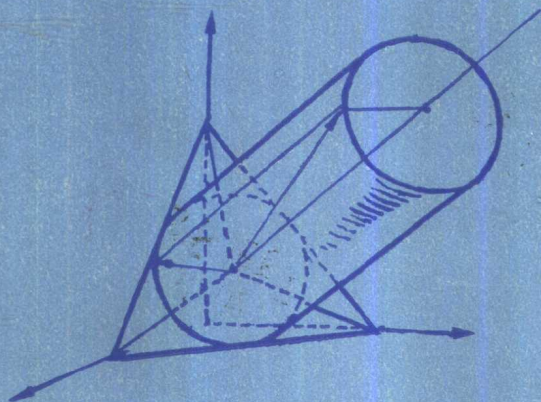


塑性理論簡明教程

徐秉業 陳森燦 編著



清华大学出版社

内 容 简 介

塑性理论是固体力学的一个重要分支，它不仅在理论上对研究非线性本构方程具有重要意义，而且在结构、机械设计和金属成型等工程实践中都有着广泛的应用前景。

本书简明地介绍了发展比较成熟的塑性理论，较详细地介绍了按照塑性理论特点处理和解决各种问题的方法。在叙述基本理论时，力求浅显易懂，在公式推导中，注意了思路简明清晰。有些内容是作者在清华大学多年教学工作中的经验总结和自己的见解。各章都附有习题和答案。

本书可供力学、机械、土木、水利等专业的大学生和研究生作为教材，也可供力学教师及有关工程技术人员参考。

塑性理论简明教程

徐秉业、陈森灿 编著

责任编辑 贾仲良



清华大学出版社出版

北京 海淀 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行、各地新华书店经售



开本：850×1168 1/32 印张 12 1/16 字数 323 (千字)

1981 年 7 月第一版 1981 年 7 月第一次印刷

印数：1—25000

统一书号：15235·11 定价：1.50 元

前 言

塑性力学是固体力学的一个重要分支，是一门技术基础课程。它与生产实践有着十分重要的联系。学习和掌握塑性力学中的基本概念和处理问题的方法，不仅能够正确地计算材料或结构在超出弹性极限后，其应力和应变分布的规律，从而充分发挥材料的潜力，并合理地制定出结构的安全系数，而且能为合理设计金属塑性加工工艺提供有用的数据和资料。

与弹性力学相比，塑性力学是一门年轻的学科。由于它的物理关系是非线性的，所以处理问题时要比弹性力学复杂。但是近半个世纪来，由于生产发展的需要，塑性力学也有了很大的发展，特别是对于刚塑性材料和理想弹塑性材料的情况，现有的理论和处理问题的方法，已经发展得比较成熟，能够解决和处理许多工程实际中的问题。

为了简明地介绍塑性力学中的基本内容，进一步掌握固体力学中处理问题的方法和概念，我们编写了这本塑性理论简明教程，其中有些内容是作者在多年教学工作中的经验总结和自己的见解。本书初稿曾在 1978 届和 1979 届清华大学力学专业和有关专业的研究生中使用过，本书就是在修订初稿的基础上写成的。

本书共有八章。第一章介绍塑性力学的基本概念；第二、三、四章介绍比较成熟的基本理论；第五、六、七、八章介绍处理问题的基本方法。对于学时较少的专业可重点学习第一、二、三、五章，其余各章可根据情况有所取舍。为了帮助读者掌握本书的内容，每章都附有习题和答案。

本书在编写的过程中，曾得到清华大学张福范教授的热情支持，他在百忙中审阅了本书的全部内容，并提出了十分宝贵的修改意见。太原工学院杨桂通付教授、清华大学王祖唐教授、山东工学院关廷栋教授、西南石油学院唐俊才付教授都曾对本书的编写给予了热情的鼓励，并提出了许多建设性的建议。清华大学黄炎付教授和刘信声同志以及重庆大学苏长清同志和王维华同志也对本书的编写作了有益的贡献。作者谨对他们表示衷心地感谢！

由于作者水平所限，书中一定还有许多错误和不妥之处，诚恳地欢迎读者批评指正。

作者于清华大学 1981.1

目 录

符号表	1
第一章 基本概念	6
§ 1.1 塑性力学的研究对象及其特点	6
§ 1.2 塑性力学的发展简史	8
§ 1.3 基本实验资料	10
§ 1.4 变形体的“模型”	15
§ 1.5 关于应变的表示方法	19
§ 1.6 真实应力和颈缩问题	22
§ 1.7 三杆桁架的弹塑性平衡	26
§ 1.8 变形路径对塑性变形和极限载荷的影响	30
习题与答案	37
第二章 屈服条件	42
§ 2.1 屈服条件的概念	42
§ 2.2 应力偏量和 Lode 参数	43
§ 2.3 在等倾面上对应力状态的研究	48
§ 2.4 Tresca 及 Mises 屈服条件	59
§ 2.5 两种屈服条件的比较	64
§ 2.6 屈服条件的实验验证	73
习题与答案	80
第三章 形变理论 (全量理论)	84
§ 3.1 形变理论与比例变形	84
§ 3.2 弹性理论中的物理方程	87
§ 3.3 形变理论的物理方程	90
§ 3.4 卸载问题	100
§ 3.5 简单加载定理	104

§ 3.6 关于 Hencky 理论和 Nadai 理论·····	108
§ 3.7 形变理论的小结·····	114
§ 3.8 例题·····	117
习题与答案·····	125
第四章 增量理论·····	129
§ 4.1 概述·····	129
§ 4.2 Lévy—Mises 理论·····	132
§ 4.3 Prandtl—Reuss 理论·····	136
§ 4.4 关于应变强化的模型·····	138
§ 4.5 增量理论中几个常用的表达式·····	143
§ 4.6 Drucker 假设·····	144
§ 4.7 加载面的外凸性和应变增量的流动法则·····	149
§ 4.8 塑性位势理论·····	151
§ 4.9 关于增量理论的实验验证·····	156
§4.10 几种理论之间的关系·····	156
§4.11 薄管受轴向力及扭矩作用时的解·····	163
习题与答案·····	171
第五章 简单弹塑性问题·····	176
§ 5.1 梁的弹塑性弯曲·····	176
§ 5.2 杆件的弹塑性扭转·····	190
§ 5.3 旋转圆盘·····	197
§ 5.4 轴对称平面应变问题和平面应力问题·····	203
§ 5.5 厚壁球壳·····	214
习题与答案·····	217
第六章 塑性平面应变问题和滑移线场理论·····	222
§ 6.1 基本假设和基本方程·····	222
§ 6.2 滑移线的一般概念·····	224
§ 6.3 Hencky 应力方程·····	226

§ 6.4 滑移线的性质·····	236
§ 6.5 塑性区的边界条件·····	241
§ 6.6 常见的滑移线场·····	244
§ 6.7 滑移线场的近似作法·····	247
§ 6.8 用滑移线场理论求解塑性极限载荷的例题·····	250
§ 6.9 速度场问题·····	262
§6.10 关于间断解 (不连续解) ·····	275
§6.11 通过矩形模、缩减比 $r = \frac{1}{2}$ 的挤压问题·····	283
习题与答案·····	288
第七章 理想刚塑性体的极值定理及其应用·····	295
§ 7.1 基本概念·····	295
§ 7.2 虚功原理·····	296
§ 7.3 有间断场时的虚功原理·····	299
§ 7.4 下限定理·····	302
§ 7.5 上限定理·····	304
§ 7.6 理想刚塑性体解的唯一性定理·····	306
§ 7.7 上限定理在平面应变问题中的应用·····	308
§ 7.8 例题·····	311
习题与答案·····	329
第八章 塑性极限分析·····	334
§ 8.1 极限分析的假设及其任务·····	334
§ 8.2 计算极限载荷的方法·····	336
§ 8.3 极限分析中的上下限定理·····	340
§ 8.4 轴向力对极限载荷的影响·····	345
§ 8.5 板的极限分析·····	348
§ 8.6 安定理论的概念·····	368
习题与答案·····	371
参考书目·····	376

符 号 表

A	截面面积, 常数
B	常数
C	常数
C_α, C_β	滑移线常数
D	常数, 直径
E	弹性模量
F	力, 单位体积力, 截面面积
F_x, F_y, F_z	直角坐标表面力分量
G	剪切弹性模量
I_y, I_z	截面对 y 或 z 轴的惯性矩
I_p	截面极惯性矩
I_1, I_2, I_3	应力第一、第二、第三不变量
I'_1, I'_2, I'_3	应变第一、第二、第三不变量
J_1, J_2, J_3	应力偏量第一、第二、第三不变量
K	体积弹性模量
L	功
M	弯矩, 力矩
M_y, M_z, M_x	在 xz 、 xy 或 yz 平面内的弯矩
M_t	扭矩
M_e	弹性极限弯矩
M_p	塑性极限弯矩
N	轴向力
P	集中外力

Q	水平集中外力, 剪力
R	圆杆半径
R_A, R_B	支反力
S_y, S_z	截面对于 y 轴或 z 轴的静矩
S_1, S_2, S_3	主应力偏量
T	温度, 表面力
U	总应变能
U_v	体积变形应变能
U_f	形状变形应变能
V	体积、速度
V_x, V_y, V_a, V_β	在 x, y, a, β 方向的速度分量
W	单位体积应变能
$\dot{W}$	塑性耗散功率
W_y, W_z	截面抗弯系数
a, b	椭圆半径, 柱或盘的内外半径
a	正方形的边长
$b(y), b(z)$	高度为 y 或 z 的截面宽度
c	常数
d	柱体的直径
d_i, d_e	柱体的内、外直径
e_{ij}	应变偏量张量
f_x, f_y, f_z	单位体积力分量
g	重力加速度
h	矩形截面的高度
k	剪切屈服极限
h_e	弹性核高度
l	杆的长度
m	质量

l, m, n	外法线方向余弦
n	安全系数
p	表面正压力
q	分布载荷
p_i, p_e	内压力、外压力
r	圆盘或圆柱半径
r_s	弹塑性分界半径
s_{ij}	应力偏量张量
t	时间、厚度
u, v, w	直角坐标中的位移分量
v	速度, 体积
u_r, u_θ, u_z	柱坐标中的位移分量
u, w	轴对称位移分量
w	挠度
x, y, z	直角坐标
z	距中性层的距离
θ	体积应变, 转角, 单位长度扭转角
Θ	正应力之和
Φ, ψ	应力函数
α	热膨胀系数, 内摩擦角
γ	剪应变
γ_8	八面体剪应变
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	直角坐标剪应变分量
$\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}$	柱坐标中剪应变分量
δ_{ij}	Kronecker 符号
ε	正应变
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	直角坐标中正应变分量
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$	柱坐标中正应变分量

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	主应变分量
ϵ_N	颈缩时应变
ϵ_i	应变强度
ξ, η	滑移线常数
$\mathfrak{R}$	椭圆长短轴半径之比或厚壁筒内外半径之比, 塑性极限载荷与弹性极限载荷之比
λ	Lamé 常数
$\dot{\lambda}$	Levy-Mises, Prandtl-Reuss 理论比例系数
ν	波桑比
μ_σ, μ_ϵ	应力及应变的 Lode 参数
ρ	密度、杆的曲率半径
ρ_r, ρ_θ	圆板的主曲率半径
ρ_x, ρ_y	矩形板的曲率半径
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	直角坐标中的正应力分量
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	柱坐标中的正应力分量
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi$	球坐标中的正应力分量
σ_e	弹性极限
σ_i	应力强度
σ_m	平均应力
σ_s	屈服极限
σ_t	真应力
σ_b	强度极限
σ_ν	外法线为 ν 截面上的正应力
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	直角坐标中的剪应力分量
$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$	柱坐标中的剪应力分量
$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta\phi}, \tau_{\phi r}$	球坐标中的剪应力分量
τ_1, τ_2, τ_3	主剪应力
τ_ν	外法线为 ν 截面上的剪应力

τ_8 八面体剪应力

φ 扭转角

ω 角速度

ω_e 弹性极限转速

ω_p 塑性极限转速

第一章 基本概念

§ 1.1 塑性力学的研究对象及其特点

当作用在物体上的外力取消后，物体的变形不完全恢复，而产生一部分永久变形时，我们称这种变形为塑性变形，研究这种变形和作用力之间的关系，以及在塑性变形后物体内部应力分布规律的学科称为塑性力学。

塑性力学是固体力学的一个重要分支，它与弹性力学有着密切的关系。弹性力学中的大部分基本概念和处理问题的方法（如平衡方程、协调方程）都可以在塑性力学中得到应用。

一般说来，当外力较小时，物体是处于弹性状态的。而当外力逐渐增大到某一直时，物体中某一点的应力状态达到了某一极限值，物体中即开始产生塑性变形。塑性力学和弹性力学之间的根本差别在于弹性力学是以应力与应变成线性关系的广义 Hooke 定律为基础的。在塑性力学的范围中，应力与应变之间的关系，一般说来已经是非线性的了。而这种非线性的特征又是与所研究的具体材料有关。因此塑性力学就没有像广义 Hooke 定律那样统一的规律。对于不同的材料，在不同的条件下，都具有不同的规律。

塑性变形的基本规律，应当建立在实验的基础上，即从实验中去找出材料超出弹性极限以后的特性，从而定出物理关系，建立塑性力学中的基本方程。解出这些方程则可以得到不同情况的塑性状态下的应力和变形。利用这些基本规律来讨论材料发生塑性变形后内部应力重新分布的情况，以便做出更合理的设计，在这方面也已做了许多工作，并且已经解决了不少问题。但是对于一些较复杂的

问题，由于数学上的困难是较难解决的，因此在塑性力学中利用塑性问题中的某些特点，克服数学上的困难，使各种方法得到发展，有着重要意义。

塑性力学在工程实践中有着重要的用途。因为物体达到塑性阶段时，并没有破坏，它还有能力继续工作。所以可以把构件设计到部分达到塑性、部分保持弹性状态，从而可以节省材料，因此应用塑性理论能更合理地定出工程结构和机械零件的安全系数。以塑性力学为基础的极限设计理论在结构设计中有很大用途。另一方面，在金属塑性加工中，如金属的压延、锻造、切削等都是塑性过程，把这些工艺现象提高到理论阶段，从而又进一步地指导实践，对生产技术的发展也是有意义的。关于金属塑性加工的工艺过程已有不少专门文献，这里不去进一步讨论。

在实际问题中，允许塑性变形的大小视不同工程领域而有不同的量级。在工程结构及机械零件的设计中是不允许大变形的，因为如果变形太大，结构便不能正常地工作，因此在这类问题中，塑性变形要限制在弹性变形的量级，而在金属塑性加工的工艺过程中，塑性变形可以是很大的，因而在这类问题中，弹性变形是完全可以忽略的。

与弹性力学比较，塑性力学问题具有如下主要特点：

1. 应力与应变之间的关系是非线性的，其比例系数不仅与材料有关而且与塑性应变有关。

2. 由于塑性变形的出现，应力与应变之间不再存在一一对应的关系，它与加载历史有关。

3. 变形体中可分为弹性区与塑性区，在弹性区，加载与卸载都服从广义 Hooke 定律，但在塑性区，加载过程服从塑性规律而在卸载过程中则服从弹性的 Hooke 定律。即材料的弹性性质不受塑性变形的影响。

在实验的基础上，塑性力学一般采用以下假设：

1. 材料是连续的，均匀的。
2. 平均正应力（静水压力）不影响屈服条件和加载条件。
3. 体积的变化是弹性的。
4. 不考虑时间因素对材料性质的影响。

§ 1.2 塑性力学的发展简史

人们很早就发现塑性变形的现象，然而进行塑性力学的研究，是从 1773 年 C. A. Coulomb 提出塑性固体（主要是土壤）的屈服条件开始的。关于金属塑性力学的研究，最早始于法国工程师 H. Tresca，他于 1864 年公布了关于冲压和挤压的一些初步实验报告。根据这些实验，他认为金属在最大剪应力达到某一临界值时就发生塑性屈服。随后 Saint-Venant 于 1870 年提出一个平面情况下理想刚塑性的应力-应变关系并假设最大剪应力与最大剪应变率方向是一致的，他应用了 Tresca 屈服条件计算圆柱体受扭转或弯曲而处于部分塑性状态时的应力（1870 年）、以及圆管受内压而处于全塑性状态时的应力（1872 年），他认识到在应力和总塑性应变之间没有一一对应的关系，因而假设应变速度主轴和应力主轴是重合的。1870 年，Lévy 采用了 Saint-Venant 关于理想塑性材料的概念，提出了在应力和塑性应变速度之间的三维关系。此后有一段时期进展是缓慢的，直到 1900 年 Guest 作了薄管的联合拉伸和内压实验，初步证实最大剪应力屈服条件。此后二十年内进行了许多类似的实验，提出许多种屈服条件，其中最有意义的是 M. Huber (1904) 和 R. Von Mises (1913) 从数学简化要求所提出的条件，后来被解释为最大弹性形变能的屈服条件，这期间 Mises 还独立地得出了 Lévy 曾提出过的应力-应变关系。

到本世纪二十年代 A. Nadai (1923) 同时用理论和实验的方法研究了柱体的扭转问题，H. Hencky (1923) 和 L. Prandtl (1923)

提出了平面塑性应变问题中滑移线的理论。尤其值得重视的是，他进行了复杂应力状态下塑性变形规律的第一批系统的实验研究，1926年 Lode 用钢、铜和镍的薄壁管试件进行了在不同的轴向拉伸和内压力的联合作用下的实验，Taylor 和 Quinney 在 1931 年也是用薄壁管，但在轴向拉伸和扭转的联合作用下进行试验。这些实验证明了 Lévy-Mises 关系是在真实情况下很好的近似。Reuss (1932) 为了更好地符合实验结果，在 Prandtl 启示下、提出包括弹性应变部份的三维弹塑性应力应变关系。至此，经典塑性理论已初步形成。但是当时除了平面应变滑移线理论以外，用在解具体问题上的进展仍很少。

Hencky 于 1924 年提出的全量理论在实践中使用很方便，Nadai 考虑了加工硬化情况，并建立了大应变情况下的应力应变关系。此后，苏联的 Ильющин 很好地发展了这个理论，提出了简单加载定理和卸载定理，并大量地应用这一理论求解具体边值问题。虽然全量理论在理论上不适用于复杂加载的应力变化，但是某些问题计算的结果却和实验结果符合得很好。在 1950 年初为此曾展开了增量和全量理论的讨论，促使从更根本的理论基础上对它们进行探讨。1951 年美国的 Drucker 从稳定材料的定义出发、讨论了塑性势函数，证明了塑性应变率与屈服面的正交性，并提出相关联的流动法则的概念，为塑性极限分析理论带来很大的方便。在等向强化模型以外，Prager 又提出随动强化等模型，这个模型虽然比较复杂，但却更接近实际情况。60 年代前后，对结构承载能力的研究有很大发展，特别是 Drucker, Prager 等对三维应力状态提出了极值原理，从而引出上、下限定理，随着有限元计算方法的发展，把解题的关键集中到提出更符合实际的本构关系上来。所以在 70 年代对塑性本构关系的研究是很活跃的；实验研究也集中在求后继屈服面的形状以及如何用数学工具来描述它们的问题。随着生产和科学的不断发展的要求，塑性力学必将得到进一步的发展和广泛的应用。

§ 1.3 基本实验资料

在塑性力学中，有两个基本实验：一个是单向拉伸的实验；另一个是材料在静水压力作用下，物体体积变形的实验。这两个实验的结果是建立各种塑性理论的基础，现分别说明如下：

（一）应力应变曲线

从单向拉伸（或压缩）、薄壁管扭转实验所得到的应力应变曲线，说明了材料的强度和塑性性能，它是塑性理论最基本的实验资料。由于纯扭实验所得的曲线几乎与拉伸图完全相似，因此只介绍单向拉伸（或压缩）的某些实验结论。

（1）一般金属材料根据其塑性变形性能的不同可分为两类：一是有明显的屈服流动阶段，有的材料流动阶段是很长的，往往应变可以达到 1%，例如低碳钢，铸钢，某些合金钢（图 1.1a）通常把初始屈服时的应力作为屈服极限，用 σ_s 表示，另一类是没有明显的屈服流动阶段，例如中碳钢，某些高强度合金钢及某些有色金属等，则规定具有 0.2% 的残余应变时的应力作为条件屈服极限 $\sigma_{0.2}$ ，或者把割线模量 $E_s = 0.7 E$ 时的应力作为条件屈服极限 σ_s （ E 为弹性模量）。

从拉伸实验结果可以知道，如应力小于弹性极限，则在加载和卸载时都服从弹性的 Hooke 定律。材料进入塑性阶段以后，加载和卸载将遵循不同的规律。例如图 1 中的 B 点，从那里卸载，应力与应变不沿原曲线 BAO 退回到 O 点，而将沿 BD 线变化，当应力全部消失时，将保留永久应变 OD 。实验表明，材料在塑性变形后再卸载时，可取 BD 平行于 OA ，以 ε^p 表示塑性应变 OD ，则 B 点的应变为：

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p$$