弹 性 力 学

吴家龙 编著

同济大学出版社

内容提要

本书吸取了国内外同类教材和有关专著的优点，采用从一般到特殊的叙述方法，系统全面地介绍了弹性力学的理论和方法。本书共有十三章和三个补充材料，包括基本内容和提高加深部分。每章开头都简洁地介绍了主要内容和重要概念，章末附有一定数量的思考题和习题，并给出了习题答案和适当的提示。本书宜作工程力学专业本科生和工科专业研究生的教材，也可作为工科学生、工程技术人员和力学教师的参考书。

责任编辑　顾敏健

封面设计　李志云

弹　性　力　学

吴家龙　编著

同济大学出版社出版

（上海四平路1239号）

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：18.125　字数：522　千字

1987年8月第1版；1987年8月第1次印刷

印数：1—4500　科技新书目　153—308

统一书号：13335·043　定价：3.75元

ISBN　7—5608—0010—6/O·13

目　录

第三章　应力和应变的关系

第四章　弹性力学问题的建立

第五章　平面问题的直角坐标解答

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第八章 柱形杆的扭转和弯曲

第九章 弹性力学方程的通解及其应用

第十二章 弹性力学的变分解法

第十三章 平面问题的有限单元法

绪　　论

绪-1　弹性力学的任务、内容和研究方法

弹性力学，又称弹性理论，是固体力学的一个分支。它的基本任务是要解决现代生产实践中所提出的有关机械和结构的强度和刚度等问题，要求能最大限度地解决并统一经济与安全的矛盾。这是固体力学要解决的普遍矛盾。但弹性力学还有它本身的特殊性，这主要在于弹性力学的研究对象是实际物体经过抽象处理后的完全弹性体，而弹性力学的主要任务，是要解决完全弹性体在外界因素（例如外力、温度变化等）作用下应力和变形的问题，这也构成了弹性力学的基本内容。

所谓"弹性"，它本是固体的一个基本属性，而"完全弹性"则是对于实际弹性物体的一种抽象，使它构成一个近似于真实物体的理想"模型"，然后对它进行数学和力学的处理，以求问题的解决。固体的"完全弹性"的特征是：对应于一定的温度，存在着应力和应变之间一一对应的关系，和时间无关，和它的历史也无关。通常对于象钢一类的材料，当受力不超过某一限度时，应力和应变之间的关系十分近似于线性的，但也有一些材料，例如某些有色金属和塑料等，却具有非线性性质。前者称为物理线性的，而后者称为物理非线性的。

从研究的对象、研究问题的内容和基本任务来看，弹性力学和材料力学是相同的；再从处理问题的方法来看，弹性力学和材料力学都要从问题的三个方面，即静力学方面、几何学方面和物理学方面进行分析。但二者所研究问题的范围是不同的。弹性力学只研究完全弹性体，而材料力学有时还研究材料的塑性、蠕变、疲劳以及破坏等问题，有时在解释某些物理现象的本质（例

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

如对于材料疲劳破坏实质的研究）时，还舍弃连续性的假设。弹性力学既研究杆状的构件，也研究诸如板和壳，以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构，而材料力学只研究杆状构件，这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和变形，是材料力学的主要研究内容。

另外在研究问题的方法上，事实上二者也是不完全相同的。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，为了简化计算，大都还对构件的应力分布和变形状态作出某些假定，因此得到的解答，有时只是粗略的近似。但在弹性力学里研究杆状构件时，一般都不必引进那些假设，因而所得的结果就比较精确，并可以用来校核材料力学中相应问题的结果是否精确。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下弯曲时，引进了关于平截面的假设，由此得出的结果是：横截面上的弯曲应力按直线分布。但用弹性力学方法求解这问题时，就毋需采用这个假设，相反地，还可以利用弹性力学的结果来校核这个假设是否正确，并说明由于引进了这一假设以后，对于具有不同的跨度和高度之比的梁来说所引起的误差，从而可以确定这种假设所带来的条件性和局限性。

又例如，在材料力学里计算带孔构件拉伸时，假定拉应力在净截面上是均匀分布的。但在弹性力学里，就不需要作出这个假定，而且它的结果表明，净截面上的拉应力远不是均匀分布的，而在孔边附近发生高度的应力集中现象，孔边的最大拉应力会比平均应力高出若干倍。

弹性力学作为一门基础技术学科，是近代工程技术的必要基础之一。在造船工程中，船体结构的强度、刚度计算，要直接应用弹性力学的理论和方法。在航空工程中，尤其是航天工程的发展，不断地对弹性力学提出新的任务，并由此而形成了新的分支（例如空气弹性力学）。在重型机器、精密机械和化工机械中，对于机器的部件在各种工作条件下的强度研究，也广泛地应用着

弹性力学的结论和公式。在水利工程和土建工程中，工程技术人员往往直接利用弹性力学方法作为计算、设计和应力应变分析的理论基础。在地震学中，根据弹性波在地壳中传播的研究结果，计算出震源所在的位置，并研究地震波传播的规律性。

弹性力学又可作为一门基础理论学科。物理学家在研究光波理论时引用了弹性力学，近年来人们还把弹性力学的理论和方法应用于生物力学等边缘学科的研究。

用弹性力学的经典解法解决实际问题，主要的困难在于偏微分方程边值问题的复杂性。因此人们早就寻求各种近似解法，例如差分解法和变分解法等等。自二十世纪三十年代开始，不少建筑工作者和力学工作者还致力于弹性力学和结构力学的综合应用。弹性力学吸收了结构力学中超静定结构分析法以后，大大扩大了它的应用范围，使得某些本来无法解决的复杂问题得到了解决。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性，但应用于工程上，有时却是足够精确的。近二十年来发展起来的有限单元法，就是把连续弹性体划分成有限个有限大小的单元构件，然后利用结构力学的位移法、力法或混合法求解，更加显示出弹性力学和结构力学综合应用的良好效果。由于各种近似解法的出现和采用，为用弹性力学解决实际工程问题开辟了更为广阔的前景。

绪-2 弹性力学的基本假设

在弹性力学中，为了能通过已知的量（如物体的几何形状和尺寸、物体所受的外力或几何约束）求出应力、应变和位移等未知量，首先要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，建立这些未知量所满足的弹性力学的基本方程和相应的边界条件。由于实际问题是极为复杂的，是由多方面的因素构成的，所以，如果我们不分主次地将全部因素都考虑进来，则势必会造成数学推导上的困难，而且由于导出的方程过于复杂，实际上也不可能求解。因此，通常必需按照物体的性质，以及求解的范围，去忽

略一些可以暂不考虑的因素，而提出一些基本假定，使我们所研究的问题限制在一个方便可行的范围以内。在以后的讨论中，如不特别指出，将采用以下六条基本假设。

1. **连续性假设** 弹性力学作为连续介质力学的一部分，它的基本前提是将可变形固体看作是连续密实的物体，即组成物体的质点之间不存在任何空隙。从这条假设出发，我们可以认为，一些物理量如应力、应变和位移等是连续的，它们可表示成坐标的连续函数，因而在作数学推导时可方便地运用连续和极限的概念。事实上，一切物体都是由微粒组成的，都不可能符合这个假定。但可以想象，当微粒尺寸以及各微粒之间的距离远比物体的几何尺寸小时，运用这个假设并不会引起显著的误差。

2. **均匀性假设** 假定所研究的物体是用同一类型的均匀材料组成的。因此它的各部分的物理性质（如弹性）都是相同的，并不会随着坐标位置的改变而发生变化。根据这条假设，我们在处理问题时可取出物体内的任一部分进行分析，然后将分析的结果用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的，例如混凝土，那末也只要每种材料的颗粒远远小于物体的几何尺寸，而且在物体内均匀分布时，从宏观的意义上说，它也是均匀的。

3. **各向同性假设** 假定物体在不同的方向上具有相同的物理性质，因而物体的弹性常数不随坐标方向的改变而改变。单晶体是各向异性的，木材和竹材是各向异性的。钢材虽然有无数个各向异性的晶体组成，但由于晶体很小，而且排列是杂乱无章的，故从宏观的意义上说它是各向同性的。

4. **完全弹性的假设** 完全弹性的含义在第一节中已经讲过，这里不作重复。本教程只研究应力和应变呈线性关系的情况，这时，各个弹性常数就不随应力或应变的大小而改变，并且可以运用叠加原理。

5. **小变形假设** 假定物体在外界因素（例如荷载或温度变化等）作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而应变分

量和转角都远小于1。应用这条假设，可以使问题大为简化。例如，在研究物体的平衡时，可不考虑由于变形所引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变转角的二次幂或二次乘积以上的项，使得到的基本方程是线性偏微分方程组。

6. **无初应力的假设** 假定物体处于自然状态，即在外界因素（荷载或温度变化等）作用之前，物体内部是没有应力的。根据这个假设，由弹性力学方法求得的应力仅仅是由于荷载或温度变化的作用产生的。若物体内有初应力存在，则当物体受外界因素（荷载或温度变化等）作用时，其内实际存在的应力，应等于初应力加上用弹性力学方法所求得的应力。

第一章　应力状态理论

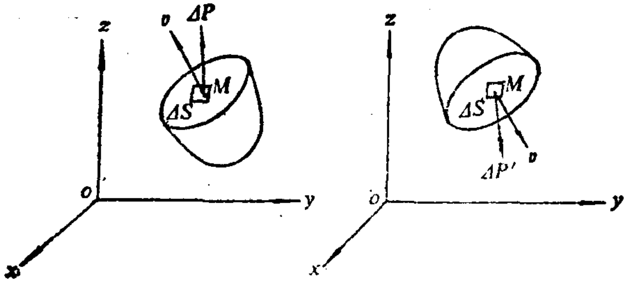
弹性力学所研究的都是超静定问题。要解决超静定问题，必须考虑静力学、几何学和物理学三方面的条件，缺一不可。本章的任务是要从静力学观点出发，分析一点的应力状态，并建立连续介质力学普遍适用的平衡微分方程和静力边界条件。在本章的推导里，我们将忽略物体的变形，亦即假定物体处于无变形状态。显然，对小变形物体来说，这一假定是不会引起明显的误差的。

§ 1-1　应力和一点的应力状态

一个在外界因素（例如外力、温度变化等）作用下的物体，其内各部分之间要产生相互的作用。这种物体内的一部分与其相邻的另一部分之间相互作用的力，称为**内力**。

为了暴露内力，我们假想通过物体内任意一点M作法线方向为v的微小面ΔS，此微小面把物体在M点的微小领域分割成两部分，如图1—1所示。由割离体法可知，物体在M点的微小领域被切成两部分以后，在其被切割的表面处，必须用内力$\Delta \boldsymbol{P}$和$\Delta \boldsymbol{P}'$代替。显然，这里的$\Delta \boldsymbol{P}$和$\Delta \boldsymbol{P}'$是作用力和反作用力的关系，因此只要考虑其中之一就可以了。为确定起见，不妨留下图1—1a所示的那一部分。

根据物体连续性的假设，可以认为作用在微小面ΔS上的力是连续分布的，内力$\Delta \boldsymbol{P}$则是这个分布力的合力。于是分布集度为$\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S}$，称为**平均应力**。如果将$\Delta S$取得很小很小，用数学的语言讲，即令$\Delta S$趋向于零，则$\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S}$的极限$\boldsymbol{F}_v$就称为**应力**，记作



(a)　　　　　　　　(b)

图 1—1

$$\boldsymbol{F}_v=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S},\tag{1—1}$$

F 右下角的 v 表示微分面的法线方向，用以表示应力作用面的方位。

在给定的直角坐标系下，应力矢量 $\boldsymbol{F}_v$ 可沿三个坐标轴方向分解，如以 X_v、Y_v 和 Z_v 表示其分量（图 1—2）则有

$$\boldsymbol{F}_v=X_v\boldsymbol{i}+Y_v\boldsymbol{j}+Z_v\boldsymbol{k}.\tag{1—2}$$

这里的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示单位坐标矢量。

另一方面，应力矢量 $\boldsymbol{F}_v$ 又可沿微分面 ΔS 的法线方向和微分面方向上分解。如分别用 σ_v 和 τ_v 表示其分量，则 σ_v 称为**正应力**、τ_v 称为**剪应力**，如图 1—3 所示。

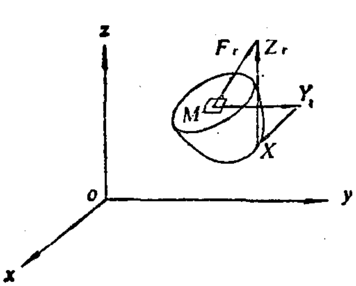


图 1—2

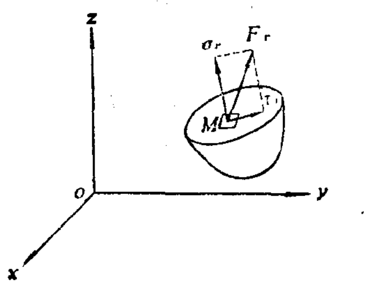


图 1—3

必须指出，凡提到应力，应同时指明它是对物体内哪一点并过该点的哪一个微分面来说的。因为通过物体内同一点可以作无数个方位不同的微分面。显然，各微分面上的应力一般说是不同的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com