面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

同济4版习题解析

考研试题分类详解

高等数学题典（下册）

COLLEGE MATHMATICS

李相朋 余兴华 周云才 翁晓龙 编

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学题典(下册)

李相朋　余兴华
周云才　翁晓龙　编

湖南大学出版社

2001年·长沙

前　言

《高等数学》是工、理、农、林、财经等各科院校的一门重点基础课，内容多、进度快，初学者不能适应，特别在做题方面感到困难重重，本书就是为了帮助读者解决在做题方面的困难而编写的.

编写本书以原国家教委颁布的《高等数学课程教学基本要求》为依据选题，每个章(节)包括有代表性的四大部分:一、同济大学编第4版《高等教学》(上、下册)[1]习题选解;二、湖北科技社第1版《高等教学Ⅰ》(本科用，上、下册)[2]习题选解;三、华东师大编第1、2版《数学分析》(上、下册)[3]中符合工科《高等数学课程教学基本要求》的习题选解;四、历年全国统一的硕士研究生入学试题(一)的分类选解[4].本书选题以中难度以上为主，目录和章节划分以[1](即同济编第4版)为准;每个题号前未标记号者取自[1](即同济编第4版);题号前标有△符号者取自[2](即鄂版高数Ⅰ);标*号者取自[3](即华东师大的数学分析);标◦号者取自[4](即历年研究生入学试题解)，且在该题号后加括号标有年号，系指取自该年的全国硕士研究生入学试题(一).每个题号有三个数字，例如△1-1-1，系指湖北科技版高等数学Ⅰ第一章第一讲第1题;而*1-总-1系指华东师大编数学分析第一章总练习题第1题;◦1-1-五(1999)系指内容与同济编第4版第一章第一节相符的1999年研究生试题(一)的第五题;其余类似。附录中题号前加#号者为[4]与[5]章节相符之线性代数试题，加☆者为[4]与[6]章节相符之概率统计试题.

为了与同济大学新编《微积分》教材[7]配套使用，本书将“微分方程”放入了上册;将“空间解析几何”一章放到了下册.

本书名《题典》，是介于《题解》与《辞典》之间的辅助读物，是精选的辞典和题解，具有代表性，可读性、资料性等特点。编写本书的方

式与体例是一种尝试．由于我们水平所限，加上时间仓促，书中可能有缺点和错误，欢迎读者提出宝贵意见，以便再版时修改．

本书上、下册由黄光谷教授、李相朋副教授主编，李美珍、黄东、黄川、杜立等同志也参加了本书下册的编写工作，在此一并致谢！

编写本书得到武汉松联环球电脑信息有限公司、湖南大学出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

编　者

2000 年 4 月

目　　录

第八章　空间解析几何与向量代数

第九章　多元函数微分法及其应用

第八章　空间解析几何与向量代数

第一节　空间直角坐标系

一　高等数学习题选解

8-1-3　求点(a,b,c)关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

解　(1) 关于坐标面对称点的坐标,只须将原坐标中的一个坐标改为相反数,使得两对称点的连线垂直于该坐标面,例如,点(a,b,c)关于xoy,yoz,zox面的对称点依次为

$$(a,b,-c),\quad (-a,b,c),\quad (a,-b,c).$$

(2) 关于各坐标轴的对称点,可看成连续对两个坐标面施行了对称变换的结果,由(1)知,这时须将原三个坐标中的两个改成相反数.例如,点(a,b,c)关于x、y、z轴的对称点依次为

$$(a,-b,-c),\quad (-a,b,-c),\quad (-a,-b,c).$$

(3) 关于原点的对称点的坐标,则须把原坐标的三个数都改成相反数.(a,b,c)关于原点的对称点的坐标为　$(-a,-b,-c)$.

注　读者留意上述各结论,容易总结规律并记住它们.

7-1-4　自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

解　作坐标面的垂线,垂足在该坐标面上,因此对应的那个坐标为零.例如,过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$依次引xoy、yoz、zox面垂线的垂足的坐标,依次为

$$(x_0, y_0, 0), \quad (0, y_0, z_0), \quad (x_0, 0, z_0).$$

而坐标轴上的点，有两个坐标为零．因此，垂足在各坐标轴上，另两个坐标应为零．于是，过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$作 x、y、z 轴垂线的垂足，其坐标依次为

$$(x_0, 0, 0), \quad (0, y_0, 0), \quad (0, 0, z_0).$$

7-1-5 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

答 过点 P_0 而平行于 z 轴的直线上的点的坐标为(x_0, y_0, z)，即前两个坐标与 P_0 的坐标相同，而第三个坐标换成流动坐标 $z \in \mathrm{R}$.

过点 P_0 而平行于 xoy 面的平面上的点，其坐标为(x, y, z_0)，即与 P_0 的第三个坐标相同，而前两个坐标应改换为流动坐标．

7-1-6 一边长为 a 的立方体放置在 xoy 面上，其底面中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求其它各顶点的坐标．

解 如图 8-1 所示，各顶点的坐标依次为

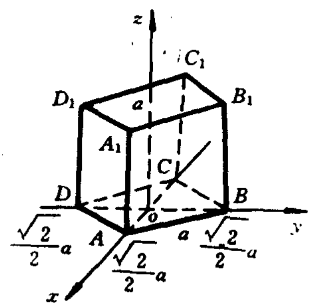

图 8-1

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right)$, $\quad B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$,

$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right)$, $\quad D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$;

$A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right)$, $\quad B_1\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$,

$C_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right)$, $\quad D_1\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$.

7-1-7 求点 $M(4, -3, 5)$到各坐标轴的距离．

解 点 M 向坐标轴作垂线的垂足依次为

$$N_1(4, 0, 0), \quad N_2(0, -3, 0), \quad N_3(0, 0, 5).$$

因此 M 到各坐标轴的距离依次为

$$d_x = |N_1M| = \sqrt{0+(-3)^2+5^2} = \sqrt{34};$$

$$d_y = |N_2M| = \sqrt{4^2+0+5^2} = \sqrt{41};$$

$$d_z = |N_3M| = \sqrt{4^2+(-3)^2+0} = 5.$$

7-1-8 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$等距离的点.

解 【用待定系数法解之】 设该点为 $M(x,y,z)$,因为 $M\in yOz$,所以 $x=0$,该点为$(0,y,z)$.而$|MA|=|MB|$,则

$$(3-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 4^2+(y+2)^2+(z+2)^2,$$

即得
$$3y+4z=-5; \quad ①$$

同理,由$|MA|=|MC|$,得

$$9+(y-1)^2+(z-2)^2 = 0+(y-5)^2+(z-1)^2,$$

$$4y-z=6. \quad ②$$

将①与②联立、解方程组,得 $y=1,z=-2$,所求点为 $(0,1,-2)$.

二　高等数学Ⅰ习题选解①

△7-1-3 已知立方体的一个顶点在原点,过此点的三条侧棱分别在三条正半轴上.如果棱长为 a,求其它各顶点的坐标.

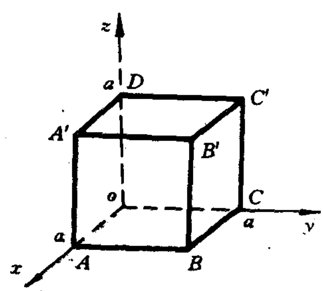

图 8-2

解 如图 8-2 所示,各顶点的坐标依次为

$O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$,

$B(a,a,0)$, $C(0,a,0)$;

① 理科《数学分析》教材中没有空间解析几何与向量代数这一章,本书从略,本章各节无"三、".

$$D(0,0,a),\quad A'(a,0,a),$$
$$B'(a,a,a),\quad C'(0,a,a).$$

第二节　向量及其加减法　向量与数的乘法

一　高等数学习题选解

7-2-1　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$

7-2-2　如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

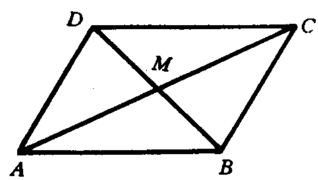

图 8-3

证　如图 8-3 所示，设在▱$ABCD$ 中，$AM=MC$，$BM=MD$.因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+MB=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}$$
$$=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC},$$

所以$AB \overset{\parallel}{=} DC$，即四边形 $ABCD$ 是▱.

7-2-3　把△ABC 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1，D_2，D_3，D_4，再把各分点与点 A 连接，试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，表示向量$\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

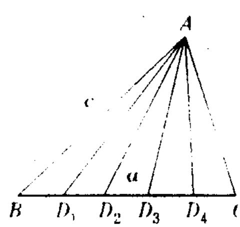

图 8-4

解　如图 8-4 所示，$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{D_1D_2}=\overrightarrow{D_2D_3}=\overrightarrow{D_3D_4}=\overrightarrow{D_4C}=\boldsymbol{a}/5$，所以$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\dfrac{\boldsymbol{a}}{5}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\dfrac{2}{5}\boldsymbol{a}$

$-\boldsymbol{c}, \overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}, \overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$

二　高等数学Ⅰ习题选解

△7-1-5　已知四边形 $ABCD$,求证$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$的充要条件是$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,并说明其几何意义.

证明　如图 8-5 所示,在四边形 $ABCD$ 所在平面上任取一点 O,先证必要性.由

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \quad ①$$

有　$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$,　②

故　$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$,　③

即得　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.　④

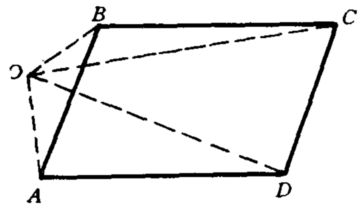

图 8-5

反之,成立④⇒③⇒②⇒①,充分性又得证.证完.

此充要条件的几何意义是:若四边形有一组对边平行且相等的充要条件是另一组对边平行且相等,即该四边形为▱.

△7-1-7　设 O 是点 A 和 B 连线以外的一点.证明 A、B、C 三点共线的充要条件是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}, \text{其中 } \lambda+\mu=1.$$

证　先证必要性.如图 8-6 所示,A、B、C 三点共线的充要条件是$\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{AB}$.因为

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$,　①

若 A、B、C 三点共线,则由①式,得

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+(1+\alpha)\overrightarrow{AB}$,　②

而　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,　③

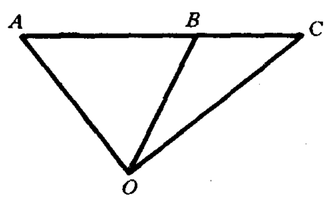

图 8-6

将③式代入②式,得

$$\overrightarrow{OC}=-\alpha\overrightarrow{OA}+(1+\alpha)\overrightarrow{OB}.$$

记 $\lambda=-\alpha,\mu=1+\alpha$,则有 $\lambda+\mu=1$,且有

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}.$$

再证充分性.若

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\text{且}\ \lambda+\mu=1,$$

则由①式,可得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\qquad ④$$

而

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}.\qquad ⑤$$

将⑤式代入④式、整理得到

$$(\lambda+\mu-1)\overrightarrow{OA}+(\mu-1)\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}.\qquad ⑥$$

记 $\alpha=\mu-1$,且由 $\lambda+\mu=1$,则⑥式成为

$$\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{AB},$$

所以 A、B、C 三点共线.

△7-1-9 已知某河水的流速为 6 千米/小时,若想使船垂直河岸以 8 千米/小时的速度横渡,求船行驶的速度.

解 记水速为 $\boldsymbol{a}$,船速为 $\boldsymbol{b}$,船垂直于河岸的行速为 $\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 如图 8-7 所示,依题意

$$|\boldsymbol{a}|=6,\qquad |\boldsymbol{c}|=8,$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}|^2}=10,$$

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{5},$$

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+\theta=\arccos\dfrac{4}{5}+\dfrac{\pi}{2}$.

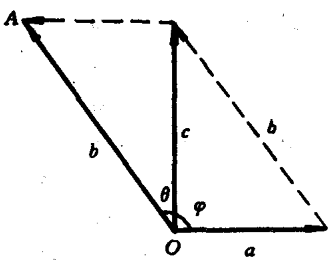

图 8-7

答 船行驶的速度为 10 千米/小时,方向如图 8-7 所示的 $\overrightarrow{OA}$,其中 $\varphi=90^\circ+\arccos 0.8$.

△7-1-10 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}$ 不平行于 $\boldsymbol{b}$,试求 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 夹角平分线上的单位向量 $\overrightarrow{OC}$.

解 因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量.记单位向量

$$a^{\circ} = \frac{a}{|a|}, \qquad b^{\circ} = \frac{b}{|b|}, \qquad c^{\circ} = \overrightarrow{OC},$$

如图 8-8 所示，$|a^{\circ}| = |b^{\circ}| = 1$ 由向量的加法定义，易知向量 $a^{\circ} + b^{\circ}$平分 a 与 b 的夹角，故所求向量为

$$c^{\circ} = \overrightarrow{OC} = \frac{a^{\circ} + b^{\circ}}{|a^{\circ} + b^{\circ}|}$$

$$= \frac{a/|a| + b/|b|}{|a/|a| + b/|b||}.$$

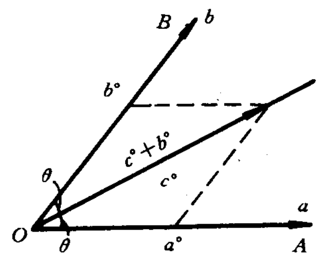

图 8-8

△**7-1-13** 已知 A、B、C、D 是空间四边形的顶点，又棱 AC 和 BD 的中点分别是 L 和 M. 试证：

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{LM}.$$

证 如图 8-9 所示，设 CD 的中点为 N，连接 MN 与 LN，则

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN},$$

$$\therefore \quad 4\overrightarrow{LM} = 4(\overrightarrow{LN} - \overrightarrow{MN})$$

$$= 4(\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NM}) = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}). \quad ①$$

而 $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0,$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = -(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD},$$

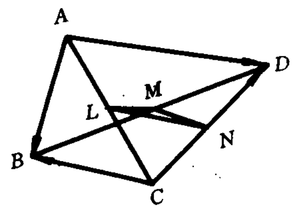

图 8-9

代入①式，即得

$$4\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}(\text{得证})$$

第三节　向量的坐标

一　高等数学习题选解

7-3-2 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴

上的投影依次的4，-4和7.求这向量的起点A的坐标.

解 设$A(x,y,z)$,则

$$\overrightarrow{AB}=\{2-x,-1-y,7-z\}.$$

由题意,此向量在坐标轴上的投影依次为4，-4,7,所以

$$2-x=4,\qquad -1-y=-4,\qquad 7-z=7,$$

$$x=-2,\qquad y=3,\qquad z=0,$$

故$A(-2,3,0)$.

7-3-4 设已知两点$M_1(4,\sqrt{2},1)$和$M_2(3,0,2)$.计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(3-4)^2+(0-\sqrt{2})^2+(2-1)^2}=2$.设$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向角,则

$$\cos\alpha=\frac{3-4}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\beta=\frac{0-\sqrt{2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\gamma=\frac{2-1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{1}{2}.$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{3\pi}{4},\quad \gamma=\frac{\pi}{3}.$$

7-3-8 求平行于向量$\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$的单位向量.

解 因为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}$

$$=\sqrt{121}=11,$$

所以 $$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right\},$$

从而平行于$\boldsymbol{a}$的单位向量或为$\boldsymbol{a}^\circ$,或为$-\boldsymbol{a}^\circ$,即为

$$\left\{\pm\frac{6}{11},\pm\frac{7}{11},\mp\frac{6}{11}\right\}.$$

二 高等数学Ⅰ习题选解

△7-2-4 求向量 $\boldsymbol{a}=\{2,1,-1\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{1,1,2\}$ 之和向量的单位向量.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{2+1,1+1,-1+2\}=\{3,2,1\}$,

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+2^2+1}=\sqrt{14},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^\circ=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\left\{\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{\sqrt{14}}{14}\right\}.$$

△7-2-7 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴成相等的锐角,求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.又若 $|\boldsymbol{a}|=2$,求 $\boldsymbol{a}$.

解 依次记 $\boldsymbol{a}$ 与 x、y、z 轴正向所成的锐角为 α、β、γ,依题意,有

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma>0.$$

又

$$\cos^2\alpha=\cos^2\beta=\cos^2\gamma=1,$$

$$\cos^2\alpha=1/3\Rightarrow\cos\alpha=+\sqrt{3}/3,$$

且

$$\cos\beta=\cos\gamma=\sqrt{3}/3.$$

当 $|\boldsymbol{a}|=2$ 时,

$$\boldsymbol{a}=2\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

△7-2-8 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{d}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影及在 z 轴上的分向量.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}&=4\{3,5,8\}+3\{2,-4,-7\}-\{5,1,-4\}\\&=\{13,7,15\}=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{d}$ 在 x 轴上的投影等于 13;而 $\boldsymbol{d}$ 在 z 轴上的分向量为 $15\boldsymbol{k}$

△7-2-10 试证以 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形,且 A 是直角.

证一 用距离公式与勾股定理证之(略).

证二 用向量的模与勾股定理证之.因为

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|,$$

所以$\triangle ABC$为等腰三角形.又

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + 5^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{98} = \sqrt{7^2 + 7^2},$$

$$\therefore |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2,$$

故$\triangle ABC$为Rt△,且$\angle A$是直角.

△7-2-11 已知两个力 $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{F}_2 = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$ 作用于同一点.问要用怎样的力,才能使之与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 平衡?并求此平衡力的大小和方向余弦.

解 记此平衡力为 $\boldsymbol{F}$,则

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0,$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{F} = -(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \{-4, 2, 5\},$$

而 $\boldsymbol{F}$ 的大小 $\quad |\boldsymbol{F}| = \sqrt{16+4+25} = 3\sqrt{5}$,

方向余弦 $\quad \cos\alpha = \dfrac{-4}{3\sqrt{5}} = -\dfrac{4}{15}\sqrt{5}$,

$$\cos\beta = \frac{2}{15}\sqrt{5}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

△7-2-16 求以 $A(2,1,4)$,$B(3,-1,2)$,$C(5,0,6)$为顶点的三角形重心的坐标.

解 不妨设$\triangle ABC$的质量分布是均匀的.如图 8-10 所示,设 AC 的中点为 D,重心(即形心)为 $E(x,y,z)$,则

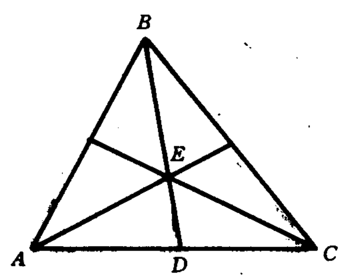

图 8-10