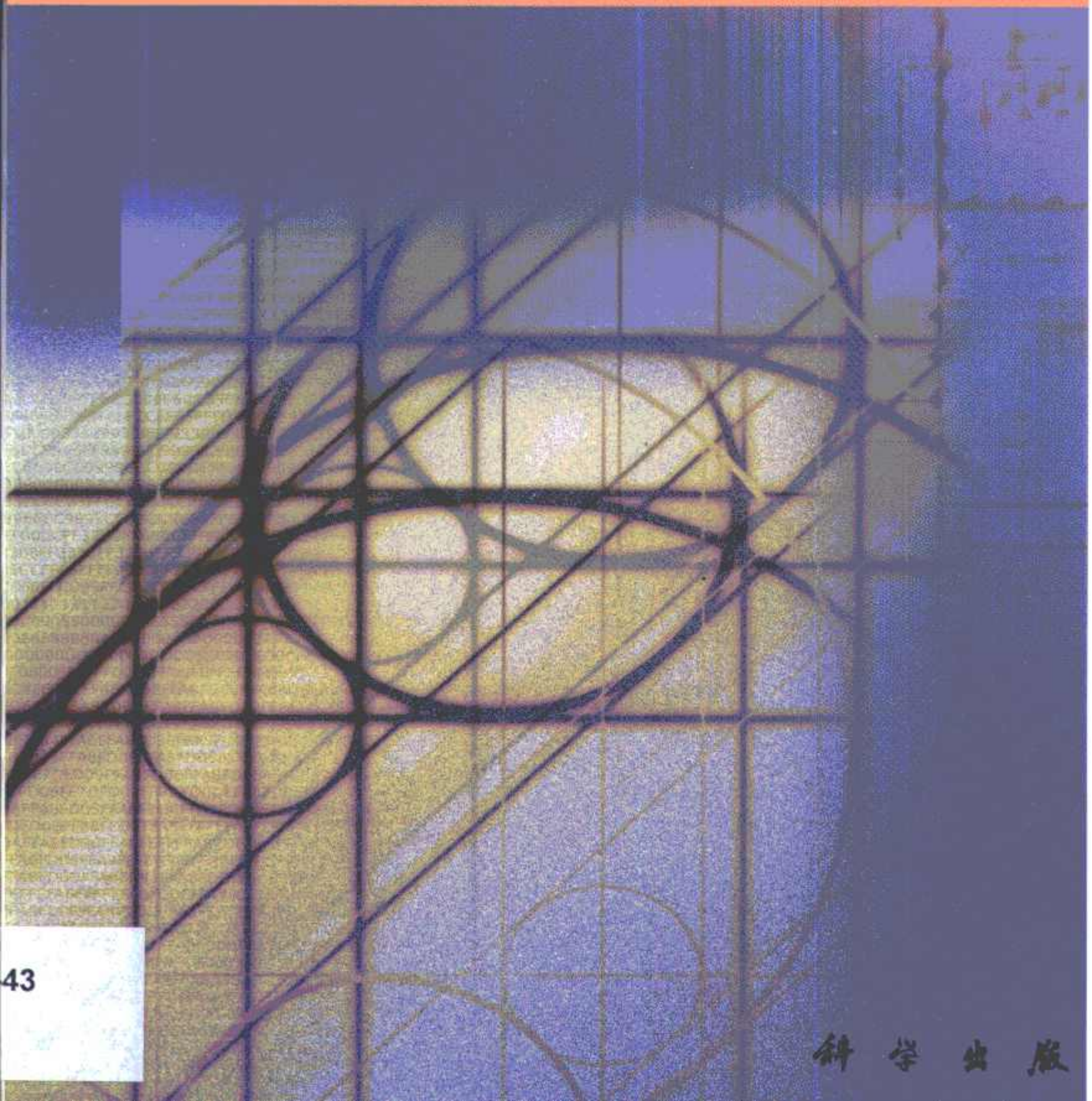
信息管理与信息系统专业系列教材

高等数学(下册)

贾启禹 编著



科学出版社

信息管理与信息系统专业系列教材

高 等 数 学

（下 册）

贾启禹 编著

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

高等数学是信息管理与信息系统专业的一门重要的基础课，对后续课程起着重要作用。本书根据本专业的高等数学大纲的要求，广泛吸收同行意见，由长期从事教学、科研的教师编写而成。

本书共十七章，分上下两册出版。上册内容为一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数。下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、差分方程和应用举例。各章配有习题，书末附有习题答案和提示。

本书取材恰当，程度适中，体系合理，叙述详细，例题、习题较多，可作为高等财经院校信息管理与信息系统专业教材，也可供高等财经院校和工科院校其他专业学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/贾启禹编著.-北京:科学出版社,2001
(信息管理与信息系统专业系列教材)
ISBN 7-03-006943-9

Ⅰ.高… Ⅱ.贾… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 036889 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001 年 6 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2001 年 6 月第一次印刷 印张:15
印数:1—4 000 字数:337 000

上下册定价:40.00 元

前　言

高等数学是高等学校信息管理与信息系统专业的一门重要的基础课。本书根据高等数学教学大纲的要求，在过去教学的基础上，广泛吸收同行的意见，从教与学两方面进行仔细的分析和研究，由长期从事教学、科研的教师编写而成。

鉴于高等数学在经济管理学科中的应用日益广泛，一般工科高等数学的内容和结构已不能满足教学需要，因此，有必要对现有的工科类、财经管理类的高等数学进行适当的改变。针对信息管理与信息系统的专业特点，我们在注意保持高等数学的内容和体系的同时，也在引进高等数学在经济管理中的应用方面作了一些有益的尝试。例如，在各章节增加了一些经济管理应用中的例题和习题；在第十六章专门编写了经济管理研究的工具——差分方程及其稳定性理论；在第十七章集中介绍了当前经常使用的经济数学模型等等。

本书可以作为高等学校工科类、管理类、财经类各专业高等数学课程的教材或教学参考书。

全书分上下两册，共十七章。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数。下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、差分方程和应用举例。各章配有习题，书末附有答案和提示。

《高等数学》由何剑平（第三、四、五、六、七、八章）、周月梅（第一、二、九、十、十一、十二章）和周若（第十三、十四、十五、十六、十七章）编写，贾启禹任主编。

在编写和出版过程中，我们得到中南财经大学信息系和科学出版社的大力支持和帮助，对此，我们表示衷心感谢。

限于水平，书中难免存在谬误之处，恳请读者批评、指正。

编　者

2000年10月

第十章　多元函数

前面讨论的函数仅依赖于一个变量，这种函数称为一元函数. 但是，许多实际问题涉及到多方面因素，反映到数学上，就是一个变量要依赖于多个变量的情形. 这就提出了多元函数以及多元函数微积分问题. 本章将在一元函数极限与连续的基础上，讨论多元函数的概念及其极限、连续问题.

第一节　多元函数概念

一元函数是函数关系中最简单的情形. 一元函数的讨论中常涉及邻域和区间的概念，下面介绍与多元函数相关的概念.

一、区域

1. 平面邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 xoy 平面上一点，δ 为正实数. 在 xoy 平面上与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid |P_0P| < \delta\},$$

或

$$U(P_0,\delta) = \left\{(x,y) \,\middle|\, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}.$$

显然，$U(P_0,\delta)$ 是指 xoy 平面上以 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心，δ 为半径的圆内点 $P(x,y)$ 的全体，见图 10.1.1.

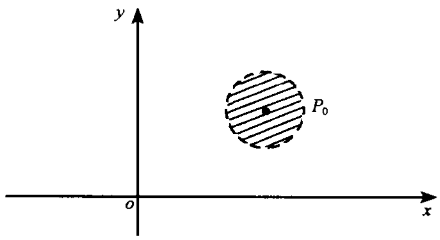


图 10.1.1

在空间直角坐标系中，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域是球心为 M_0，半经为 δ 的球的内部.

2. 区域

借助“邻域”概念，描述点与点集之间的关系.

设 E 是平面上的点集，P_0 为平面点集 E 的一点，若存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0,\delta_0)$，使 $U(P_0,\delta_0) \subset E$，则称 P_0 为 E 的内点.

若 P_0 的任何邻域 $U(P_0,\delta)$ 内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（P_0 本身可不属于 E，也可属于 E），则称 P_0 为 E 的边界点. E 的边界点的全体称为 E 的边界.

点集 E 的内点、边界点如图 10.1.2 所示.

如果点集 E 的点全是内点，则称 E 为开集. 如 $E=\{(x,y) \mid 0<x^2+y^2<6\}$ 为开集.

如果 D 为开集，且 D 内任意两点都可用 D 内有限条直线组成的折线将其连接，就称 D 为开区域.

开区域连同它的边界一起称为闭区域. 如 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 6\}$ 为闭区域.

若对于点集 E，总存在实数 $M>0$，且有 $E\subset U(0,M)$，就称 E 为有界点集，否则为无界点集. 如 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 6\}$ 是有界闭区域，而 $\{(x,y)\mid x^2+y^2>6\}$ 为无界区域.

需要说明的是，空间区域与平面区域一样，常用一组不等式表示，下面通过几例来说明如何作区域的简图.

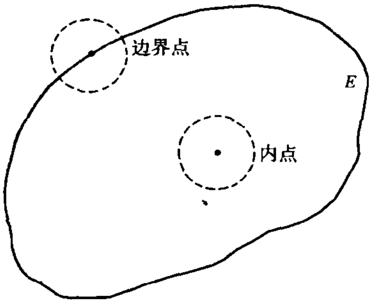


图 10.1.2

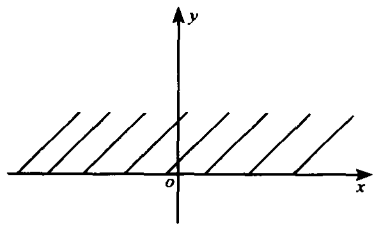


图 10.1.3

在 xoy 平面上，$y\geqslant 0$，表示 x 轴上方的点所确定的无界区域，如图 10.1.3 所示；$x\geqslant 0$ 表示 y 轴右边的点所确定的无界区域，如图 10.1.4 所示；$x^2+y^2>1$ 表示圆心在原点的单位圆外部的点所确定的无界区域(如图 10.1.5 所示)；$y\geqslant x^2$ 表示抛物线 $y=x^2$ 上部的点所确定的无界区域，如图 10.1.6 所示；$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\end{cases}$ 表示抛物线 $y=x^2$ 上部与单位圆内的点所确定的有界闭区域，如图 10.1.7 所示.

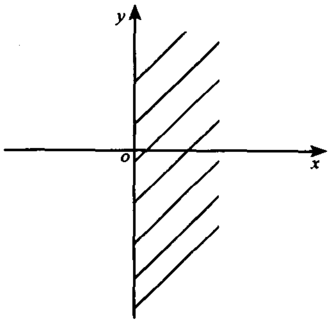


图 10.1.4

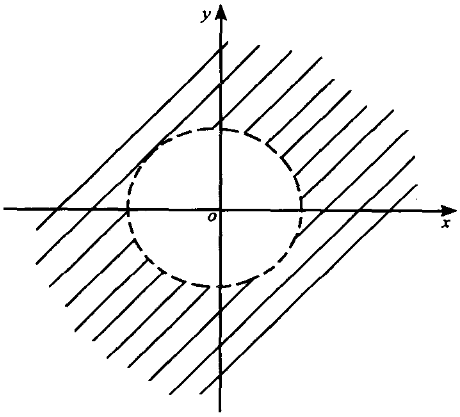


图 10.1.5

在 $oxyz$ 空间，$z\geqslant 0$，表示 oxy 平面上方的点所确定的无界区域；$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，表示球心在原点，半径为 R 的球面及球内的点所确定的有界闭区域.

【例 10.1.1】 作出由曲面 $3(x^2+y^2)=16z$ 和 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ 所围区域简图.

解：方程 $3(x^2+y^2)=16z$ 表示顶点在原点的旋转抛物面；方程 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ 表示球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 的上半球面，所围区域简图见图 10.1.8.

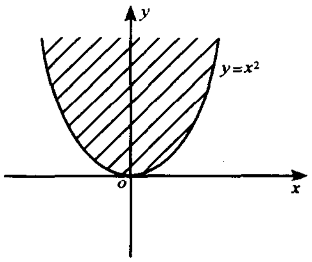


图 10.1.6

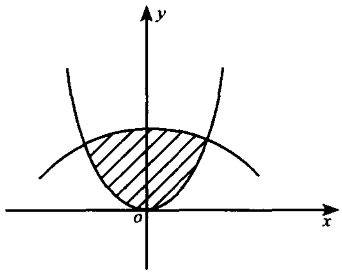


图 10.1.7

【例 10.1.2】　作出由 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x+y\leqslant1,y^2+z^2\leqslant1$ 所确定区域的简图.

解：$x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$ 表示第一卦限，$x+y=1$ 表示过点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$且平行于 z 轴的平面，$x+y\leqslant1$ 表示以这个平面为界限又包含原点在内的那部分空间；方程 $y^2+z^2=1$ 表示母线平行于 x 轴，以 yoz 面上曲线 $y^2+z^2=1$ 为准线的圆柱面，$y^2+y^2\leqslant1$ 就表示这圆柱面的内部. 所围区域简图见图 10.1.9.

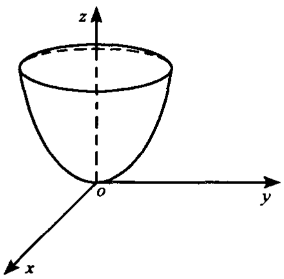


图 10.1.8

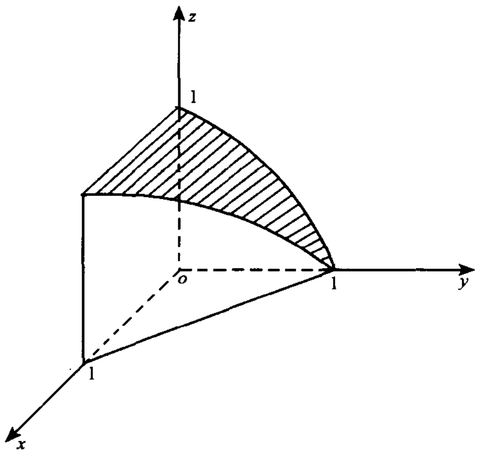


图 10.1.9

二、多元函数

在许多实际问题中，一个变量的变化总是受多种因素的影响和制约. 例如，在热力学中，一定质量的理想气体的压强 P、绝对温度 T 和体积 V 满足气态方程

$$PV=RT \qquad (R\text{ 为常数}).$$

这个方程表示了三个变量 P,T,V 之间的制约，当其中每两个变量的值确定之后，第三个变量的值就随之确定. 如果将上述方程写成

$$V=\frac{RT}{P},$$

这个式子说明 V 是依赖于 P、T 的一个二元函数.

例如，圆柱体的体积 V，底半径 R 及高 H 之间的依赖关系为

$$V=\pi R^2H,$$

这个式子说明体积 V 是依赖于底半径 R 及高 H 的二元函数.

下面给出一般二元函数的定义.

定义 10.1.1 设 D 是平面点集. 如果对于每一点 $P(x,y)\in D$,变量 z 依一定法则 f 有确定值与之对应,称变量 z 为变量 x,y 的二元函数,记为

$$z=f(x,y)\quad (\text{或 } z=f(P)),$$

其中 D 称为定义域,x,y 称为自变量,z 称为因变量,并称 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 为值域.

函数的定义域是函数概念的一个组成部分,它说明函数在什么范围内是有意义的. 一元函数的定义域大部分是区间,二元函数的定义域是 xoy 的全平面或者是由几条曲线围成的 xoy 平面中的一部分,即为平面区域.

【例 10.1.3】 求下列函数的定义域:

(1)$z=\arcsin(x^2+y^2-2x)$

解:使函数式有意义的点 $P(x,y)$ 应满足

$$-1\leqslant x^2+y^2-2x\leqslant 1,$$

即
$$x^2+y^2-2x\leqslant 1,$$

故 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2\leqslant 2\}$,见图 10.1.10.

(2)$z=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$

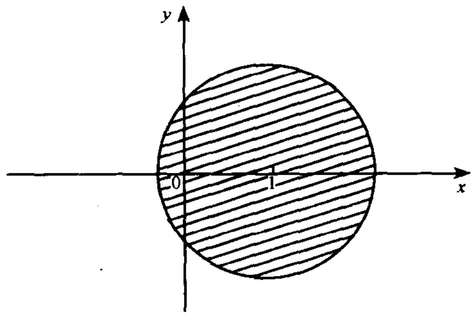


图 10.1.10

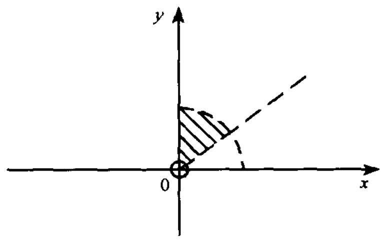


图 10.1.11

解:$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y-x>0,x^2+y^2<1\}$,见图 10.1.11.

(3)$z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

解:$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant 4x,0<x^2+y^2<1\}$,见图 10.1.12.

(4)$z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$

解:$D=\{(x,y)\mid x\leqslant x^2+y^2<2x \text{ 且 } x^2+y^2\neq 0\}$,见图 10.1.13.

(5)$u=\ln\left(z-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}\right)$

解:$D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, z>\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right\}$,见图 10.1.14.

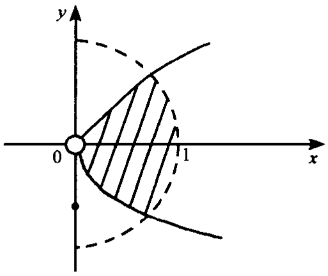


图 10.1.12

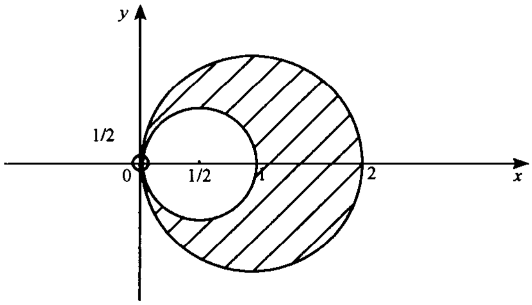


图 10.1.13

定义 10.1.2　设 D 是 n 维空间的点集. 如果对于任一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$,变量 u 依一定法则 f 有确定值与之对应,称变量 u 为变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元函数,记为

$$u = f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad (\text{或 } u = f(P)),$$

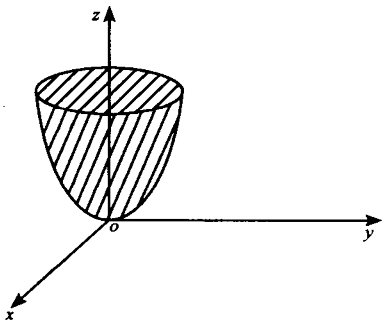


图 10.1.14

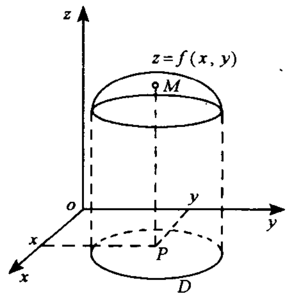


图 10.1.15

关于定义中的术语与一元、二元函数完全一样. 这里就不一一列出. 特别地,当 $n=1$ 时,n 元函数就是一元函数.

这里,三元函数的定义没具体给出,读者可根据多元函数的定义类推,只是三元函数的定义域是空间区域. 当函数的自变量多于三个时,函数的定义域就没有直观意义了.

二元函数刻画了三个变量之间的变化规律,函数的定义域是平面上区域. 因此,二元函数的图形要在三维空间画出来. 因为对于函数定义域 D 内任一点 $P(x,y)$,依照 $z=f(x,y)$就空间一点 $M(x,y,f(x,y))$与之对应,空间所有这些 M 点的全体正是函数 $z=f(x,y)$的图形. 所以,二元函数的图形是空间曲面,如图 10.1.15 所示.

二元和二元以上的函数统称为多元函数,多元函数的理论是一元函数理论的发展. 下面的讨论,我们多以二元函数为主.

第二节　多元函数的极限

函数的极限描述了当自变量变化时,函数的变化趋势. 多元函数的极限与一元函数的情形类似,只是自变量的变化过程会有着质的区别.

定义 10.2.1　设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内（P_0 可除外）有定义. 若对于任意给定的正数 ε（ε 可任意小），总存在正数 δ，使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|<\delta \quad (\text{或 } 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta)$$

的一切点 $P(x,y)$ 都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

或

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

也可记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

为区别一元函数的极限，根据二元函数极限的特征，将二元函数的极限称为二重极限.

一元函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义中，x 趋于 x_0 是指 x 以任何方式趋于 x_0，二元函数极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 的定义中，$P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 也是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$. 显然，平面上点 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式就不像一元函数极限中 x 趋于 x_0 仅有两种方向，此时，$P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 可有无穷多方向且路径又是多种多样，如图 10.2.1 所示.

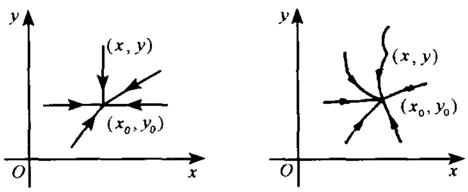


图 10.2.1

但是，无论 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 的过程多么复杂，总可以用 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 趋于 0 来表示极限过程 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$. 因此，对于二重极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 要特别注意，所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 都以常数 A 为极限. 当 $P(x,y)$ 以某特殊方式，如沿一条定直线或一曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 以常数 A 为极限，不能认为函数 $f(x,y)$ 的极限存在. 反之，当 $P(x,y)$ 以不同的方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$，函数 $f(x,y)$ 分别以不同的常数为极限. 这时，就可以断定函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限不存在.

【例 10.2.1】　讨论

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0\quad, & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点的极限.

解：当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，有：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0}=0;$$

当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于 $(0,0)$ 时，有：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0+y^2}=0.$$

虽然 $P(x,y)$沿 x 轴或 y 轴趋于$(0,0)$时，函数 $f(x,y)$都以零为极限，但并不能由此断定函数在$(0,0)$点的极限存在.

当点 $P(x,y)$沿直线 $y=kx$ 趋于$(0,0)$时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

其极限值依 k 而变，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

定义 10.2.2　设 n 元函数 $f(P)$的定义域为 R^n 中点集 D，P_0 为 D 内一点. 若对于任意给定的正数 ε(ε 可任意小)，总存在正数 δ，使得对于适合不等式

$$0 < |P_0P| < \delta$$

的一切点 $P(P\in D)$，都有

$$|f(P) - A| < \varepsilon$$

成立，则称常数 A 为 n 元函数 $f(P)$当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A.$$

特别地，当 $n=1$ 时，$f(P)$为一元函数，上述定义就是一元函数极限的定义；当 $n=2$ 时，上述定义是二元函数极限的定义. 由此可见，任意 n 元函数极限的定义与一元函数极限的定义形式完全一致，因此，一元函数的部分极限运算法则可推广到二元函数及多元函数的情形. 例如，对于二元函数来说，以下运算定理成立.

定理 10.2.1　若函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处极限存在，则

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)\pm g(x,y)] = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \pm \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$　$\left(\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\neq 0\right)$.

【例 10.2.2】　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$x^2+y^2\neq 0$，求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证：由于

$$|f(x,y) - 0| = \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant |x^2+y^2| = x^2+y^2,$$

只要

$$x^2+y^2=(x-0)^2+(y-0)^2<\varepsilon,$$

或

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\sqrt{\varepsilon},$$

就必有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon.$$

因此，对于 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，使所有适合

$$0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$$

的(x,y)，都有

$$|f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

成立. 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

【例 10.2.3】　求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证：由于

$$(|x|-|y|)^2\geqslant 0,\text{有 } x^2+y^2\geqslant 2|xy|,$$

即有
$$0\leqslant\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$$

且
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=0,$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

注意:解答过程中利用了夹逼定理.

【例 10.2.4】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x(y+1)}$.

解:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x(y+1)}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\frac{y}{y+1}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{y+1}\\&=0.\end{aligned}$$

【例 10.2.5】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

解:
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}}\\&=e^{0\times1}=1.\end{aligned}$$

例 10.2.4 和例 10.2.5 的求解过程中利用了一元函数的两个重要极限. 另外,多元函数求极限还可化多个单变量函数求极限或利用变量替换求极限等方法.

【例 10.2.6】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-x-y}$.

解:
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-x-y}&=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2e^{-x}e^{-y}+y^2e^{-y}e^{-x})\\&=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}\lim_{y\to+\infty}e^{-y}+\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\lim_{y\to+\infty}y^2e^{-y}\\&=0.\end{aligned}$$

【例 10.2.7】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解:令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,则

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{r\to0}\frac{(r\sin\theta-r\cos\theta)r\cos\theta}{r}\\&=\lim_{r\to0}r\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta),\end{aligned}$$

其中
$$|\cos\theta(\sin\theta-\sin\theta)|<M\qquad(M\text{ 为常数}),$$

$$\lim_{r\to0}r=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}r\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)=0.$$

第三节　多元函数的连续性

有了二元函数极限的概念，就可在此基础上讨论了二元函数的连续性概念.

定义 10.3.1　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在含 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，且
$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0),$$
则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点连续.

由此可见，二元函数连续的定义与一元函数连续一样都要求函数满足 P_0 点有定义，在 P_0 处的极限存在且极限值等于函数值这三个条件. 根据这三个条件可类似给出 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 处连续的定义.

定义 10.3.2　设 n 元函数 $f(P)$ 在 P_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$，则称 n 元函数 $f(P)$ 在 P_0 点连续.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点都连续，则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内连续. 在区域 D 内连续的函数 $z=f(x,y)$ 的几何图形是一张连续的曲面.

【例 10.3.1】　讨论函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & 当(x,y)\neq(0,0)时\\ 0\quad, & 当(x,y)=(0,0)时\end{cases}$$
在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解：因为
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=|x|\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|xy|}{2}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$
所以只要
$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon,$$
或
$$\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon,$$
就有
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon,$$
这样对于 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=2\varepsilon>0$，当 $0<|PP_0|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时有
$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$
则
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0),$$
故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

若函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续的三个条件中至少有一个未被满足，就称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的间断点.

【例 10.3.2】　讨论函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0\quad, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在(0,0)点的连续性.

解：由例 10.2.1 可知 $f(x,y)$在(0,0)点的极限不存在，所以点(0,0)是函数 $f(x,y)$的一间断点.

二元函数的间断点往往形成一条曲线. 例如函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-4}$$

在圆周 $x^2+y^2=4$ 上无定义，所以曲线 $x^2+y^2=4$ 上各点都是所给函数的间断点.

关于一元连续函数的四则运算定理，以及连续函数的复合函数的连续性定理及基本初等函数连续性定理，对于二元连续函数也是成立的. 由此可得，二元初等函数在其定义域内是连续的.

【例 10.3.3】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：$f(x,y)=\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$的定义域为$\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0, x>e^{-y}\}$，所以，$f(x,y)$在(1,0)处有定义并连续，从而有

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(1,0)=\ln 2.$$

在有界闭区域上连续的二元函数与闭区间上连续的一元函数有类似的性质.

定理 10.3.1(最值定理) 在有界闭区域 D 上连续的二元函数，在 D 上至少取得函数的最大值和最小值各一次.

或者说，在 D 上至少存在 P_1,P_2，对于所有 $P\in D$，有

$$f(P_2)\leqslant f(P)\leqslant f(P_1),$$

那么，$f(P_2)$是 $f(x,y)$在 D 上的最小值，$f(P_1)$为 $f(x,y)$在 D 上的最大值.

定理 10.3.2(介值定理) 设 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，若 $f(x,y)$在 D 上取到两个不同的函数值 A,B，则对于 A,B 之间任意实数 C，至少存在一点$(\zeta,\eta)\in D$，使

$$f(\zeta,\eta)=C.$$

推论 1 设 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，且 M 为 $f(x,y)$在 D 上的最大值，m 为 $f(x,y)$在 D 上的最小值，则对于满足 $m\leqslant C\leqslant M$ 的任何 C，在 D 上至少存在一点(ζ,η)，使

$$f(\zeta,\eta)=C.$$

推论 2 设 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，且在 D 上取得两函数值异号，则在 D 上至少存在一点(ζ,η)，使

$$f(\zeta,\eta)=0.$$

习 题 十

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f(y,y)$，$f(y,x)$，$f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$，$f(t,S)$.

2. 设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\quad(x>0)$，求 $f(x)$.

3. 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2\quad(x\neq0)$，求 $f(x,y)$.

4. 确定并画出下列函数的定义域：

(1)$z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；　　(2)$z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；

(3)$z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$；　　(4)$u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(5)$u=\sqrt{2az-x^2-y^2-z^2}$.

5. 作出下列函数的图形：

(1)$z=1-x-y$；　　(2)$z=x^2+y^2$；

(3)$z=xy$；　　(4)$z=\sqrt{x^2+y^2}$.

6. 设 $z=f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{y}{x}$，又 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 试将 z 表示为 (r,θ) 的函数.

7. 设 $f(x,y)=x^y$，$\varphi(x,y)=x+y$，$4(x,y)=x-y$，求 $f[\varphi(x,y),4(x,y)]$，$\varphi[f(x,y),4(x,y)]$，$4[\varphi(x,y),f(x,y)]$.

8. 证明对于函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，有 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$，但 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

9. 计算下列累次极限：

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$；　$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$；

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to0+0}\dfrac{x^y}{1+x^y}$；　$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{x^y}{1+x^y}$；

(3)$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy}$；　$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy}$.

10. 判断下列各题是否有极限，若有极限并求其极限：

(1)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$；　　(2)$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$；

(3)$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$；　　(4)$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$；

(5)$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(6)$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.

11. 求下列函数的间断点：

(1)$z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(2)$z=\dfrac{xy}{x-y}$；

(3)$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$；　　(4)$z=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq0,\\ 0\quad, & y=0.\end{cases}$

12. 讨论下列函数的连续性：

(1)$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{当}(x,y)\neq(0,0),\\ 0\quad, & \text{当}(x,y)=(0,0)；\end{cases}$

(2)$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & \text{当 } x+y\neq0,\\ 0\quad, & \text{当 } x+y=0.\end{cases}$

13. 证明：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{若 } x^2+y^2>0,\\ 0\quad, & \text{若 } x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处分别关于变量 x 或 y（另一变量固定）是连续的，但对这两个变量总体而言是不连续的.

第十一章　多元函数微分法

研究了多元函数的极限与连续性后，就可以进一步研究多元函数的变化率. 由于多元函数的自变量多于两个，因此其自变量与因变量的关系要比一元函数复杂得多. 这时，可以先考虑特殊情形，即讨论多元函数关于其中一个自变量的变化率.

第一节　偏导数的概念

对于二元函数 $z=f(x,y)$，固定 $y=y_0$ 时，$z=f(x,y_0)$ 就是随 x 而变的一元函数，$z=f(x,y_0)$ 对 x 的导数，就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导数. 类似地还可讨论 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数.

一、偏导数

定义 11.1.1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，将 y 固定为 y_0，当 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，就称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记为

$$f_x(x_0,y_0),\ z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

例如

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

完全类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$f_y(x_0,y_0),z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域 D 内的每一点 (x,y) 处关于 x 的偏导数都存在，就说函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内存在关于 x 的偏导函数. 求函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导函数时，是将 y 看作常量对 x 求导数，这时，所求的函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导函数仍然是 x,y 的二元函数. 类似可以定义 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内关于 y 的偏导函数.

如同一元函数的导函数一样，以后在不至于混淆的地方也将偏导函数简称为偏导数，

记为

$$f_x(x,y),\quad z_x,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$f_y(x,y),\quad z_y,\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

偏导数的概念可以推广到更多元的函数情形. 例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处关于 x 的偏导数为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x},$$

类似地可定义 $f_y(x_0,y_0,z_0)$，$f_z(x_0,y_0,z_0)$ 及 f_x,f_y,f_z.

【例 11.1.1】　求 $f(x,y)=x^3\sin^2 y$ 在 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 处的两个偏导数.

解：将 y 视为常量，对 x 求导得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2\sin^2 y.$$

将 x 视为常量，对 y 求导得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^3\sin y\cos y=x^3\sin 2y.$$

将点 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 代入以上结果便有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=\frac{\pi}{2}}}=3x^2\sin^2 y\left.\right|_{\substack{x=1\\ y=\frac{\pi}{2}}}=3,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=\frac{\pi}{2}}}=x^3\sin 2y\left.\right|_{\substack{x=1\\ y=\frac{\pi}{2}}}=0.$$

【例 11.1.2】　求 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 的偏导数.

解：将 y 看作常量，有

$$\begin{aligned} z_x&=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_x\\ &=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

将 x 看作常量，有

$$\begin{aligned} z_y&=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_y\\ &=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

【例 11.1.3】　设 $z=x^y(x>0,x\neq 1)$，求证：

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$