电动力学及狭义相对论

張宗燧著

科学出版社

電動力學及狹義相對論

張宗燧

科學出版社

內 容 提 要

本書分三部分：一爲微觀的電動力學，一爲狹義相對論，一爲電子論。第一部分討論麥克斯韋場方程的性質及解，電子的輻射等等；第二部分爲狹義相對論的一個較全面的介紹，包含了四維向量分析；第三部分介紹了較近代的電子理論的一部分，可供研究此方面及研究量子電動力學的同志的參考。

電動力學及狹義相對論

著者　張　宗　燧

出版者　科　學　出　版　社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

印刷者　中國科學院印刷廠

總經售　新　華　書　店

1957年12月第一版
1958年6月第二次印刷
(京) 1,646－2,453

書號：0925
字數：405,000
開本：787×1092 1/18
印張：22 5/9

定价：(11) 3.90 元

序

這本書是爲綜合性大學物理專業及師範學院物理專業師生的參考而寫的。

由章節的目錄可以看出，這本書的主要內容分爲三部分：一爲電動力學的基礎理論，一爲狹義相對論，一爲經典電動力學、電子運動方程的較近代的理論；每一部分約佔全部篇幅的三分之一。所以這樣地取材，除了第一部分外，需要作一些解釋。第一，我們之所以在狹義相對論上化去這樣多的篇幅，是因爲目前我國介紹狹義相對論的書籍很少，所以一本關於電動力學的書似乎非但應該包含這一部分，而且必須較詳盡地介紹這一部分。據作者猜想，這一部分對於教狹義相對論的教師而言，可能是有些用處的。第二，本書對宏觀電動力學的理論敍述的比較少，原因是我們已經有了一本極好的宏觀理論的書——Тамм 所著電學原理——的譯本。因此，在此重複宏觀理論是不太必要的。第三，本書沒有介紹"物質的電子理論"（卽用電子在物質——金屬，介質，氣體——中的性質來解釋物質的宏觀性質的理論），是因爲用經典理論來作這樣的工作，只能是定性的、極不完全的；而如果我們要定量的結果，則非走入量子力學（及統計力學）不可。這樣的工作顯然不能放在這本書中（除非把它的篇幅放大一倍）而應該另成一本專書。因此，除了第一部分電動力學的基礎及第二部分狹義相對論外，我們只簡單地介紹了一些比較近代的經典電動力學。由於篇幅及作者目前精力的限制，這個介紹也不是全面的[1]。雖然如此，作者認爲這一些介紹是有它的意義的。它可以使讀者（初步地）了解經典電動力學中處理電子運動方程而遇到的困難，有些什麽解決這個困難的企圖，等等；這樣它可以使讀者對於經典電動力學的成就與困難，有更深刻的了解。

以上是關於內容的問題。至於閱讀程序，作者試作以下的建議：不妨先讀第一、第二兩部分的大字，再讀這兩部分的小字，最後讀第三部。理由是：第三部一般講來不是教學所需的內容，而第一、第二兩部的大字是教學上比較有用處的。在寫這本書的時候，作者曾作了一些安排，使得讀第一、第二兩部的大字而不讀小字，是完全可以的。至於要閱讀第三部，那末最好先閱讀第一、第二兩部的小字。

1) 例如狄拉克在 1951，1952 所發表的電子理論（*Proc. Roy. Soc.* **A209** (1951), 291; **212** (1952), 330.）卽未包含在本書內。

對於內容的寫法，也有幾點需要解釋。首先，也許有人在閱讀後覺得數學的計算過程，寫得過於仔細一些。其實，作者對於某些計算，所以如此不厭詳盡，乃是因爲考慮到目前我國學生的一般水平及部分教師的水平。在目前的綜合性大學及師範學院的教師們中，一部分教師在以往從未學過數學物理方程。將數學上的計算寫得過於簡短，對於這些少數教師的閱讀，是會增加困難的。其次，也許有些讀者感覺書中數學氣氛太重。其實，書中數學氣氛一點也不重，——如果讀者感覺有些數學上的討論是不必要的，那末請逕把這些討論忽略去好了。再其次，也許有些讀者感覺這本書對於許多理論，都有批評之處，而擁護得不够熱烈。其實，這本書並沒有否定任何理論的成就，而只是在指出他們的優點後，也附帶地指出他們的缺點。這樣的做法在作者看來，正是所有的書所應該做的。只有這樣才能使讀者更快地、更深刻地認識以往各種理論的成就的程度，由而建立新的、更好的理論。

直到現在爲止，還沒有提起這本書的缺點。關於這一點，可以肯定地說，缺點是决不可能避免的。首先，作者自己的科學水平是極有限的，哲學修養也低，單是這兩點便不可避免地在書中帶來了一些不成熟或錯誤的討論、結論。其次，作者在這幾年中未曾教過電動力學的課，因此對於這本書作目前師生教學參考用是否合適——即有些章節是否寫得太深、或太淺——沒有很好的把握。最後，作者最近身體不好，精神不足，因此雖然極力避免筆誤，但事實上無論在文字中或在公式中，筆誤也可能出現的。（說上面的這句話的意思，當然不是藉此而避免錯誤的責任；所有的錯誤的責任，當然是作者的。）主要的缺點當然是由於第一個理由而來的。

因爲各種缺點都可能存在，作者誠懇地希望讀者對於這本書作些批評。這樣，無論對於這本書，或對於作者本人，或對於其他讀者，都是有所裨益的。

最後，作者願藉此機會，對蘇聯紅十字醫院的幾位大夫——尤其是孟家美大夫——表示最誠懇的謝意。沒有他們對我的關懷、悉心醫治，我的身體情況决不能允許我以課餘時間內在一年中完成這本書。作者也願藉此機會，對以前中央大學、北京大學裏學過本書內容一部分的同學表示感謝；由於他們與我的討論，使我澄清了一些有關的問題。當然，我也感謝科學出版社中許多同志爲出版這本書而化去的辛勤勞動以及北京師範大學理論物理進修班許多同志所作的校對工作；沒有這一些，這本書的出版是不可能的。

作者謹識

於北京師範大學理論物理教研室，1955年11月

目　　錄

第一部　電動力學的基礎理論

第二部 狹義相對論

第三部　近代的電子理論及電子的一些運動示例

第一部　電動力學的基礎理論

第一章　微觀理論的基本方程

§1. 三個基本假定

如衆所週知，電磁學的理論建築在麥克斯韋（Maxwell）的方程上。我們在這裏首先敍述在微觀的電磁理論中的麥克斯韋方程。它同電荷不滅的假定、洛倫茲（Lorentz）力的假定，成爲微觀理論的三個基本假定，成爲理論的出發點。

很顯然地，無論是麥克斯韋方程，或電荷不滅的假定，或洛倫茲力的假定，都是根據大量的實驗結果而得來的（其中絕大部分是宏觀世界中的實驗）。但在一個微觀的、演繹的理論中，它們可以認爲是假定，是出發點。將它們認爲假定是否犯了錯誤，主要在於由它們推演出來的理論結果（宏觀的及微觀的），是否與實驗結果符合。

(1) 電荷不滅的假定

我們首先假定電荷是存在着的，而它在某一個體積中的總量是不能被創造或被消滅的。電荷可以分爲兩種：第一種是點電荷，即電荷分別集中於一些幾何點中；第二種是空間電荷，即電荷分佈在空間，使空間各處有一個電荷密度 ρ，而當我們引入一個坐標系 (x, y, z) 去描寫各點的位置時，ρ 成爲 (x, y, z) 的一個有限的、足够平滑的、可以對 x、y、z 微分的函數。在本書中，我們將盡量避免對於數學上的一些較嚴謹的討論（例如一些函數是否可以微分），如果這些討論不帶來一些實質上於物理有關的結果[1)]。

在 (x, y, z) 點的密度 ρ 的定義顯然爲

$$\rho(x, y, z) = \lim_{V\to 0} \frac{e}{V}, \tag{1.1}$$

式中 V 代表包含 (x, y, z) 點的一個小體積，e 爲體積 V 中的電荷；取極限 $V\to 0$

1) 因爲如果不避免這些討論，那麼假定電子是帶有一個均匀電荷密度的圓球，也會帶來麻煩；因爲 ρ 在圓球的面上是不連續的，更不必談它有否微商。那時我們必須假定 ρ 在圓球的中部幾乎爲一常數，而在圓球的表面附近，ρ 逐漸地趨近於零，這便是不必要的討論。

時，必須使 V 中各點俱趨近於 (x, y, z)。（最末一句話是爲了避免 V 成爲一極長而極細的柱體。）這與宏觀的理論的不同處，在於此間 V 可以是數學上的無窮小，而在宏觀理論中，V 只是一個“物理小”的體積。

我們在開始的幾章中只討論第二種電荷，卽假定電荷有一個有限的密度 ρ，而不假定電荷集中於幾何點中。這二種電荷在理論上需要不同的處理；在下面討論到電磁場所適合的微分方程時卽可以看到。另一方面，先假定帶電體（例如電子）有一大小，例如假定電子爲一個半徑爲 a 的圓球（卽討論第二種電荷），然後令帶電體的體積（例如電子的半徑 a）趨近於零，同時令帶電體的總電荷在此變化中不變，也可以得着假定電荷爲幾何點的理論結果。

在不同時刻 t，(x, y, z) 點處的密度 ρ 是可以不同的。因此一般地講，ρ 是 x, y, z, t 的函數；

$$\rho = \rho(x, y, z, t)\,. \tag{1.2}$$

在宏觀理論中，如果我們假定所有的電荷都是點，每個帶有電荷 e，取同樣的速度 $\boldsymbol{v}$，而又如果質點的宏觀密度爲 n，那末在一秒中流過一個 $d\boldsymbol{S}$ 面的電荷卽是下圖中的斜柱體中的質點數乘上 e，卽是

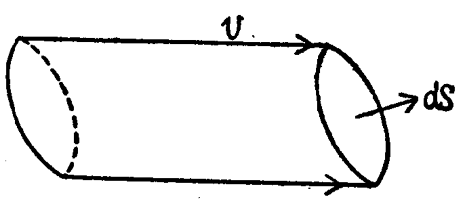

圖 1

$$ne(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S})\,,$$

卽是

$$\rho(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S})\,.$$

同樣，在微觀理論中，我們假定在時刻 t 在任意一點 (x, y, z) 上，有一個矢量 $\boldsymbol{v}$，使

$$\rho(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}) \tag{1.3}$$

代表在 t 附近的一秒中在 (x, y, z) 點附近的 $d\boldsymbol{S}$ 面上所流過的電荷。在 $\rho=0$ 處，流量亦爲零。流量 (1.3) 式實際上卽是 $\boldsymbol{v}$ 的定義。

我們引入 $\boldsymbol{j}$，定義

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}\,; \tag{1.4}$$

正同 ρ, $\boldsymbol{v}$ 一樣，$\boldsymbol{j}$ 爲 x, y, z, t 的函數。$\boldsymbol{j}$ 將稱爲電流密度。

極易證明，如果一個帶電體有一個均勻電荷密度 ρ，而又如果此帶電體整個地以速度 $\boldsymbol{u}$ 運動（卽在運動中沒有形變），那末 $\boldsymbol{v}$ 卽是 $\boldsymbol{u}$。

討論在空間不隨時間改變（以後簡稱“不改變”）的某封閉曲面 S。討論在時刻 t 及 $t+\Delta t$ 中 S 所包含的總電荷的差別，即

$$\int \rho(x,y,z,t+\Delta t)\,dV-\int \rho(x,y,z,t)\,dV;$$

式中 $\int dV$ 代表體積積分，積分區域為 S 所包含的體積。因兩個積分的積分區域相同，得

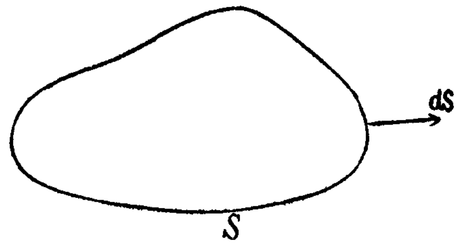

圖 2

$$\iint\Big[\rho(x,y,z,t+\Delta t)-\rho(x,y,z,t)\Big]dV=$$
$$=\iint\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t+O[(\Delta t)^2]\right\}dV. \tag{1.5}$$

由於電荷在此體積中的總量是不能被創造或被消滅的，那末上式便必然等於電荷在面 S 上的流入。令 $d\boldsymbol{S}$ 的方向為向外的，那末在面 S 上的流入為

$$-\int \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}\,\Delta t,$$

亦即

$$-\int(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v})\,dV\,\Delta t; \tag{1.6}$$

式中 $\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}$ 代表 $\rho\boldsymbol{v}$ 的散度，等於 $(\partial(\rho v_x)/\partial x)+(\partial(\rho v_y)/\partial y)+(\partial(\rho v_z)/\partial z)$。注意 (1.6) 更正確地寫時，(1.6) 式中的 $\rho\boldsymbol{v}$ 應注明為 t 時刻的 $\rho\boldsymbol{v}$，同時也應加入 $O[(\Delta t)^2]$ 項。使 (1.5)，(1.6) 相等，令 $\Delta t\to 0$，即可忽略 $(\Delta t)^2$ 項，得

$$\iint\left[(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]dV=0. \tag{1.7}$$

由於 S 是任意的，S 所包含體積也是任意的，得[1)]

$$\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{1.8}$$

1) 由 (1.7) 得 (1.8) 的證明是極易的。因為如果在某時在某點 P 處 (1.8) 的左方不等於零，而等於某值 a。由於連續性，在此時在此點附近各點的

$$\nabla\cdot\rho v+(\partial\rho/\partial t)$$

與 a 同一符號；因此如果取 V 包含此點 P，同時，取得足够地小，那末對於這一個體積，(1.7) 式中的被積函數在各點取同一符號，因此 (1.7) 式不能成立。這類的證明，以後不再重複。

這稱爲連續性方程。由於它是從電荷不滅的假定而獲得,所以在任何 x, y z, t 都必須滿足。這可以認爲是電荷不滅的假定的數學形式。

(2) 麥克斯韋方程

假定在任何時刻 t 在任意一點 (x, y, z) 處,有兩個矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$; $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 是 x, y, z, t 的函數,稱爲矢量場。我們假定它們適合

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \boldsymbol{v}, \tag{1.9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{1.10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \tag{1.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho; \tag{1.12}$$

式中 $\nabla \times \boldsymbol{E}$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{H}$ 分別地代表 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的旋度,而 c 是一個常數。顯然地,$\boldsymbol{E}$ 卽是微觀理論中的電場,$\boldsymbol{H}$ 卽是微觀理論中的磁場。由 (1.9), (1.12) 可以看出,c 代表靜電單位電荷與電磁系單位電荷的比值。(1.9)—(1.12) 式稱爲微觀的麥克斯韋方程,以後常簡稱爲麥克斯韋方程。當然,我們應該在此強調,雖然 (1.9)—(1.12) 在我們的理論中稱爲假定,他們事實上是很多年的實驗結果的總結。

我們在此必須證明 (1.8) 與麥克斯韋方程互相沒有衝突,可以有共同的解。具體地說,卽是要求證明如果已知 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 適合了 (1.8) 式,那末 (1.9)—(1.12) 式對於 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 來說是有解的。在這個討論裏,我們首先指出如果 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 爲已知的 x, y, z, t 的函數,那末 (1.9), (1.10) 兩式同 $t=0$ 時刻的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 值(稱爲起始條件)便決定了 $t>0$ 各時刻的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。這是證明的第一步。其次我們證明如果已知的 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 滿足 (1.8) 式,而又如果在 $t=0$ 時,(1.11) 及 (1.12) 式都滿足,那末在 $t>0$ 的任何時刻,(1.9) 及 (1.10) 的解也滿足 (1.11) 及 (1.12)。這是證明的第二步。以上說明如果我們的起始條件滿足 (1.11) 和 (1.12),又如果已知的 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 滿足 (1.8),那末 (1.9)—(1.12) 有共同的解,而解是唯一的。

第一步中的證明如下:(1.9) 和 (1.10) 的微分方程,與下列微分方程式組

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, \cdots y_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, y_2, \cdots y_n) \tag{1.13}$$

的性質相彷彿，所不同的只是在 (1.9) 和 (1.10) 中所求的乃是在不同點 (x, y, z) 上的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，求這些量如何為 t 的函數；而在 (1.13) 中所求的乃是相當於不同 n 值的 y，求這些量如何為 t 的函數。換句話說，(1.9) 和 (1.10) 的形式與 (1.13) 相似，在不同點 (x_1, y_1, z_1)，$(x_2, y_2, z_2)\cdots$ 上的 $\boldsymbol{E}(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{H}(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{E}(x_2, y_2, z_2)$，$\boldsymbol{H}(x_2, y_2, z_2)\cdots$ 在 (1.9) 和 (1.10) 中的地位相當於 (1.13) 中的 $y_1, y_2, \cdots y_n$。(1.13) 有解，並且在固定的起始條件下只有一個解[1]。如果不要求過分的嚴謹，我們可以用以下的證明。

已有在 $t=0$ 的起始條件，即已知在 $t=0$ 時的 $y_1, y_2\cdots$ 的值；稱它們為 y_1°，y_2°，…。代入 (1.13) 式右方，即獲得 $t=0$ 時的 dy_1/dt，dy_2/dt，…；稱它們為 $(dy_1/dt)^\circ$，$(dy_2/dt)^\circ$，… 等等。將 (1.13) 式兩方對 t 微分，再以已知的 y_i°，$(dy_i/dt)^\circ$，$(i=1,2,\cdots n)$ 代入此式的右方，即獲得 d^2y_i/dt^2 在 $t=0$ 的值 $(d^2y_i/dt^2)^\circ$。將 (1.13) 兩方對 t 微分二次，以已知的 y_i°，$(dy_i/dt)^\circ$，$(d^2y_i/dt^2)^\circ$ 代入此式的右方，即獲得在 $t=0$ 時 d^3y_i/dt^3 的值，…。以此類推，可以獲得在 $t=0$ 時 y_i 對 t 任何高次微商的值，因此，利用

$$y_i(t) = y_i^\circ + t\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^\circ + \frac{1}{2}t^2\left(\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)^\circ + \cdots + \frac{1}{n!}t^n\left(\frac{d^ny_i}{dt^n}\right)^\circ + \cdots,$$

便可以算出在 t 時刻的 y_i。

用同樣的精神可以證明 (1.9) 和 (1.10) 在已知的起始條件下有解，並且解是唯一的。但是必須指出，這個證明是形式的，因為在 (1.13) 式中只有有限的變數 y_n，而在這裏我們有無窮多的點，因而有無窮多的變數（多得不可以列舉）。因此，嚴格的討論不允許我們將 (1.9) 和 (1.10) 看成一組常微分方程，而必須以偏微分方程來看待它們。那時，我們非但需要起始條件，而且需要邊界條件。我們在此暫時不要求這樣嚴謹的討論。

第二步的證明如下：在 (1.9) 式兩方乘以 $\nabla\cdot$，得

---

1) 嚴格的證明見 L. Bieberbach：微分方程理論，第二章，或 В. И. Смирнов：高等數學教程第二冊 §51。那裏用的是"逐步漸近法"，而 f_1，f_2，… 等均假定滿足黎浦希茲 (Lipschitz) 條件。沒有這條件，便不易獲得所需要的證明。

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\frac{4\pi}{c}\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}=0.$$

利用已知的 (1.8) 式,消去 $\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}$, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\nabla\cdot\boldsymbol{E}-4\pi\rho\}=0.$$

對 t 積分,得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}-4\pi\rho=f(x,y,z).$$

如果已知在 $t=0$ 時刻 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho$, f 必然爲零, 因此在任何 $t>0$ 的時刻, (1.12) 式也成立。同樣在 (1.10) 式兩方乘以 $\nabla\cdot$, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{H})=0,$$

對 t 積分,得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=g(x,y,z).$$

如果已知在 $t=0$ 時 $\boldsymbol{H}$ 到處的散度爲零, g 必然爲零,因此 $\boldsymbol{H}$ 的散度保持爲零。

(1.9)—(1.12) 是爲了第二種電荷而建立的。在 (1.9)—(1.12) 中, ρ 取有限的値。如果要討論點電荷,由於在點電荷處 ρ 爲無窮大,上面的微分方程基本上失去了意義。在下節中,我們將引入一種函數,稱爲 δ 函數,使點電荷所產生 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的討論,與帶有限密度的電荷所產生的電磁場的討論,形式上相似。如果要求嚴格地討論點電荷所產生的電磁場,那末我們假定在點電荷以外各點的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$, 適合 $\rho=0$ 的 (1.9)—(1.12) 式, 而在點電荷上, 假定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的性質是奇異的,再假定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在奇異點的周圍取某些已知的性質[1]。這樣的討論是不方便的。

(3) 洛倫兹力

我們再假定當電荷密度是有限時,在小體積元 dV 中的電荷所受的力是

$$\rho\,dV\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right), \tag{1.14}$$

式中 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 乃是在此體積中某點的電磁場。 正同 (1.9)—(1.12) 一樣, (1.14) 雖

1) 最後的假定的必要性可以由靜電學中拉普拉斯方程

$$\nabla^2V=0$$

的討論看出。如果 V 除開原點外到處適合上式, V 的解不是唯一的, 而必須由原點附近 V 的性質而決定 (С. Л. Соболев, 數學物理方程,第十章)。這相當於在原點可以有電荷,電偶極子,電多次極等等的事實。

然在我們的理論中以"假定"的身份出現，但它實際上是許多年的實驗結果的總結。

在此我們可以看到如果電荷集中於幾何點，(1.14) 式便不能應用，因爲點電荷對於 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 來說是奇異點，那裏的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是無窮大，使 (1.14) 失去了意義。這個困難與以下所討論的"電子的本身力" (§ 27) 是分不開的。這也是使我們在最初的討論中寧願自第二種電荷出發的理由。

總結以上，可見我們的假定乃是連續性方程 (即 (1.8) 式)，麥克斯韋方程 (即 (1.9)—(1.12) 式) 及洛倫兹力 (1.14)。連續性方程告訴我們 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 必須適合某些條件。麥克斯韋方程告訴我們如何由已知的 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 來決定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，亦即由已知的 ρ 和 $\rho\boldsymbol{v}$ 來計算由與這些電荷相應的電磁場。這個電磁場以後將簡稱爲這些電荷所產生的電磁場。最後洛倫兹力告訴我們電荷所受的力。很顯然地，我們在此缺少電荷的運動方程；我們很容易想像，有了這個方程及以上的三個假定，便能自已知的起始條件完完全全地决定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 以及電荷此後的一切情形。但電荷的運動方程的討論，至今還沒有完滿的解决。我們將於第五章及第九章中討論電子的運動方程。

值得指出：在我們的出發點中，磁荷是不存在的[1]。尋常宏觀磁荷的出現，乃是由於一個封閉電路所產生的磁場與一個磁偶極子相同的事實；這一點是大家所熟知的，我們的理論也採用了這個觀點。

§ 2. δ-函數的性質與點電荷的密度

如果一定要引入一個電荷密度來描寫一個點電荷，那末我們必須引入一個較奇怪的函數——δ 函數。爲簡單起見，先討論一維空間。令 $\delta(x)$ 定義爲以下的函數：

$$\left.\begin{aligned} &\delta(x) = 0, \qquad x > 0 \ \text{或} \ x < 0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

那末當我們有一個放在 $x=\xi$ 處的單位電荷，電荷密度 $\rho(x)$ 便成爲

$$\delta(x-\xi);$$

1) 當我們考慮電子的自轉時，磁荷是存在的，等於某一個矢量的散度，這可以用一個適當的變換消去。參閱 Д. И. Блохинцев: 量子力學原理 § 60 中最末一段討論。

因爲在 $x\neq\xi$ 處，$\rho=0$，而總電荷

$$\int \rho(x)\,dx$$

等於 1。同理，如果有點電荷 $e^{(1)}, e^{(2)}, \cdots$ 放在 $x=\xi^{(1)}, x=\xi^{(2)}, \cdots$ 處，那末，

$$\rho(x) = \sum e^{(i)}\,\delta(x-\xi^{(i)}).$$

推廣至三維空間，得

$$\rho(x,y,z) = \sum e^{(i)}\,\delta(x-\xi^{(i)})\,\delta(y-\eta^{(i)})\,\delta(z-\zeta^{(i)}). \tag{2.2}$$

如果想畫出 $\delta(x)$ 函數，那末我們畫出如下圖中的一個曲線 $f(x)$，在原點處 f

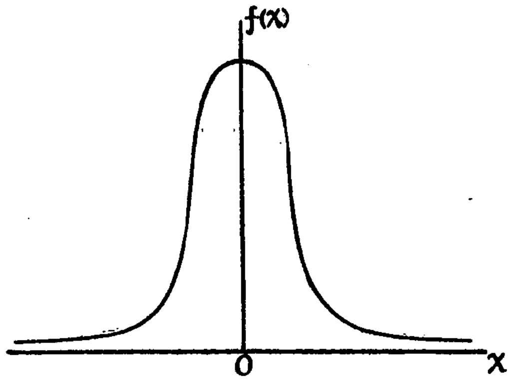

圖 3

爲極大，曲線 f 下的面積等於 1，而設想在原點的高峯變爲極高極窄時的情形（在變化時面積保持爲 1）。該時的 f 可以想像爲我們的 $\delta(x)$。

讓我們討論下面的積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx;$$

式中 $f(x)$ 爲一某已知函數。由於 $x\neq 0$ 處對於上面積分的貢獻爲零，因此積分號中的 $f(x)$ 可以換爲 $f(0)$，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = f(0). \tag{2.3}$$

如果積分極限不是 $\pm\infty$ 而是 (a, b)，那末我們很容易看出

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx = \left.\begin{matrix} f(0), \\ 0. \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} (a,b \text{ 不同符號}) \\ (a,b \text{ 同一符號}) \end{matrix}$$

此外,我們可以看到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(x-t)\,dt = f(x). \tag{2.4}$$

嚴格講來,(2.1) 所定義的 $\delta(x)$ 是不存在的[1]。那末我們應該如何地去了解像

$$f(x) = \delta(x)$$

的一個式子的意義呢?自一個具體的例出發。我們熟知在傅里葉級數的理論中[2],

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \frac{\sin\ n\left(\dfrac{t-x}{2}\right)}{2\ \sin\left(\dfrac{t-x}{2}\right)}\, dt = f(x). \tag{2.5}$$

如果 $f(x)$ 不是連續的,右方應換爲

$$\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

將 (2.5) 與 (2.4) 比較後,我們便想到可以將

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\, \frac{\sin\,[n(t-x)/2]}{\sin\,[(t-x)/2]}$$

寫爲 $\delta(x-t)$,得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\, \frac{\sin\,[n(t-x)/2]}{\sin\,[(t-x)/2]} = \delta(x-t). \tag{2.6}$$

我們在此必須强調,這僅是一個寫法而已。事實上,(2.6) 的左方的極限並不存在;寫下的 (2.6) 式僅僅代表 (2.5) 式,不多也不少。

在傅里葉積分中,我們有同樣的情形,得

---

1) 由於 (2.1) 中第一式,適合 $\delta(x)=0$ 的點集的測度等於全部積分區域,$\delta(x)\neq 0$ 的點的測度是零,因此 $\delta(x)$ 的勒倍格積分等於零;因此 $\delta(x)$ 的尋常積分,如果存在的話,也必然是零,與 (2.1) 第二式衝突。如果只討論 (2.3) 的左方,爲了數學上的嚴謹起見,不妨將左方換爲斯提葉斯積分

$$\int f(x)\,d\epsilon(x),$$

式中 $\epsilon(x)$ 代表

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \ \ \tfrac{1}{2}, & x &\geqslant 0 \\ \epsilon(x) &= -\tfrac{1}{2}, & x &< 0 \end{aligned}$$

的函數。這樣的積分是有意義的。要嚴格地討論 $\delta(x)$,請參閱 L. Schwarz: 分佈理論, 1951.

2) 參考 В. И. Смирнов: 高等數學教程, § 150.