连续型随机变量可以引入概率密度函数 $p(x) = dP(x)/dx$ 。因此有

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

根据式（2-2）应有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

这就是 $p(x)$ 应满足的归一化条件。

随机变量在区间 $[a, b]$ 内取值的概率 $P_r(a \leq x \leq b)$ 称为区间 $[a, b]$ 的概率含量。显然，区间 $[a, b]$ 的概率含量为

$$P_r(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx$$

上述关于分布函数、概率函数和概率密度函数的概念都可以推广到多个随机变量的情形。特别是，如果 X 和 Y 是两个互相独立的随机变量，那么根据概率论，它们的联合概率密度函数等于各自的概率密度函数的乘积，即

$$p(x, y) = p(x)p(y) \quad (2-3)$$

二、分布的数字特征量

如果一个随机变量的概率函数或概率密度函数形式已知,只要给出函数式中各个参数(称为分布参数)的数值,则随机变量的分布就完全确定了。分布参数的数值往往就是所要研究的物理量的数值。

对于不同形式的分布,常常用一些有共同定义的数字特征量来表征它们。最重要的特征量是随机变量的期待值和方差。

(一) 随机变量的期待值

随机变量的期待值定义为

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

期待值的物理意义是作无穷多次重复测量时,测量结果的平均值。根据期待值的定义可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle) p(x) dx = 0$$

上式表明 x 分布在期待值的周围。但期待值和概率密度函数取极大值的位置未必重合。

以后我们仍用尖括号表示括号内随机变量的函数的期待值,例如随机变量 x 的函数 $f(x)$ 的期待值定义为

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx \quad (2-4)$$

(二) 随机变量的方差

随机变量的方差定义为

$$\text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (2-5)$$

方差描述随机变量围绕期待值分布的离散程度,亦即随机变量取值偏离期待值起伏的大小。通常把随机变量 x 的方差记为

$$\text{Var}(x) = \sigma^2(x)$$

方差的平方根 $\sigma(x)$ 称为随机变量的根方差或标准差。

根据方差的定义,容易证明

$$\sigma^2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

(三) 两个随机变量的协方差

两个随机变量的协方差定义为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) p(x, y) dx dy \\ &= \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle \end{aligned} \quad (2-6)$$

协方差描述两个随机变量的相关程度。当 x 和 y 相互独立时,由式(2-3)和(2-6)可得 $\text{Cov}(x, y) = 0$ 。若 $\text{Cov}(x, y) \neq 0$, x 和 y 一定不相互独立;但是如果 $\text{Cov}(x, y) = 0$, x 和 y 可能相互独立,也可能不相互独立。通常还用相关系数 $\rho(x, y)$ 描述 x 和 y 的相关程度,

$$\rho(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (2-7)$$

显然, $-1 \leq \rho(x, y) \leq 1$ 。若 $\rho(x, y) \geq 0$, 称 x 和 y 为正相关, y 值有随 x 值增大而增大的趋势; 若 $\rho(x, y) < 0$, 称为负相关, y 值有随 x 值增大而减小的趋势; 若 $|\rho(x, y)| = 1$, 称为完全线性相关, 此时一个变量是另一个变量的线性函数。图 2-1 表示具有各种相关系数的二维随机变量 (x, y) 的随机数分布情形。

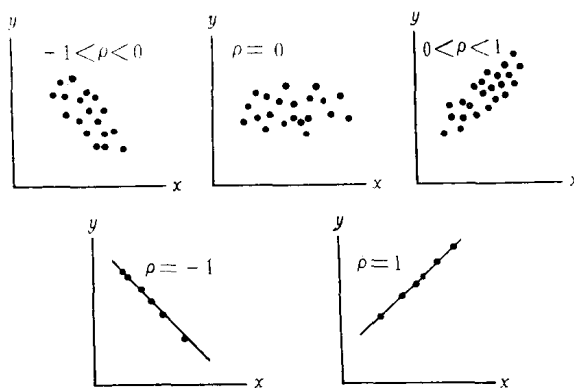


图2-1 两个随机变量的不同相关情况

根据协方差定义, 容易证明

$$\text{Cov}(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (2-8)$$

若 x 和 y 是两个随机变量, a 和 b 是常数, 则有

$$\begin{cases} \sigma^2(a) = 0 \\ \sigma^2(ax) = a^2\sigma^2(x) \\ \sigma^2(ax + by) = a^2\sigma^2(x) + b^2\sigma^2(y) + 2ab\text{Cov}(x, y) \end{cases} \quad (2-9)$$

三、数据处理中常见的分布

由于影响随机变量的因素各不相同, 因此随机变量的概率分布规律也多种多样, 其中有些直接来源于物理量本身的统计性质。这里我们只介绍几种在物理量测量中常见的以及数据分析处理中常用的统计分布。

(一) 二项式分布和泊松分布

1. 二项式分布 若随机事件 A 发生的概率为 p , 不发生的概率为 $(1-p)$, 在 N 次独立试验中, A 发生 k 次的概率为

$$p(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} \quad (2-10)$$

其中因子 $N!/k!(N-k)!$ 代表 N 次试验中事件 A 发生 k 次而 $(N-k)$ 次不发生的各种可能的组合。由于这个概率表达式是二项式展开式

$$[p + (1-p)]^N = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

中的项, 因此式 (2-10) 表示的概率分布称为二项式分布。这里随机变量 k 是离散型的变量, k 的取值只能是 $k = 0, 1, 2, \dots, N$ 。

利用二项式定理可以求出遵从二项式分布的随机变量 k 的期待值和方差, 它们分别为

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^N k \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = Np \quad (2-11)$$

$$\sigma^2(k) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k^2 \rangle - N^2 p^2$$

$$= \sum_{k=0}^N k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} - N^2 p^2$$