天骄之路大学系列

2001 研究生入学考试

(经济类)数学

优化教程

主　编　北京大学　周明强

清华大学　高廷江

审　定　考研命题研究组

北京理工大学出版社

2001研究生入学考试

数　学

(经济类)

优 化 教 程

主编　周明强　高廷江

江苏工业学院图书馆
藏书章

北京理工大学出版社

内 容 提 要

为正确引导广大考生进行2001年研究生入学考试的总复习，我们组织了北京大学、清华大学及中国人民大学等重点大学知名专家教授编写了本丛书。作者长期从事考研命题研究、阅卷工作，并多年工作在教学指导第一线，具有丰富教学及命题经验。该书严格依照新修订的考试大纲编写，融合了近年(1992—2000)研考的最新动态，内容丰富，覆盖面广，对学生备考有很大帮助。

本书不仅是硕士研究生入学考试应试者的复习用书，也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的经济类高等院校的本科生、大专生、电大、夜大的学生的参考书，还便于自学者阅读。

本丛书封面均贴有“天骄之路系列用书”激光防伪标志，凡无此标志者为非法出版物。

盗版书刊因错漏百出、印制粗糙，对读者会造成身心侵害和知识上的误解，希望广大读者不要购买。举报电话：(010)62750867　68412850。

版权所有　　翻印必究

图书在版编目(CIP)数据

2001研究生入学考试数学优化教程.经济类/周明强，高廷江主编.—北京：北京理工大学出版社，2000.5

(天骄之路大学系列)

ISBN 7-81045-682-2

Ⅰ.2…　Ⅱ.①周…②高…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第20485号

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区白石桥路7号)

(邮政编码100081)

各地新华书店经售

北京地质印刷厂印刷

787毫米×1092毫米　16开本　32印张　865千字

2000年5月第1版　2000年5月第1次印刷

本册定价：38.00元

※图书印装有误，可随时与我社退换※

编写说明

经各家名师的苦心构思和精心编写，各位编辑的层层推敲和点点把关，一套紧跟新修订的硕士研究生入学数学（经济类）考试大纲的新型考研辅导丛书与全国广大大学生和教师见面了。

长期以来，我们感到：在考研复习阶段，考生迫切需要有一套既能夯实基础以不变应万变，又能在基础上有所拔高，掌握解题技巧及提高应试能力，同时还能与研考新形势、新变化、新理论保持同步的参考书籍。为此，我们特组织了北京大学、清华大学及中国人民大学知名专家教授共同编写了《2001 研究生入学考试优化教程》丛书。本丛书包含以下几个板块：

命题趋向阐释：详细分析近年来（包括 2000 年）考研命题的热点，通过列表总结常考内容，搜索命题奥秘，探求命题规律，预测命题趋向；

考点精要扫描：对考试大纲所要求的知识点、考点进行简明、扼要地叙述、总结、归纳，概括和阐述力求精练、解释清晰、视角广阔；

重点难点突破：对本章节内容繁杂的重点难点进行整理和提炼，并进行详尽分析与说明，使考生在以后的应试中能举一反三，触类旁通；

历年真题研读：通过对历年考研试题的探寻与研究，为考生提供历年命题热点、命题趋向及合理的复习备考方法，以致事半功倍，胸有成竹；

解题技巧导引：重点精选了各类题型的例题并作详细解答，注重启发性和培育兴趣原则，有助于读者形成正确的解题思路，把握解题技巧；

同步强化训练：精心设计题型，无陈题、旧题，不搞题海战术，务求实效性、典型性和启发性，意在培养读者的学科思想与悟性；

能力提高测试：在同步强化训练的基础上，精编了一些选题较为新颖、难度较大、综合性较强的习题，使考生能在短期内得到拔高；

参考答案提示：对于同步强化训练题和能力提高测试题，其答案中均附有解题提示或分析，特别是将容易发生的错误一一指出。

需要说明的是，为照顾广大学生的实际购买能力，使他们能在相同价位、相同篇幅内汲取到比其它书籍更多的营养，本书采用了小五号字和紧缩式排版，如有阅读上的不便，请谅解。

检验本丛书质量的唯一标准是广大师生使用本书的实践。作为教研领域的最新成果，我们期盼它的社会效益，也诚挚地希望广大师生的批评指正。读者对本书如有意见及建议，请来信寄至：(100080)北京大学燕园教育培训中心大厦 1408 室　天骄之路系列丛书编委会收。相信您一定会得到满意的答复。

本丛书在编写过程中，得到了各参编高校及北京理工大学出版社有关领导的大力支持，丛书的统稿及审校工作得到了北京大学有关专家教授的协助和热情支持，在此一并谨致谢忱。

编　者

2000 年 4 月于北京大学燕园

目 录

第一部分 高等数学

第二部分 线性代数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第三部分　概率论与数理统计初步

第一部分　高等数学

第一章　一元函数微分学

第一节　函数

〔命题趋向阐释〕

函数是微积分讨论的主要对象，它以极限理论为基础，在研究函数时我们总是要通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数关系的性质，故要用运动变化的观点来掌握函数．函数的概念、几何特性，初等函数、凸向及拐点、图形的描绘是函数中几项主要内容．在遇到要求解答的问题时，首先应判断是什么类型的问题，这时，在思想中就开始调动与之有关的知识，熟悉的、简单的和针对性强的知识点优先试用．

微积分讨论的基本对象是初等函数，基本初等函数经有限次加、减、乘、除和复合运算而得到的函数为初等函数．对于初等函数，应该根据题目的具体情况和函数构造的特点，进行适当变形，以满足解题的需要．在解题时，经常要利用等价变形（即变形的结果与没变形之前是等效的），把问题变成易于解决的问题．常用的有：恒等变形（结合变形和分解变形等），利用等式和不等式的性质进行的变形（如同解变形），配凑变形等．

最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲中规定函数部分的考试内容包括：

a．理解函数的概念，掌握函数的表示方法；

b．了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；

c．理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；

d．掌握基本初等函数的性质及图形；

e．会建立简单应用问题中的函数关系．

我们不仅应该熟练地掌握试卷三、四考试大纲中所包括的基本知识，而且应该具有运用它们解决数学问题和实际问题的本领．因此，要有计划地研究试卷三、四考试大纲所规定的基本概念的定义、性质、定理，公式和法则的某些重要的使用方法，应用范围，了解利用它们解答数学问题的特点，往往可以从这个角度帮助读者发现解题途径．不少学者认为：数学思维的一个重要特点，就是人们往往不是对问题进行正面攻击，而是不断地将它变形，直到把它转移到能够解决的问题时，也就是根据原来问题的特点，发现一个或几个比原来问题简单、难度较低、易于解决的新问题，通过对新问题的考察，发现原问题的解题途径，最后达到解决原问题的目的．

〔考点精要扫描〕

一、函数的概念

1．定义

设 x 与 y 是两个变量，分别在实数集合 X 与 Y 中取值．对每一个值 $x \in X$，按照某一法则，f 存在着惟一确定的值 $y \in Y$ 与之对应，记为 $f(x)(x \to f(x))$，则称 y 是 x 的**函数**，或称这种对应关系 f 为函数，记作

$$y = f(x) \text{ 或 } f: X \to Y,$$

并称 x 为**自变量**，y 是**因变量**，X 是**定义域**．

函数值 $f(x)$ 的全体，即集合　$\{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$

称为函数的**值域**，记作 $f(X)$. 显然 $f(X)\subset Y$.

注：(1) 这里的函数是单值的. 例如，由 $x^2+y^2=1$ 解出 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，我们分别讨论其中之一(一个单值分支).

(2) 只有一个自变量的函数，称为**一元函数**.

2. 定义域

一般分两种：

(1) 由实际问题决定定义域：例如，在某火车站某条线路的列车价目表上，对某次列车不同车站对应不同的票价，则票价是车站的函数，其定义域由该价目表所决定.

(2) 自然定义域：当函数由公式(表达式)给出时，使公式有意义的自变量的取值范围称为**自然定义域**. 我们通常讨论的定义域是指自然定义域.

使公式有意义的常遇到的 4 种情况是：

① 分式的分母不为零；

② $\sqrt[2n]{f(x)}$，n 为正整数，要求 $f(x)\geqslant 0$；

③$\log_a f(x)$，要求 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$f(x)>0$；

④$\arcsin f_1(x)$，要求 $|f_1(x)|\leqslant 1$；$\arccos f_2(x)$，要求 $|f_2(x)|\leqslant 1$.

此外，对幂指函数 $y=f(x)^{g(x)}$，要求 $f(x)>0$.

二、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果对于 $\forall x\in X$ 恒有

$$f(x)=f(-x)\quad(\text{或 } f(x)=-f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数.

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数：$|x|$，$\cos x$，x^{2n}(n 为正整数)，$e^{|x|}$，e^{x^2}，$\cdots$.

常见的奇函数：$\sin x$，$\tan x$，$\dfrac{1}{x}$，x^{2n+1}，$\arcsin x$，$\arctan x$，$\cdots$.

注：判别给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质.

①$f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

② 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点(或 y 轴)不对称，则该函数不是奇(或偶)函数.

2. 有界性

设 $y=f(x)$ 在 X 上有定义，若存在正数 M，对任意 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M(\text{即 } \exists M>0, \forall x\in X, \text{有 } |f(x)|\leqslant M),$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则，即对任意 $M>0$，至少存在一点 $x_1\in X$，使得

$$|f(x_1)|>M(\forall M>0, \exists x_1\in X, \text{使 } |f(x_1)|>M),$$

则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

通常函数的有界性与区间有关，例如 $y=\dfrac{1}{x^2}$，在$(0,1)$内无界，而在$\left(\dfrac{1}{10},1\right)$上有界.

显然，设 $f(x)$ 在 X 上有定义，若对一切 $x\in X$，存在两个实数 M 与 K，使得值域 $f(X)\subset[K,M]$，

即值域包含于一个闭区间内,则函数 $f(x)$ 在 X 上有界.

几个常见的有界函数: $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, $(-\infty, +\infty)$

$|\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|\arccos x| \leqslant \pi$, $[-1,1]$

$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{arccot} x| < \pi$, $(-\infty, +\infty)$

注: 将函数取绝对值,然后用不等式放缩法;或借助导数利用求最大(小)值法处理.

3. 单调性

设 $f(x)$ 定义在区间 X 上,$\forall x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 < x_2$,有 $f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加(单调减少).统称它们为单调函数.$\forall x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 < x_2$,有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)(f(x_1) \geqslant f(x_2))$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调不减(单调不增).

注: 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知可导,则其单调性的判别用定义;若 $f(x)$ 在区间 X 上可导,则利用导数判别简便.

4. 周期性

设 $f(x)$ 定义在 X 上,若存在常数 $T \neq 0$,满足:$\forall x \in X$,有 $x \pm T \in X$ 且 $f(x+T) = f(x)(\forall x \in X)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 为 $f(x)$ 的周期.它的几何意义是:自变量每增加或减少一固定的距离 T 后,图形重复出现.

若 $f(x)$ 以 T 为周期,则 $f(x)$ 有无穷多个周期,$nT(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 均为周期,若 $f(x)$ 的无穷多个正周期中存在最小数,称它为 $f(x)$ 的最小正周期,简称最小周期或周期.

注: 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数,主要是依据周期的定义,有时也用其运算性质.

三、初等函数

1. 初等函数的定义

由基本初等函数经过有限次的四则运算及复合而得到的函数,称为**初等函数**.

并非所有的函数都是初等函数.分段函数一般不是初等函数.例如,$y = \operatorname{sgn} x$,$y = [x]$,以及狄利克雷函数等都不是初等函数.

2. 几种基本初等函数

基本初等函数指以下 6 类函数:

(1) 常数函数　$y = C, x \in (-\infty, +\infty)$,$C$ 为常数.

(2) 幂函数　$y = x^a$($a \neq 0$ 为任何实数),不论对任何 a,其公共定义域为 $(0, +\infty)$.$a > 0$ 时,其图形过原点 $(0,0)$;当 $a < 0$ 时,其图形不过点 $(0,0)$.

(3) 指数函数　$y = a^x(a > 0, a \neq 1), x \in (-\infty, +\infty)$,$a > 1$ 时,严格单调上升;当 $a < 1$ 时,严格单调下降,而图形皆过点 $(0,1)$.

(4) 对数函数　$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1), x \in (0, +\infty)$,图形过点 $(1,0)$.当 $a > 1$ 时,函数严格单调上升;当 $0 < a < 1$ 时,严格单调下降,常用自然对数 $y = \ln x$.

(5) 三角函数

$y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$,$|\sin x| \leqslant 1$,奇函数,$2\pi$ 为周期;

$y = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$,$|\cos x| \leqslant 1$,偶函数,$2\pi$ 为周期;

$y = \tan x, x \in \left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,奇函数,$\pi$ 为周期;

$y = \cot x, x \in [n\pi, (n+1)\pi]$,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,奇函数,$\pi$ 为周期.

(6) 反三角函数

$y = \arcsin x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$,值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

$y = \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$,值域为 $[0, \pi]$;

$y = \arctan x$，$-\infty < x < +\infty$，$|\arctan x| < \dfrac{\pi}{2}$，函数严格单调上升，$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$；

$y = \operatorname{arccot} x$，$-\infty < x < +\infty$，$0 < \operatorname{arccot} x < \pi$，函数严格单调下降，$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$.

四、分段函数

如果一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同的表达形式，则该函数称为分段函数.

常见的分段函数有：

(1) 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$；

(2) y 是 x 的最大整数部分，记为 $y = [x]$；

(3) 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}.$$

五、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y 值，从关系式 $y = f(x)$ 中可确定惟一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为

$$x = \varphi(y).$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注：① $y = f(x)$ 的图象与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图象重合；$y = f(x)$ 的图象与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

② 只有一一对应的函数才有反函数.

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$，定义域 $D_f = U$，又有函数 $u = g(x)$，定义域 $D_g = X$，$R_g = U'$. 若 $U' \subset U$，可以在 X 上确定一个函数 $y = f(g(x))$，称为 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 的复合函数.

若 $R_g \cap D_f = \varnothing$，则不能构成复合函数 $y = f(g(x))$；

若 $R_g \subset D_f$，则可构成复合函数 $y = f(g(x))$，定义域为 X；

若 $R_g \cap D_f \neq \varnothing$，$R_g \not\subset D_f$，则可构成复合函数 $y = f(g(x))$，定义域包含在 X 中，但不等于 X.

六、隐函数

前面所讲的形如 $y = f(x)$ 的函数，一般称为显函数，其特点是因变量 y 单独地在等号一边，而另一边仅仅是自变量 x 的表达式 $f(x)$.

此外，还有一类函数，称为隐函数. 其定义是：凡由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数关系称为隐函数. 例如：$x^2 + y^2 - 1 = 0$；它可以解为：$y = \sqrt{1 - x^2}$，$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 或 $y = -\sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$，这就变成两个显函数.

并非所有隐函数都可解成显函数，如：开普勒方程. $y - x - \varepsilon \sin y = 0$（$\varepsilon$ 为常数 $0 < \varepsilon < 1$）是一隐函数. 但它不能解出显函数.

〔重点难点突破〕

根据最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲规定的考试内容可知：函数的概念及表示

法、函数的性质、反函数、复合函数、分段函数、应用题函数关系的建立等是本章重点，下面一一讲解.

一、关于函数的概念及表示方法

在这部分中，主要掌握函数的定义、定义域、值域和函数的表示法. 熟悉几种分段函数.

1. 绝对值函数　$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$，

其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[0, +\infty)$，如图 1.1.1 所示.

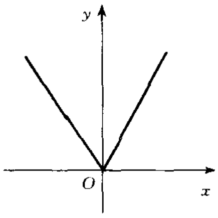

图 1.1.1

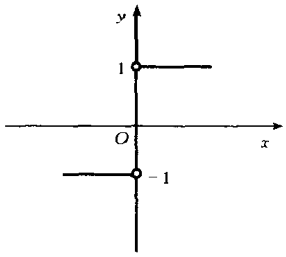

图 1.1.2

2. 符号函数　$y = \operatorname{sgn}\begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$，

$x \in (-\infty, +\infty)$，值域为集合$\{-1, 0, 1\}$ 如图 1.1.2 所示.

3. $y = [x]$　表示 x 的最大整数部分，$x \in (-\infty, +\infty)$，其值域为集合$\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$. 对任何实数 x，有$[x] \leqslant x < [x] + 1$. 如图 1.1.3 所示.

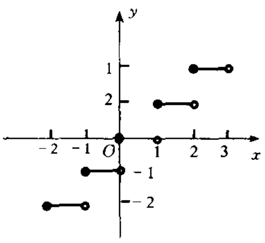

图 1.1.3

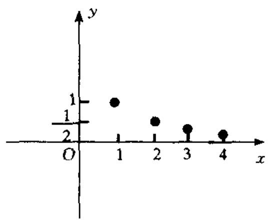

图 1.1.4

4. 以自然数为自变量的函数

如：$y = \dfrac{1}{n}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$. 定义域为全体自然数；值域为$\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots\}$. 如图 1.1.4 所示.

5. 狄利克雷(Dirichlet)函数

$y = \begin{cases} 1 & x\ \text{为有理数} \\ 0 & x\ \text{为无理数} \end{cases}$，

$x \in (-\infty, +\infty)$，值域为集合$\{0, 1\}$. 画不出其图形.

二、关于函数的性质

1. 函数的单调性

熟悉其定义，掌握判别 $f(x)$ 在 x 上单调性的常用方法.

例 1　设 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续，又

$$F(x) = \int_0^x [x^{2n} - (2n+1)t^{2n}] f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $n \geqslant 1$ 为整数. 就 $f(x)$ 的单调性，讨论 $F(x)$ 的单调性.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解 由已知得 $F(x)=x^{2n}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-(2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\mathrm{d}t$.

上式两端对 x 求导,得

$$\begin{aligned}F'(x)&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^{2n}f(x)-(2n+1)x^{2n}f(x)\\&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n}f(x)\\&=2nx^{2n}f(\xi)-2nx^{2n}f(x)\text{(积分中值定理)}\\&=2nx^{2n}[f(\xi)-f(x)],\text{其中 }\xi\text{ 在 0 与 }x\text{ 之间.}\end{aligned}$$

(1) 若 $f(x)$ 单调上升:

$x>0$ 时,则 $0<\xi<x$,故 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$,于是 $F'(x)\leqslant 0$;

当 $x=0$ 时,$F'(x)=0$;

当 $x<0$ 时,$x<\xi<0$,故 $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$,于是 $F'(x)\geqslant 0$;

因此,若 $f(x)$ 单调上升,则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降;$F(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调上升.

(2) 若 $f(x)$ 单调下降:

类似地讨论可得,$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升;在 $(-\infty,0]$ 上单调下降.

注:判别函数 $f(x)$ 在 x 上单调性的常用方法为:

a. 用单调定义;

b. 利用导数 $f'(x)$.

2. 函数的有界性

我们说函数 $f(x)\leqslant|M|$ 有界,即函数 $f(x)$ 的图形位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 这两条平行线之间的带形区域内,$f(x)$ 的值既不能大于 M,也不能小于 $-M$. 函数的有界性也可以这样定义:如果存在两个数 A 和 B,对一切 $x\in D$ 恒有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$,则称函数在 D 内有界.

3. 函数的奇偶性

若 $f(x)$ 的定义域关于原点不对称,则 $f(x)$ 一定不是奇偶函数.

判别函数奇偶性的常用方法:

a. 利用奇偶性的定义;

b. 利用奇偶函数的性质.

例 2 讨论函数的奇偶性:

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,又 $a>0$ 且 $a\neq 1$,讨论

$$F(x)=f(|\sin x|-2)\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)+\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}.$$

解 a^x+a^{-x} 为偶函数,而 a^x-a^{-x} 为奇函数,从而它们的商 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 为奇函数,又因为 $\operatorname{sgn}[\sin(-x)]=-\operatorname{sgn}(\sin x)$,所以是奇函数;

$f(|\sin x|-2)$ 为偶函数,故 $f(|\sin x|-2)\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$ 是奇函数,而函数 $F(x)$ 为两个奇函数之和,故 $F(x)$ 为奇函数.

在判定函数的奇偶性时,若 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)$ 是其一个原函数,任一个原函数都可写成 $\varphi(x)+C$,C 为任意取定的常数. 当 $f(x)$ 为偶函数时,$\varphi(x)$ 是奇函数,但 $\varnothing(x)+C\ (C\neq 0)$ 却不是奇函数.

4. 函数的周期性

任一周期函数都有无穷多个周期. 若在无穷多个周期中存在一个最小的正数,则这个正数称为函数的最小周期,简称周期.

例如:$y=|\sin x|$ 以 π 为周期,而狄利克雷函数 $y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$,由于有理数之和为有理数,而无理数与有理数之和为无理数,故任何非零有理数都是它的周期,但没有最小周期.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

要想掌握反函数必须先掌握一一对应关系.因为,只有一一对应的函数才有反函数.所谓一一对应,就是:设函数 $y = f(x)$ 在 X 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 \neq x_2$,必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 或等价的由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,则称函数 f 是 X 到值域 $f(X)$ 的一一对应.特别地,如果又有 $f(X) = Y$,则称 f 是 X 到 Y 的一一对应.

函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 有如下关系:

(1) 若 $D_f = X, R_f = Y$,则 $D_f^{-1} = Y, R_f^{-1} = X$;

(2) $f(f^{-1}(y)) = y \quad (\forall y \in Y), f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in D_f)$;

(3) $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y = x$ 对称,而 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合.

$y = f(x), x \in X$ 且存在反函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,有 $f(x_1) \neq f(x_2)$.特别的,若 $y = f(x)$ 在 X 上单调,则 $y = f(x)$ 在 X 上 $\exists$ 反函数.

例3 求 $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & x < -1 \\ x^3 & -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 12x - 16 & x > 2 \end{cases}$ 的反函数.

解 当 $x < -1$ 时, $y = 1 - 2x^2 < -1$,则 $x = -\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$(另一根舍去);

当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时, $y = x^3 \in [-1, 8]$, $\forall y \in [-1, 8]$,由 $y = x^3$,知 $y = \sqrt[3]{x}$;

当 $x > 2$ 时, $y = 12x - 16 > 8$, $\forall y > 8$, $y = 12x - 16$,知 $x = \dfrac{y + 16}{2}$.

因此,反函数 $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} & x < -1 \\ \sqrt[3]{x} & -1 \leqslant x \leqslant 8 \\ \dfrac{x+16}{12} & x > 8 \end{cases}$.

2. 复合函数

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点,现在根据函数的特点举出几种复合的方法.

(1) 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数表达式来替代,称之为代入法,该法用于初等函数的复合.

例4 设 $f_n(x) = f(f \cdots f(x) \cdots)$,若 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.

解 $f_2(x) = f(f(x)) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$f_3(x) = f(f_2(x)) = \dfrac{f_2(x)}{\sqrt{1 + 2f_2^2(x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$,

由上二式可推得

$f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (由数学归纳法可证明上式成立).

(2) 分析法

分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得出复合函数的方法.

该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant 0\end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)} & \varphi(x)<1\\ \varphi(x) & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$.

a. 当 $\varphi(x)<1$ 时

或 $x<0,\varphi(x)=x+2<1$, 即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$,

或 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1<1$, 即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$.

b. 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时

或 $x<0,\varphi(x)=x+2\geqslant 1$, 即 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 0$,

或 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$, 即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述, $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2} & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1} & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1 & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$.

(3) 图示法

图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法, 适用于分段函数, 尤其是两个均为分段函数的复合.

一般有以下几步:

a. 先画出中间变量函数 $u=\varphi(x)$ 的图象;

b. 把 $y=f(u)$ 的分界点在 xOu 平面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线);

c. 写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间;

d. 将上步所得结果代入 $y=f(u)$ 中, 便得 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$, 求 $f[f(x)]$.

解　令 $f(x)=u$, 则 $f(u)=\begin{cases}1+u & u<0\\ 1 & u\geqslant 0\end{cases}$.

a. 作出 $u=f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图象, 如图 1.1.5 所示;

b. 在图中作出 $y=f(u)=\begin{cases}1+u & u<0\\ 1 & u\geqslant 0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图象(x 轴);

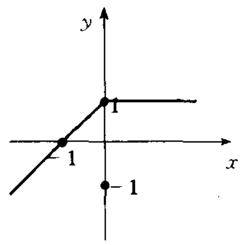

图 1.1.5

c. 从图中看出, 当 $x\leqslant -1$ 时, $u\leqslant 0$; 当 $x>-1$ 时, $u\geqslant 0$;

d. 将上步代入 $y=f(u)$ 中得

$$y=f[f(x)]=\begin{cases}2+x & x\leqslant -1\\ 1 & x>-1\end{cases}.$$

〔解题技巧导引〕

例 1　函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的最大值为________.

应填　$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

分析　因函数 y 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上可导，故只需分别计算出函数在驻点和区间端点的函数值，再比较它们大小即可得最大值.

解　令　$y' = 1 - 2\sin x = 0$，得 $x = \frac{\pi}{6}$ 为驻点.

又　$y\mid_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$，$y\mid_{x=0} = 2$，$y\mid_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

所以最大值为 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

例 2　函数 $F(x) = \int_1^x\left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\,(x > 0)$ 的单调减少区间为________.

应填　$\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

分析　利用函数导数的符号便可确定函数的单调区间.

解　当其导数为负时，函数便单调减少. 因 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$，令 $F'(x) < 0$，得 $0 < x < \frac{1}{4}$. 即在区间 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 内，函数 $F(x)$ 单调减少.

例 3　已知函数 $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$，$-\infty < x < +\infty$，

(1) $f'(x) =$ ________；　　(2) $f(x)$ 的单调性：________；

(3) $f(x)$ 的奇偶性：________；　　(4) $f(x)$ 图形的拐点：________；

(5) $f(x)$ 图形的凹凸性：________，________；　　(6) $f(x)$ 图形的水平渐近线：________.

分析　这是利用导数研究函数的性态.

解　(1)　应填 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2)　应填　单调增加.

因为 $f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} > 0\,(-\infty < x < +\infty)$，故 $f(x)$ 在定义域内单调增加.

(3)　应填　奇函数.

因为　$f(-x) = \int_0^{-x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{u=-t} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}(-\mathrm{d}t) = -\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t = -f(x)$.

(4)　应填　$(0,0)$.

因为　$f''(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$，令 $f''(x) = 0$，得 $x = 0$；又 $x < 0$ 时，$f''(x) > 0$；$x > 0$ 时，$f''(x) < 0$. 所以 $x = 0$ 是 $y = f(x)$ 图形的拐点的横坐标，又 $f(0) = 0$，所以拐点为 $(0,0)$.

(5)　应填　$x < 0$ 时，曲线是凹的；$x > 0$ 时曲线是凸的. 理由见(4).

(6)　应填　$y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和 $y = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

因为　$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \int_0^{-\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

最后的积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

例 4　设函数 $f(x) = x\cdot\tan x\cdot\mathrm{e}^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

A. 偶函数；　　B. 无界函数；　　C. 周期函数；　　D. 单调函数.

解　这既可直接验算而得：因为 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ 和 e^x 是单调增加函数，所以 $|\mathrm{e}^{\sin x}| \geqslant \mathrm{e}^{-1}$；而 x 和 $\tan x$ 都是无界函数，所以对于任意给定的正数 M，都存在 $x_0 > 1$，使得 $|x_0\tan x_0| > M$，从而

$$|f(x_0)| \geqslant |x_0||\tan x_0|\mathrm{e}^{-1} > M.$$

故 $f(x)$ 是无界函数.

也可用排除法：由于

$f(-x)=-x\cdot\tan(-x)\cdot e^{\sin(-x)}=x\cdot\tan x\cdot e^{-\sin x}=x\tan x/e^{\sin x}\neq f(x)$，故 $f(x)$ 不是偶函数；$f(x)$ 显然不是周期函数，也不是单调函数．总之，应选 B.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}$，则

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2 & x\leqslant 0\\ -(x^2+x) & x>0\end{cases}$；　　B. $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x) & x<0\\ -x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$；

C. $f(-x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2-x & x>0\end{cases}$；　　D. $f(-x)=\begin{cases}x^2-x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$.

解　解法一　令 $y=-x$，则 $x=-y$，且当 $x\leqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$；$x>0$ 时，$y<0$. 代入 $f(x)$ 的表达式，有

$$f(-y)=\begin{cases}(-y)^2 & y\geqslant 0\\ (-y)^2+(-y) & y<0\end{cases},$$

视式中的 y 为 x，便得

$$f(-x)=\begin{cases}x^2-x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases},$$

可见 D 是正确的．

解法二　直接计算当 $x\geqslant 0$ 时，　$x\leqslant 0$，故由 $f(x)$ 的定义，$f(-x)=(-x)^2=x^2$；而当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$，即 D 是正确的．

也可利用 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图是关于 y 轴对称的原理，直接从图形上推断 D 是正确的．

例 6　判别下列函数的奇偶性：

(1)　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续的偶函数．

(2)　$F(x)=f(x)+\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$，其中 $f(x)$ 是连续函数．

(3)　$F(x)=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)f(x)$，其中 $a>0, a\neq 1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任何 x，y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

解　(1)　$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令}t=-u}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)\xlongequal[\text{偶函数}]{f(x)\text{为}}-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$，

$\therefore F(x)$ 为奇函数．

(2) $F(x)=f(x)+\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$，　①

$F(-x)=f(-x)+\int_0^{-x}\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$，　②

$\because f(x)$ 为奇函数　$\therefore f(x)+f(-x)=0$.　③

又 $\because \int_0^{-x}\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\xlongequal{\text{令}u=-v}\int_0^x\left(\int_0^{-v}f(t)\mathrm{d}t\right)(-\mathrm{d}v)=-\int_0^x\left(\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$，　④

由 ①，②，③，④ 得

$F(x)+F(-x)=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_0^x\left(\int_{-u}^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=0$，

故 $F(x)$ 为奇函数．

(3) 令 $g(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$，

$\because g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{a^{-x}}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=0$，

$\therefore g(x)$ 为奇函数．

又 $\because f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 $y=0$，得 $f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$，

又显然有 $0=f(0)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$，

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x)=g(x)f(x)$ 为偶函数.

〔历年真题研读〕

【1999 年试题】

1.(证,6)　当 $x\geqslant 1$ 时,求证:$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

证明　(用拉格朗日中值定理证)

设 $f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$ 且 $x\geqslant 1$，$f(1)=\arctan 1-\dfrac{1}{2}\arccos 1=\dfrac{\pi}{4}$，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{-1}{2\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0.$$

(1) $\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为一个常数,即 $f(x)=f(1)=\dfrac{\pi}{4}$，

即 $\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) 由 $f(x)$ 在 $[1,x]$ 上连续,在 $(1,x)$ 内可导,即 $f(x)$ 在 $[1,x]$ 上满足拉格朗日定理的条件,因而在 $(1,x)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)=0$，即 $f(x)=f(1)$，

即 $\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x}=\dfrac{\pi}{4}$.

〔同步强化训练〕

1. 设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在,且 $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to1}f(x)$，则与 $f(x)$ 等价的函数是(　　).

A. $y=\int_0^x(x^2-2x)\mathrm{d}x$;　　　B. $y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t$;

C. $y=\int f'(x)\mathrm{d}x$;　　　D. $y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$.

2. 求 $f(x)=\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 的定义域.

3. 求 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$ 的定义域.

4. 求 $f(x)$ 的表达式:

$f(x+\dfrac{1}{x})=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+1}+\sin(x^2+\dfrac{1}{x^2})+2$,　$|x|>1$.

5. 设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a$，$x=b$ 均对称 $(a\neq b)$，求证:$y=f(x)$ 是周期函数,并求其周期.

6. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x+2$，$f[\varphi(x)]=x^2$，求 $\varphi(x)$.

7. 判别函数的奇偶性:

$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

8. 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数,证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com