高等学校试用教材

信号与系统

下　册

郑君里 杨为理 应启珩 编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书讨论确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本理论和基本分析方法。全书共十一章。上册一至六章讨论连续时间信号与系统(从时域到变换域);下册第七至十章讨论离散时间信号与系统(从时域到变换域),第十一章研究系统的状态变量分析(包括连续与离散、时域与变换域)。

配合正文,有较丰富的例题和习题,并附习题参考答案。每章附有较详细的参考书目。

本书可作为无线电技术或自动化类有关专业信号与系统(或信号与线性系统)课程的试用教材,也可供有关科技人员参考。

本书责任编辑　王忠民

高等学校试用教材

信号与系统

下　册

郑君里　杨为理　应启珩　编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 13　字数 310,000

1981 年 7 月第 1 版　1982 年 12 月第 1 次印刷

印数 00,001—30,000

书号 15012·0342　　定价 1.30 元

目　录

第七章 离散时间系统的时域分析

7.1 引言

离散时间系统的研究源远流长。十七世纪发展起来的经典数值分析技术奠定了这方面的数学基础。本世纪四十和五十年代，抽样数据控制系统的研究取得了重大进展。六十年代以后，计算机科学的进一步发展与应用标志着离散时间系统的理论研究和实践进入了一个新阶段。1965 年，库利（J. W. Cooley）与图基（J. W. Tukey）在前人工作的基础上发表了计算傅里叶变换高效算法的文章，这种算法称为快速傅里叶变换，缩写为 *FFT*。*FFT* 算法的出现引起了人们的巨大兴趣，迅速地得到了广泛应用。与此同时，集成电路研制的进展，使得体积小、重量轻、成本低的离散时间系统有可能实现。在信号与系统分析的研究中，人们开始以一种新的观点——数字信号处理的观点来认识和分析各种问题。离散时间系统自身的理论体系正在逐步形成，并日趋丰富与完善。

离散时间系统的分析方法，在许多方面，与连续时间系统的分析方法有着并行的相似性。我们熟知，对于连续时间系统，其数学模型是用微分方程来描述的。与之相应，对于离散时间系统是由差分方程来表示的。差分方程与微分方程的求解方法在相当大的程度上一一对应。在连续时间系统中，卷积方法的研究与应用有着极其重要的意义；与此类似，在离散时间系统的研究中，卷积和（简称卷积）的方法具有同样重要的地位。在连续时间系统中，我们是如此广泛地采用变换域方法——拉普拉斯变换与傅里叶变换

方法，并运用系统函数的概念来处理各种问题；在离散时间系统中也同样普遍地运用变换域方法和系统函数的概念，这里的变换域方法包括Z变换、离散傅里叶变换以及沃尔什变换等等。我们将按照与二至六章类似的顺序和层次来展开第七至十章的讨论。

我们以连续时间系统的概念为基础引出离散时间系统的某些概念，这只是由于习惯上的方便。实际上，离散时间系统的理论已经形成独自的严密体系，也可以自行建立各种概念和引出各种分析方法。

在第三章曾讨论连续信号的抽样，这仅仅是给出离散时间信号的方式之一，作为离散时间信号源更为一般的例子是数字计算机以及形形色色数字系统的输出、输入信号。通常，这里产生的各种数据流不一定与连续信号有某种依从关系，因此，不能把离散时间信号狭隘地理解为连续信号的抽样或近似。实际上，许多通信与控制设备正是为了直接传输或处理离散时间信号而设计的。

当我们模仿连续时间系统的某些方法学习离散时间系统理论的时候，必须注意它们之间存在着一些重要差异，这包括数学模型的建立与求解、系统性能分析以及系统实现原理等等。正是由于差异的存在，才使得离散时间系统有可能表现出某些独特的性能。

与连续时间系统相比较，离散时间系统具有下列优点：容易作到精度高、可靠性好，便于实现大规模集成，从而在重量和体积方面显示其优越性。一般的数字系统中都包括有存储器，存储器的合理运用可以使系统具有灵活的功能，这些功能在连续时间系统中往往难以实现。此外，对于连续时间系统，通常只注重一维变量的研究，而在离散时间系统中，二维或多维技术得到广泛应用。当然，离散时间系统的运用也表现出某些缺点和局限性，主要是工作速度的提高还受到限制，目前成本也较昂贵。实际上，应根据不同的目的和要求来设计和实现所需之系统。把连续时间系统与离散

时间系统组合起来称为“混合系统”，这种情况常见于数字通信系统与数据控制系统。

近十余年来，离散时间系统的应用范围与日俱增，在这方面，一个新颖而先进的学科分支已经形成，这就是“数字信号处理”，它的重要性正在逐渐为人们所认识，现已卓见成效的应用表现在：语音通信、声学、雷达、声纳、图象传输、遥感、自动控制工程、生物医学、地震学、核物理学……等众多方面。经历了一段时间的进展，人们对它的兴趣仍然有增无减，种种新的研究课题引人注目。

由于本书范围所限，在下面几章内，我们只能讨论离散时间系统分析的一些基本概念和基本分析方法，对某些问题仅作简单介绍（如数字滤波器、*FFT*、沃尔什变换等）。然而，这里的初步学习将为后续课程的进一步研究作好准备。

7.2 离散时间信号——序列

我们在绪论中曾定义，表示离散信号的时间函数，只在某些离散瞬时给出函数值（复习第一章 1.2 节）。因此，它是时间上不连续的“序列”。通常，给出函数值的离散时刻之间隔是均匀的。若此间隔为T，我们就以$x(nT)$表示此离散时间信号①，这里，nT是函数的宗量，n取整数（$n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$）。在离散信号传输与处理设备中，信号常寄放在存储器中，可以随时取用，仅在将离散信号构成(还原)为连续信号输出时，才有必要将它们排列在等间隔时间上。另一方面，离散时间信号的处理常常是先记录、后分析(即所谓“非实时”的)，短时间存入的数据可能要在较长时间内才能完成分析。因此，考虑到这些因素，对于离散时间信号来说，往往不必以nT作为宗量，可以直接以$x(n)$表示此序列。这里，n表

① 由本章开始，我们以符号x, y表示离散时间信号，而不再采用表示连续时间信号的符号e, r等，以示区分。

示各函数值在序列中出现的序号。也可以说，一个离散信号就是一组序列值的集合$\{x(n)\}$。

离散时间信号也常用图解表示，我们以线段的长短代表各序列值的大小，有时，可将它们的端点连接起来。例如，图 7-1 示出某序列 $x(n)$ 的图形。虽然在此图中横轴绘成一条连续的直线，但是必须认识到，$x(n)$ 仅对 n 的整数值才有定义，对于 n 的非整数值，$x(n)$没有意义。

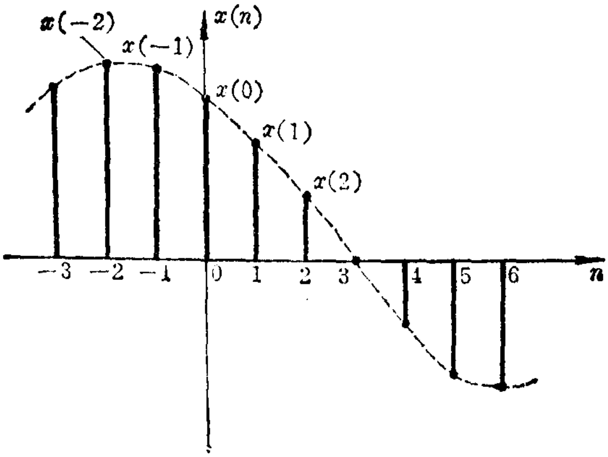

图 7-1 离散时间信号的图形

在离散系统分析中，常遇到序列的某些基本运算——相加、相乘以及延时。序列 $\{x(n)\}$与$\{y(n)\}$ 相加是指两序列同序号的数值逐项对应相加而构成一个新序列 $\{z(n)\}$

$$\{z(n)\}=\{x(n)+y(n)\} \tag{7-1}$$

类似地，$\{x(n)\}$ 与 $\{y(n)\}$ 相乘表示它们同序号的数值逐项对应相乘而形成一个新序列 $\{f(n)\}$

$$\{f(n)\}=\{x(n)y(n)\} \tag{7-2}$$

序列延时 $x(n-m)$ 是指原序列 $x(n)$ 逐项依次延时 m 位而给出一个新序列 $\{w(n)\}$

$$\{w(n)\}=\{x(n-m)\} \tag{7-3}$$

延时意味着图形后移,也可以向前移位,这时的表示式为

$$\{w(n)\}=\{x(n+m)\} \tag{7-4}$$

有时需要论及序列的能量,序列 $x(n)$ 的能量定义为

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 \tag{7-5}$$

在上述基本定义的讨论中,我们以符号 $\{x(n)\}$ 表示序列,而符号 $x(n)$ 是指序列中的第 n 个数值。今后,为书写简便,我们就以 $x(n)$ 表示序列,不再加注括号。$x(n)$ 可写成一般闭式的表达式,也可逐个列出 $x(n)$ 值。通常,我们把对应某序号的数值称为在第 n 个样点的"样值"。

例 7-1 已知序列 $x(n)$

$$x(n)=\begin{cases}0.5 & (n=-1)\\ 1.5 & (n=0)\\ 1 & (n=1)\\ -0.5 & (n=2)\\ 0 & (n\text{ 为其它值})\end{cases}$$

求 $y(n)=x(n)+2x(n)x(n-2)$

解 依次可以求出

$$x(n-2)=\begin{cases}0.5 & (n=1)\\ 1.5 & (n=2)\\ 1 & (n=3)\\ -0.5 & (n=4)\\ 0 & (n\text{ 为其它值})\end{cases}$$

$$2x(n)x(n-2)=\begin{cases}1 & (n=1)\\ -1.5 & (n=2)\\ 0 & (n\text{ 为其它值})\end{cases}$$

$$y(n)=\begin{cases}0.5 & (n=-1)\\ 1.5 & (n=0)\\ 2 & (n=1)\\ -2 & (n=2)\\ 0 & (n\text{ 为其它值})\end{cases}$$

求解过程的序列图形示于图 7-2。

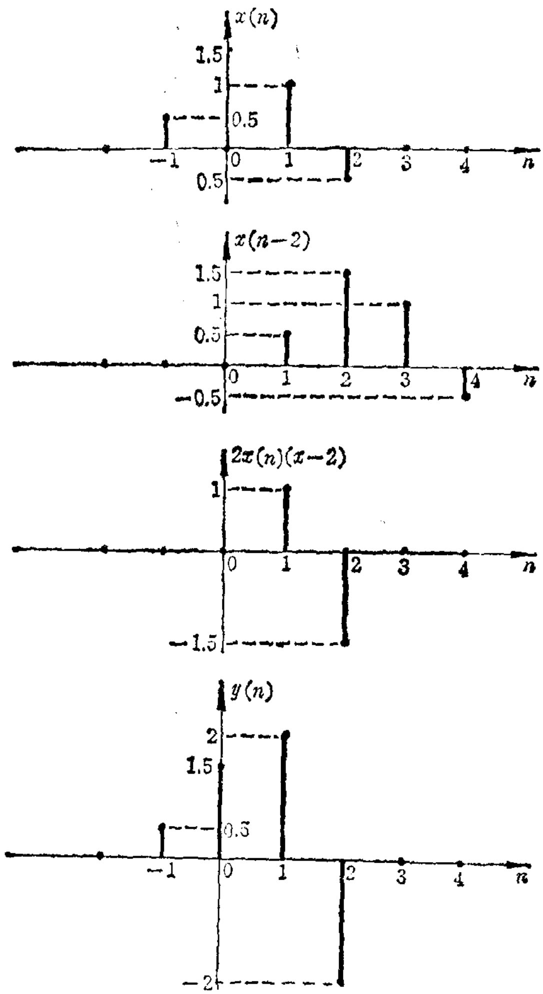

图 7-2　例 7-1 的图形

下面介绍一些常用的典型序列

(1) 单位样值信号 (*Unit Sample* 或 *Unit Impulse*)

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases} \tag{7-6}$$

此序列只在 $n=0$ 处取单位值 1，其余样点上都为零，如图 7-3。也称为“单位取样”、“单位函数”、“单位脉冲”或“单位冲激”①。它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$。但是，应注意它们之间的重要区别，$\delta(t)$ 可理解为在 $t=0$ 点脉宽趋于零，幅度为无限大的信号，或由分配函数定义；而 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 点取有限值，等于 1。

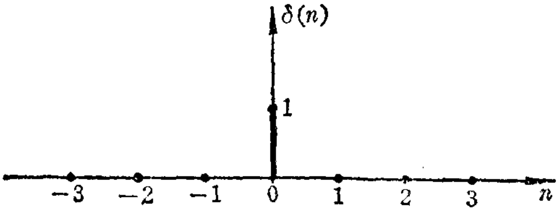

图 7-3 单位样值

(2) 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geqslant 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases} \tag{7-7}$$

它的图形如图 7-4。类似于连续时间系统中的单位阶跃信号 $u(t)$。但应注意 $u(t)$ 在 $t=0$ 点发生跳变，往往不予定义(也有时定义为

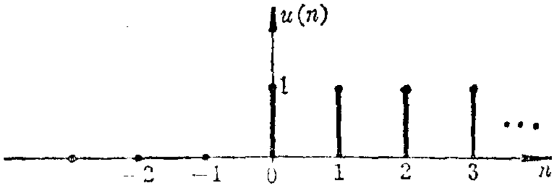

图 7-4 单位阶跃序列

① 目前，此名词尚未统一，为便于读者查阅参考书，把可能遇到的几种情况都已列上。

1/2)，而 $u(n)$ 在 $n=0$ 点明确规定为

$$u(0)=1$$

(3) 矩形序列

$$G_N(n)=\begin{cases}1 & (0\leqslant n\leqslant N-1)\\ 0 & (n<0,\ n\geqslant N)\end{cases} \tag{7-8}$$

它从 $n=0$ 开始，到 $n=N-1$，共有 N 个幅度为 1 的数值，其余各点皆为零（见图 7-5）。类似于连续时间系统中的矩形脉冲。显然，矩形序列取值为 1 的范围也可从 $n=m$ 到 $n=m+N-1$。这种序列可写作 $G_N(n-m)$。

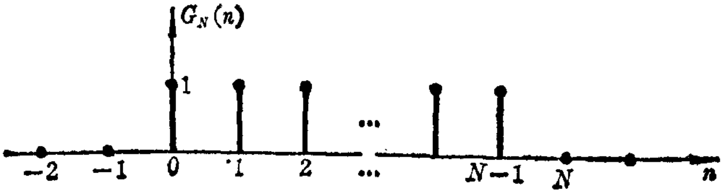

图 7-5 矩形序列

以上三种序列彼此之间有如下关系

$$u(n)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta(n-K) \tag{7-9}$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{7-10}$$

$$G_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{7-11}$$

(4) 斜变序列

$$x(n)=nu(n) \tag{7-12}$$

见图 7-6。它好象连续时间系统中的斜变函数 $f(t)=t$。类似地，

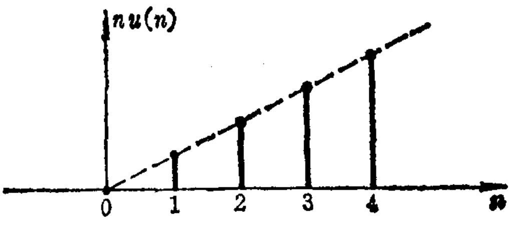

图 7-6 $nu(n)$ 序列

还可以给出 $n^2u(n), n^3u(n), \cdots, n^Ku(n)$ 等序列。

(5) 指数序列

$$x(n)=a^n u(n) \tag{7-13}$$

当 $|a|>1$ 时序列是发散的，$|a|<1$ 时序列收敛，$a>0$ 序列都取正值，$a<0$ 序列在正、负摆动。分别如图 7-7 $(a)\sim(d)$所示。此外，还可能遇到 $a^{-n}u(n)$ 序列，其图形请读者练习画出。

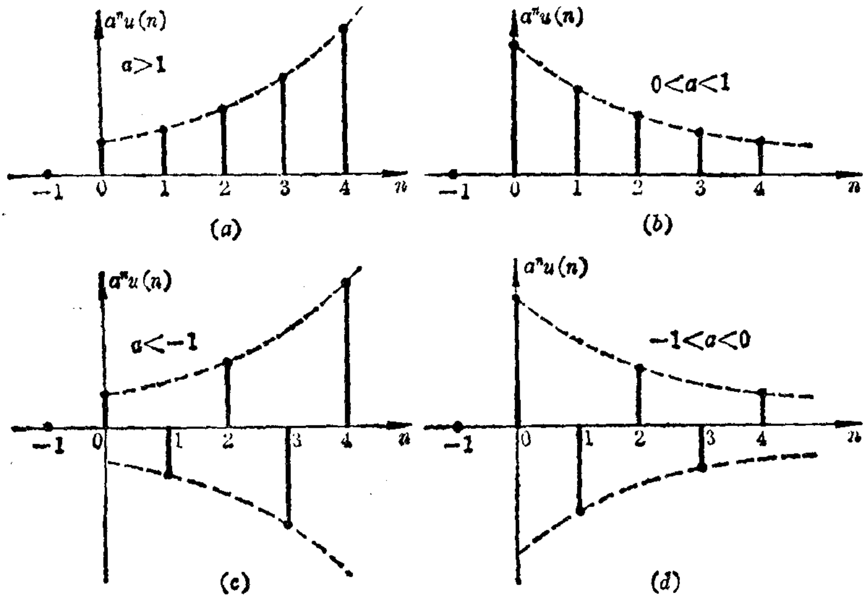

图 7-7 指数序列

(6) 正弦序列

$$x(n)=\sin n\omega_0 \tag{7-14}$$

式中，ω_0 是正弦序列的频率，它反映序列值依次周期性重复的速率。例如 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{10}$，则序列值每 10 个重复一次正弦包络的数值。若 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{100}$，则序列值每 100 个循环一次。图 7-8 示出 $\omega_0=0.1\pi$ 的情形，每经 20 个序列其值循环。显然，若 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时，正弦序

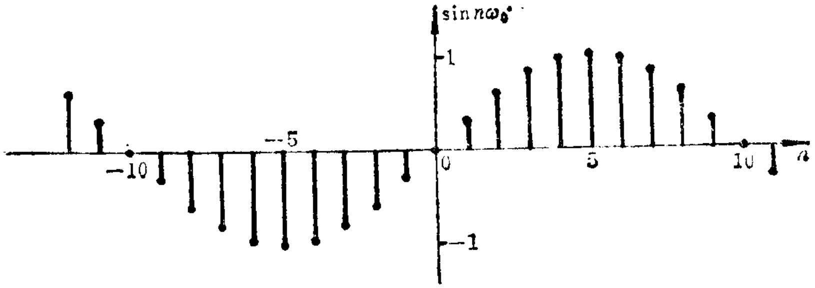

图 7-8 正弦序列 $\sin n\omega_0(\omega_0=0.1\pi)$

列才具有周期$\frac{2\pi}{\omega_0}$，若$\frac{2\pi}{\omega_0}$不是整数，而为有理数，则正弦序列还是周期性，但其周期要大于$\frac{2\pi}{\omega_0}$，若$\frac{2\pi}{\omega_0}$不是有理数，则正弦序列就不是周期性的。无论正弦序列是否呈周期性，我们都称 ω_0 为它的频率。

对于连续信号中的正弦波抽样，可得正弦序列。例如，若连续信号为

$$f(t)=\sin \Omega_0 t$$

它的抽样值写作

$$x(n)=f(nT)=\sin n\Omega_0 T$$

因此有

$$\omega_0=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f_s}$$

式中，T 是抽样间隔时间，f_s 是抽样频率 $\left(f_s=\frac{1}{T}\right)$。为区分 ω_0 与 Ω_0，我们称 ω_0 为离散域的频率（正弦序列频率），而 Ω_0 为连续域的正弦频率。可以认为 ω_0 是 Ω_0 对于 f_s 取归一化之值 $\frac{\Omega_0}{f_s}$。

与正弦序列相对应，还有余弦序列

$$x(n)=\cos n\omega_0 \qquad (7\text{-}15)$$

(7) 复指数序列

序列也可取复数值，称为复序列，它的每个序列值都可以是复数，具有实部与虚部。

复指数序列是最常见的复序列

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}$$
$$=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n \tag{7-16}$$

复序列也可用极坐标表示

$$x(n)=|x(n)|e^{j\arg[x(n)]} \tag{7-17}$$

对于上述复指数序列

$$|x(n)|=1$$
$$\arg[x(n)]=\omega_0 n$$

最后，我们简要讨论离散时间信号的分解。一种常用的分解方法是将任意序列表示为加权、延迟的单位样值信号之和

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{7-18}$$

很明显，这是由于

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$

$$x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n) & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$

因此，式(7-18)成立，在第7.6节，我们将运用这一概念引入“卷积和”。

7.3 离散时间系统的数学模型

一个离散时间系统，其激励信号 $x(n)$ 是一个序列，响应 $y(n)$ 为另一序列，示意如图 7-9。显然，此系统的功能是完成 $x(n)$ 转变为 $y(n)$ 的运算。

图 7-9　离散时间系统

按离散时间系统的性能，可以划分为线性、非线性、时不变、时变等各种类型。目前，最常用的是“线性、时不变系统”。本书的讨论范围也限于此。

在绪论 1.8节，我们曾给出线性时不变系统的基本特性。这里，针对离散时间系统的特点再作一些说明。

线性离散时间系统应满足均匀性与叠加性。均匀性与叠加性的意义是：对于给定之系统，若 $x_1(n)$、$y_1(n)$ 和 $x_2(n)$、$y_2(n)$ 分别代表两对激励与响应，则当激励序列是 $c_1x_1(n)+c_2x_2(n)$ 时（c_1, c_2 分别为常数），系统的响应为 $c_1y_1(n)+c_2y_2(n)$。此特性示意于图 7-10。

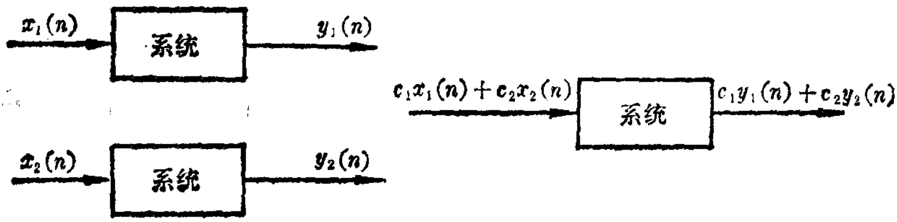

图 7-10　线性系统的均匀性与叠加性

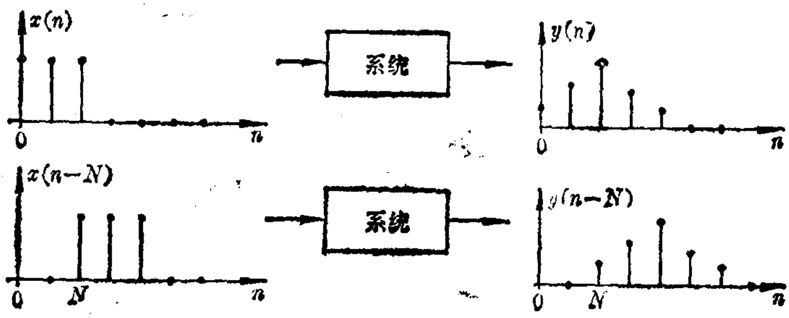

图 7-11　时不变系统特性