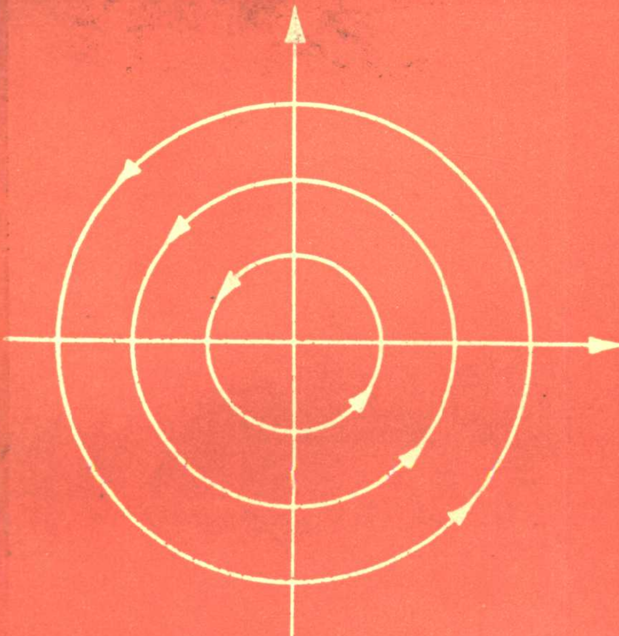

周尚仁
权宏顺 编

常微分方程习题集

人民教育出版社

常微分方程习题集

周尚仁　权宏顺　编

*

人民教育出版社出版
四川省新华书店重庆发行所发行
达县新华印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张15.125　字数350,000
1980年6月第1版　1981年5月第1次印刷
印数 00,001—35,500
书号 13012·0481　定价 1.35 元

序

在国内出版的几本常微分方程教科书中，一般都附有习题和答案，但因各书的重点不同，所以选题的侧重亦异．本习题集作为这门课程通用的教学参考书，除选编较多的计算题外，还编写了一定数量的证明题和应用题，其目的是让读者通过各种类型的习题练习，加深对本课程基本理论的理解，掌握解题的方法和技巧，以及加强解决实际问题的能力．再者，常微分方程的边值问题在力学和工程技术中应用甚广，可是在基础课中涉及很少，所以在这本习题集中，还编了一章关于边值问题的题目，以满足这部分读者的需要．

本习题集共有 2327 个题目，其中计算题都给了答案，部分习题附有提示，带“*”号的题作了解答．这些提示和解答的目的是启发思考，提供解题的方法和线索．但是解题的思路和方法是多种多样的，而且方程(组)的通解形式和李雅普诺夫函数的形式也是不唯一的，所以本书中所提供的提示和解答仅供参考．至于书中的定理、例题和附录，纯粹是为了读者作题方便而编入的．

本书编写的题目，有的是多年来我们在教学中的积累，有的选自

王柔怀、伍卓群编《常微分方程讲义》，

复旦大学数学系主编《常微分方程》，

中山大学数学力学系常微分方程组编《常微分方程》，

А. Ф. Филиппов 编《Сборник задач по дифференциальным уравнения》

等书．

陆润林教授对本书的编写工作给予有益的指导和热情的帮

助，陈庆益教授对初稿进行了审阅和修改；在本书原稿送审过程中，负责审稿的程中瑗、戴国仁两同志提出了不少改进意见，谨在此向他们表示衷心感谢．但限于编者的水平和能力，缺点和错误一定很多，殷切期望同志们随时给予批评指正。

编者于兰州大学

一九八〇年三月

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　一阶微分方程的几种可积类型

§1.1　基本概念

含有一个自变量 x 和它的函数 y 以及这个函数的一阶导数 y' 之间的形式如下的关系式

$$F(x, y, y')=0 \qquad \left(y'=\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

叫做一阶常微分方程．在某种条件下，它确定变量 y' 为变量 x、y 的单值隐函数．这时微分方程(1)等价于形如

$$y'=f(x, y) \tag{2}$$

的微分方程．若可微函数 $y=\varphi(x)$ 在 x 的某一变化区间上使得

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x)]=0 \text{ 或 } \varphi'(x)=f[x, \varphi(x)]$$

成为恒等式，则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(1)或(2)的解(也称积分或积分曲线)．

若隐函数方程

$$\Phi(x, y, C)=0 \tag{3}$$

当常数 C 在某一确定的区域取值时，由此函数方程解出 y 所得到的一些可微函数 $y=\varphi(x)$ 是方程(1)或(2)的积分，则称函数方程(3)为微分方程(1)或(2)的通解或通积分．求满足某种指定条件的解的问题称为定解问题．此条件称为定解条件．

定解条件有所谓初始条件和边界条件．一阶微分方程(2)的初始条件为 $y(x_0)=y_0$ 或 $y|_{x=x_0}=y_0$．求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题或哥西问题．

如果给了一个含有任意常数的函数族

$$y=\varphi(x,C) \tag{4}$$

将(4)对 x 微分得到

$$y'=\frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial x} \tag{5}$$

由(4)与(5)消去常数 C 得到 x,y,y' 之间的一个关系式

$$F(x,y,y')=0 \tag{6}$$

则(6)就是函数族(4)应满足的微分方程.

在题 1.1—1.18 中,验证指定函数是已给微分方程的解、通解或通积分:

1.1. $x^2+y^2=C\quad(C>0)$; $\quad y'=-\dfrac{x}{y}$.

1.2. $\displaystyle\int_1^y e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt+x+C=0$; $\quad y'+e^{\frac{1}{2}y^2}=0$.

1.3. $U-Ce^{kt}-20=0\quad(k$ 是常数$)$; $\quad \dfrac{dU}{dt}=k(U-20)$.

1.4. $y^3-5y-3x^4+C=0$; $\quad y'=\dfrac{12x^3}{3y^2-5}$.

1.5. $C^2y^2+(C^2-a^2)x^2=C^2(C^2-a^2)\quad(a$ 是常数$)$;

$xyy'^2+y'(x^2-y^2-a^2)-xy=0$.

1.6. $y=\dfrac{\sin x}{x}$; $\quad xy'+y=\cos x$.

1.7. $y=Ce^{-2x}+\dfrac{1}{3}e^x$; $\quad y'+2y=e^x$.

1.8. $y=2+C\sqrt{1-x^2}$; $\quad (1-x^2)y'+xy=2x$.

1.9. $y=e^{\arcsin Cx}$; $\quad xy'=y\,\mathrm{tg}(\ln y)$.

1.10. $y=e^x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt+Ce^x$; $\quad y'-y=e^{x+x^2}$.

1.11. $y=x\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$; $\quad xy'=y+x\sin x$.

1.12. $y=x\left(\int\frac{e^x}{x}dx+C\right)$;　　$xy'-y=xe^x$.

1.13. $\begin{cases}x=te^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$;　　$(1+xy)y'+y^2=0$.

1.14. $\begin{cases}x=e^{\operatorname{arctg} t}\\ y=e^{-\operatorname{arcctg} t}\end{cases}$;　　$y-xy'=0$.

1.15. $y=\ln(C+e^x)$;　　$y'=e^{x-y}$.

1.16. $x=ye^{Cy+1}$;　　$y'=\dfrac{y}{x(\ln x-\ln y)}$.

1.17. $y=\begin{cases}\dfrac{-(x-C_1)^2}{4} & -\infty<x<C_1\\ 0 & C_1\leqslant x\leqslant C_2,\\ \dfrac{(x-C_2)^2}{4} & C_2<x<\infty\end{cases}$

其中 $C_1\leqslant 0, C_2\geqslant 0$ 是任意常数;　　$y'=\sqrt{|y|}$.

1.18. $y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases}$;

$y'=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$

1.19. 验证 $y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 是方程 $y'=|xy|$ $(x<0)$ 的适合初始条件 $y|_{x=-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{e}$ 的解.

1.20. 验证 $x=-\dfrac{10^5}{(100+t)^2}$ 是方程 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2x}{100+t}$ 满足初始条件 $x(0)=-10$ 的解.

1.21. 设一点沿 x 轴运动, 其速度为 $f(t)$. 若 $f(t)$ 是连续函数, 并假定当 $t=t_0$ 时这点的横坐标为 x_0. 试证该点的运动规律为

$x=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau.$

1.22. 设 $y=\varphi(x)$是方程 $f(y, y')=0$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 上的解. 试证明:对任意常数 C, $y=\varphi(x+C)$ 也是这个方程的解, 并确定它的定义区间.

[提示: 注意方程中不显含自变量 x.]

在题 1.23—1.37 中, 求已给曲线族所满足的微分方程:

1.23. $y=Cx+C^2$. 1.24. $y=e^{Cx}$.

1.25. $y=(x-C)^3$. 1.26. $y^2+Cx=x^3$.

1.27. $y=C(x-C)^2$. 1.28. $Cy=\sin Cx$.

1.29. $x^2+y^2=Cx$. 1.30. $y=Cx^2$.

1.31. $(x^2+y^2)^2=C(x^2-y^2)$.

1.32. $x+C=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ (a 为常数)

1.33. $(x-C)^2+y^2=1$. 1.34. $y=Ce^{\arcsin x}$.

1.35. $y=C+\sqrt{1-x^2}$. 1.36. $y=C+\ln x$.

1.37. $y-\sqrt{x^2+y^2}=C$.

1.38. 求二次曲线族

$$\frac{x^2}{C^2}+\frac{y^2}{C^2-1}=1$$

所满足的微分方程, 并从微分方程本身证明这族曲线是自正交曲线族, 即这族曲线中的任何两条曲线如果相交, 则必正交.

[提示: 用 $-\dfrac{1}{y'}$ 代换 y' 后, 微分方程不改变时其解为自正交曲线族.]

1.39. 证明: 共焦抛物线族 $y^2=4C(x+C)$ 组成一自正交曲线族.

在题 1.40—1.46 中, 求与已给曲线族交成 φ 角的等交轨线族

的微分方程:

1.40. $y^2=x+C$; $\varphi=90°$.

1.41. $x^2+y^2=C^2$; $\varphi=45°$.

1.42. $3x^2+y^2=C$; $\varphi=30°$.

1.43. $y=x\ln x+Cx$; $\varphi=\operatorname{arc\,tg}2$.

1.44. $r=a\cos^2\theta$; $\varphi=90°$.

[提示: 如果方程 $r=f(\theta)$ 的切线与矢径的夹角为ω, 那么 $\operatorname{tg}\omega=r/r'$.]

1.45. $r=a+\cos\theta$; $\varphi=90°$.

1.46. $r=a\sin\theta$; $\varphi=45°$.

1.47. 建立通过两个定点 $P_1(q,0)$, $P_2(0,q)$的所有圆的微分方程.

1.48. 建立切于两条直线 $y=\pm(x-C)\operatorname{tg}\alpha$ 且圆心在 x 轴上的所有圆的微分方程.

§1.2 一阶微分方程的几种可积类型

1. 可分离变量的方程

形如

$$y'=f(x)g(y) \tag{7}$$

的一阶微分方程称为可分离变量的方程. 这种方程的特点是: 右端只含 x 的函数与只含 y 的函数的乘积.

如果函数 $f(x)$、$g(y)$在区域 R 上连续且 $g(y)\neq 0$, 那么, 分离变量后两端积分, 即得方程(7)的通积分

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

或

$$G(y)=F(x)+C$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

其中 $G(y)$ 与 $F(x)$ 分别是$\frac{1}{g(y)}$与 $f(x)$ 的某一原函数, C 为任意常数. 方程(7)的通解为

$$y=G^{-1}(F(x)+C) \tag{8}$$

其中 G^{-1} 表 G 的反函数. 而适合初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的解为

$$y=G^{-1}[F(x)+G(y_0)-F(x_0)]$$

如果 $g(\eta)=0$, 则方程(7)除解(8)外, 还有解 $y=\eta$.

例 1. 求方程 $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$ 的通解.

解: 用$(y^2-1)^{-1}(x^2-1)^{-1}$ 乘方程两端, 得到

$$\frac{xdx}{x^2-1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$$

积分后得到

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln C$$

或

$$(x^2-1)(y^2-1)=C$$

例 2. 求方程$(1+e^x)yy'=e^x$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的解.

解: 分离变量得到

$$ydy=\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

两边积分

$$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C \tag{9}$$

将初始条件代入(9)中, 得到 $C=\frac{1}{2}-\ln 2=\ln\frac{1}{2}\sqrt{e}$, 将 C 代回(9)中, 得到

$$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+\ln\frac{1}{2}\sqrt{e}$$

或

$$e^{\frac{1}{2}y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{e}\,(1+e^x)$$

2. 可化为可分离变量的方程

1) $y'=f(ax+by+c)$. 如果 $b=0$, 方程 $y'=f(ax+c)=F(x)$就是可分离变量的方程; 如果 $b\neq 0$, 利用变换 $z=ax+by+c$ 即得可分离变量的方程

$$\frac{dz}{dx}=bf(z)+a$$

当 $bf(z)+a\neq 0$ 时, 其通积分为

$$\int\frac{dz}{bf(z)+a}=x+C$$

代回原变量 y, 即得原方程的通积分.

例 3. 解方程 $y'=\sin(x+y+1)$.

解: 令 $z=x+y+1$, $\dfrac{dz}{dx}=1+\sin z$

分离变量, 得到

$$\frac{dz}{1+\sin z}=dx \tag{10}$$

为了便于积分, 用 $1-\sin z$ 乘(10)的左端的分子和分母, 得到

$$\frac{1-\sin z}{1-\sin^2 z}dz=\frac{1-\sin z}{\cos^2 z}dz=(\sec^2 z-\sec z\,\mathrm{tg}\,z)dz$$

将(10)两端积分, 得到

$$\mathrm{tg}\,z-\sec z=x+C$$

即

$$-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)=x+C$$

将 z 换为原变量, 得到原方程的积分

$$x+C=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x+y+1}{2}\right)$$

2) 齐次方程

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{11}$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 可将方程(11)化为可分离变量的方程

$$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}$$

若 $f(u)-u\neq 0$, 用分离变量法可求得它的通积分

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln\left|\frac{x}{C}\right|$$

代回原变量即得(11) 的通积分. 如果 $f\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=\frac{\eta}{\xi}$, 则 $y=\frac{\eta}{\xi}x$是方程的解.

例 4. 解方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

解: 将方程改写为

$$y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x} \tag{12}$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 得到 $y'=xu'+u$, 方程(12)变为

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$$

分离变量并两端积分, 得到

$$\arcsin u=\ln|x|+\ln C$$

代回原变量得到(12)的通积分

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln Cx$$

3) 可化为齐次方程的方程

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{13}$$

其中 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 都是常数.

情形 1. 行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$$

那么,经过变换

$$\begin{cases}a_1u+b_1v=a_1x+b_1y+c_1\\ a_2u+b_2v=a_2x+b_2y+c_2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=u+\dfrac{b_1c_2-c_1b_2}{\Delta}\\ y=v+\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{\Delta}\end{cases}$$

可将方程(13)化为方程(11)的形式

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$$

情形 2. $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0$, 亦即$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}=\lambda$, 这时方程(13)的形式为

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right) \tag{14}$$

作未知函数的变换 $z=a_1x+b_1y$, 由(14)得到

$$\frac{dz}{dx}=a_1+b_1f\left(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\right)$$

这是可分离变量的方程.

例 5. 解方程 $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$. (15)

解: 令 $x=u+3, y=v-2$, 可将方程(15)变为

$$\frac{dv}{du}=2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2$$

再令 $z=\dfrac{v}{u}$, 得到

$$z+u\frac{dz}{du}=2\left(\frac{z}{1+z}\right)^2$$

即

$$u\frac{dz}{du}=-\frac{z(1+z^2)}{(1+z)^2}$$

分离变量并两端积分，得到

$$\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{1+z^2}\right)dz=-\int\frac{du}{u}+\ln C$$

即

$$\ln|z|+2\operatorname{arc\,tg}z=-\ln|u|+\ln C$$

$$\ln|zu|=-2\operatorname{arc\,tg}z+\ln C$$

代回原变量，得到

$$v=Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{v}{u}}$$

即

$$y+2=Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$$

为方程(15)的积分．

3. 一阶线性方程

一阶线性方程的一般形式是

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{16}$$

式中 $p(x)$，$q(x)$是某区间(a, b)上的已知连续函数．先用分离变量法求出齐次方程

$$y'+p(x)y=0$$

的通解，再用常数变易法求得非齐次方程(16)的通解是

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right) \tag{17}$$

而满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ $(a<x_0<b)$的解为

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}q(\xi)e^{\int_{x_0}^{\xi}p(t)dt}d\xi\right)$$

例 6．解方程　$y'+2xy=2xe^{-x^2}$．　(18)

解：在方程(18)中，$p(x)=2x$, $q(x)=2xe^{-x^2}$．根据公式(17)，

可求出方程(18)的解为

$$y=e^{-\int 2xdx}\left(C+\int 2xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx\right)=e^{-x^2}(C+x^2)$$

4. 伯努利方程

$$y'+p(x)y=q(x)y^n \quad (n\neq 0,1) \tag{19}$$

利用未知函数代换 $z=y^{1-n}$, 可将方程(19)化为一阶线性方程

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$$

解出 z, 再换回原变量就得到方程(19)的通解

$$y^{1-n}=e^{(n-1)\int p(x)dx}\left[C+(1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx\right] \tag{20}$$

例 7. 解方程 $y'-2xy=2x^3y^2$. (21)

解: 在方程(21)中, $p(x)=-2x$, $q(x)=2x^3$, $n=2$. 根据公式(20)

$$\begin{aligned}y^{-1}&=e^{-\int 2xdx}\left(C-\int 2x^3e^{\int 2xdx}dx\right)\\&=e^{-x^2}\left(C-2\int x^3e^{x^2}dx\right)\\&=Ce^{-x^2}-x^2+1\end{aligned}$$

则

$$y=\frac{1}{Ce^{-x^2}-x^2+1}$$

5. 全微分方程与积分因子

1) 全微分方程

形如

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{22}$$

的微分方程, 如果存在具有连续一阶偏导数的函数 $U(x, y)$ 使得 $U_x=M, U_y=N$, 则称为全微分方程. 在这种情形下, 方程(22)可写为 $dU=0$, 因而得通积分

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com