高分自勤奋来

大考场不相信眼泪！

丛书主编：希　扬

决胜在考场

——中考棒题1000

- 熟读棒题一千
- 才华横溢考场
- 今日放飞希望
- 明天收获精彩

数学

此书为中等以上水平考生报考 中华名校 而著

中国少年儿童出版社

决胜在考场——中考棒题1000

数　学

主　　编　希　扬
副主编　黄文斐
本册主编　黄文斐

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

决胜在考场.中考棒题1000.中考数学/希扬主编.
北京:中国少年儿童出版社,2001.5
ISBN 7-5007-5697-6

Ⅰ.决…　Ⅱ.希…　Ⅲ.数学课-初中-习题-升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第25070号

JUE SHENG ZAI KAO CHANG
ZHONG KAO SHU XUE

出版发行：中国少年儿童出版社
出 版 人：

责任编辑：朱玉兰　　**封面设计**：郭　媛

社　址：北京东四十二条二十一号　　**邮政编码**：100708
电　话：086-010-64032266　　**传　真**：086-010-64012262
24小时销售咨询服务热线：086-010-64037667

印刷：北京忠信诚印刷厂　　**经销**：新华书店

开本：880×1230　1/32　　**印张**：10
2001年7月北京第1版　　2001年7月北京第1次印刷
字数：379千字　　**印数**：1-10000册

ISBN 7-5007-5697-6/G·4488　　定价：9.80元

大考场不相信眼泪

——《决胜在考场——中考棒题1000》序

我国是一个考试大国，尽管以考试选拔人才有诸多弊端，但在目前，它仍是行之有效的主要途径。

对一个初中生来说，毕业后上什么样的高中，往往关系到将来考什么样的大学，甚至关系到一生的前途。因此，中考之战，是"身经百战"的学生，在高考大决战之前的一次具有战略意义的重大战役。在现实中，我们常常见到不少学生，为了上重点高中，仅以一两分之差，就要多付出高达万元的高价学费，真让人体味到了中考竞争之激烈，考分之昂贵。

有人说"考场如战场"，决非危言耸听。

考场是无情的，大考场不相信眼泪！

考场虽为决战之地，但制胜之道却在场外。所谓"考场10分钟，场外10年功"，讲的就是功在平时。然而考生情况千差万别，"上学分先后，觉悟有早晚"。我们这套《决胜在考场——中考棒题1000》，就是专为中等和中等水平以上的初中生为考取理想的重点高中而编著的。它选择了最棒的考题，教给您最棒的解题方法，可以用最短的时间，取得最佳的效果，使您考上最棒的学校。

棒题真棒！送您到达理想的彼岸！

希扬

2001.4

前言

本书是初中数学复习的辅导读物,它的读者对象是即将升入普通高中的初三学生和初中数学教师。

本书编写目的旨在解决高、初中数学学习的衔接问题.不少初中学生进入普通高中后,往往感到高中数学难学,高一数学成绩下降是普遍现象,究其原因,一是高一数学教材难点过于集中,二是不适应高中教师的教法,另一重要原因是初中教材难度一再降低,某些知识点,解题方法和技巧在初中教材中已取消或淡化,但在高中解题时又必须掌握,此书将这些知识点,解题方法及相关技巧加以强化,以减少高中学习的困难。

本书有以下特点:

1. 全面介绍初中数学的学习方法、思维方法及总复习方法。

2. 对初中数学的基本题型作了分类,并对各类题型及相关的解题方法、技巧作了详尽且全面的介绍,每类题型都配备了精当的例题和相应的训练题。

3. 将近五年全国各省市的中考综合题分类整理,单列一节(参阅本书§3.1),系统阐述综合题的解题思维方法。

4. 将近五年全国初中数学竞赛题、各省市竞赛题精选入书,一部分选为例题,一部分集中在§3.2一节中。

尽管编者竭尽全力,力求完美,但由于水平所限,疏漏及不当之处在所难免,敬请读者不吝指教。

黄文斐　2001年1月

目　　录

第一章 初中数学的学习方法和思维方法

§1.1 学习方法

著名物理学家爱因斯坦成功的秘诀是：$A=x+y+z$，其中 A 代表成功，x 表示勤奋，y 表示正确的方法，z 表示少说空话. x 和 z 都是对学习态度的要求，在学习上要取得成功，正确的学习态度是前提条件，这就是要勤奋刻苦，认真踏实，所谓"书山有路勤为径，学海无涯苦作舟"，不能幻想有这样一种学法，不必付出时间和精力，就可以轻轻松松地取得高分，因为科学本身需要循序渐进，任何一种学习方法都不是"点金术"，更不是"魔术"，掌握学习方法的前提是勤奋、踏实的态度. 这种态度加上科学的方法，将会使您如虎添翼，在成功的道路上迅跑.

所谓勤奋刻苦，就是要抓紧时间学习，分秒必争，锲而不舍，持之以恒，不怕困难，知难而上.

所谓认真，就是在学习上严格要求自己，不浅尝辄止，满足于一知半解，肤浅的学习状态. 要力求使学习深入下去，要弄清楚课本上每条定义、定理和公式的来龙去脉，推导和证明方法，它们的特例和反例，掌握公式的正用、反用和变化形式，达到深刻理解，灵活运用的水平，这时，这些定理和公式就象是自己发现的一样，能用自己的语言复述，能用自己的方法证明，这才是真懂. 认真的学习态度就是追求真懂.

所谓踏实，就是要循序渐进，打好基础，这是任何学科都要遵循的原则，学数学时这一原则尤为重要. 因为数学有严密的逻辑系统，数学课本是从一些最基本的概念出发，按照一定的逻辑顺序展开，学习当前的内容，需要前面的知识作基础，而现在所学的内容，又是后续知识的基础，一环扣一环，前面的知识掌握与否，直接影响到后继知识的学习和掌握，这一特点就决定了数学学习必须循序渐进，一步一个脚印.

打好基础主要指：要理解基础知识（包括数学概念，定理，法则，公式）；练好基本技能（如运算技能，识图、画图技能，运用数学语言和数学符号的技能等）；掌握基本的数学思维和方法. 基础的知识不但要掌握，而且要烂熟于心，将它们分门别类地贮存在自己头脑中的"数学信息库"内，应用时能随时提取，既准又快.

明确学习目的，端正学习态度. 要想提高学习效率，在学习上少走弯路，事半功倍，就要讲究学习方法，首先要养成良好的学习习惯.

(一)养成良好的学习习惯

什么是习惯？就是在一定条件下自动地去进行某些活动的特殊倾向,它是一个人个性心理特征的主要标志,习惯就是把信念变成习性,把思想化为行动的过程,数学学习习惯就是学生在数学学习过程和对思维品质、学习方法等进行长期反复实践与应用而形成的比较稳固的学习行为,良好的学习习惯是学好数学的必要条件,学习数学的过程就是习惯的培养过程,只有养成良好的习惯,才能学好数学.

(1)独立思考

只有养成独立思考的习惯,才能不断提高独立思考的能力.独立思考的习惯和能力不仅是学好数学的保证,也是数学教育追求的目标之一,爱因斯坦指出:“如果一个人掌握了他的学科的基础理论,并且学会了独立思考和独立工作,他必定会找到他自己的道路,而且比起那种主要以获得细节知识为培训内容的人来说,他一定会更好地适应进步和变化”.

数学是训练思维的体操,学习数学切忌死记硬背,不求甚解,要动脑筋,勤思考,多分析,不但要知其然,还要知其所以然,对每一个知识点,每一道题都要多角度去想.多问几个为什么,做深入细致的“支解”、“综合”和反思工作,对相关联的问题要善于对比,找出它们的区别和联系,才能加以鉴别.要勤观察、多联想,由此及彼,举一反三.

思维从问题开始,会提出问题是独立思考的一种表现,能提出深刻的问题是深入思考的结果,是思维深刻性的表现,读书要善于质疑,“小疑则小进,大疑则大进,疑者觉悟之机也”,从疑到悟的过程,就是发现问题,提出问题,解决问题的过程,也是独立思考的过程.

“学问”就是“学”与“问”的有机结合,有学就有问,我们提倡先思考再发问,不主张动辄就问,遇到问题不懂装懂,心存侥幸,用“不懂不要紧”来安慰自己,这种态度当然不对,但不经思考就问也不可取,正确的态度是遵循想——问——想的原则.首先要下决心弄懂,自己冥思苦想,多看几本参考书,因为不同的参考书对同一问题的解释角度或解题方法可能不同,可以从不同的侧面启迪我们的思维,如果经过这些努力仍不能解决问题,再虚心请教别人,请别人在关键处提示一下,但不要讲透,留下思考余地,然后自己再去思考,在解决问题之后还要进行反思,将自己原先的思路和方法与别人提供的思路和方法作一番对比,想一想自己的思路在何处受阻,自己的方法是否可行？是此路不通还是方法过于繁琐？能否加以改进？这一番反思有时比解决问题本身更为重要,它有助于培养良好的思维品质,提高思维的批判性和深刻性.

(2)在理解的基础上记忆

数学是重理解的学科,理解是重要的,在理解基础上的记忆同样不能忽视,要养成在理解基础上记忆的好习惯.

任何思维活动都离不开记忆,数学学习也是如此,我们每一个人的头脑中都有一个数学信息库,它是由已经理解和掌握的数学概念,公式法则,定理,数学方法,基本题型形成的"知识块"所组成,这个信息库就是我们用以进行数学思维活动的原料仓库,思维活动的质量和水平基本上取决于这个仓库信息贮量的多少和是否排列有序,如果信息量大而且形成网络,需用时就能呼之即出,信手拈来,这样的人就会联想丰富,反应敏捷,显得聪明,这就是"聪明在于学习,天才由于积累"的道理,有人埋怨自己脑子笨,不是学数学的料.其实,没有天生的笨人,笨的原因就是脑子里贮存的数学信息量太少或者没有经过整理,形不成知识网络.

信息的来源在于记忆,而记忆力的强弱,除先天因素外,主要是后天发展形成的,人脑是可以训练的,只要能有意识地从各方面训练记忆,记忆力是可以提高的.

要增强记忆力,首要的一环是要给自己规定记忆的任务,有记住的打算,有自觉的目的,有迫切的要求,这样,才能为记住有关公式而作出一定的意志努力,采取一定的记忆方法.

记忆,也有一个方法问题,方法得当,事半功倍,有助于提高记忆效果,根据增强记忆能力的基本途径,人们在实践中创造了不少行之有效的记忆方法,常用的记忆方法有逻辑记忆法、系统记忆法、对比记忆法、区别记忆法、简化记忆法、形象记忆法等.

(二)提高45分钟的学习效率

学习是一种复杂的脑力劳动,学习方法本身也是有个性的,对不同的学科,不同层次的知识学习方法也应有所不同.仅就学习的四个环节——预习、听课、复习、作业而言,听课、作业这两个环节是必不可少的,但预习、复习这两个环节是否必要就要因人而异、因课而异.由于初中数学课知识容量较少,对于那些学习基础好,接受能力强的学生,即使不预习也能很轻松地接受老师的讲课内容,如果把预习时间用于解题或阅读课外读物收效会更大.对于一些注意力不易集中,自控能力差的学生,预习可能还有负作用,这是因为经过预习,他们对课堂上老师讲课的内容已略知一二,这些内容对他们已缺乏新鲜感,老师创设的问题情境也不能激发他们的好奇心和求知欲,于是在课堂上他们会注意力涣散,对知识的掌握只能停留在一知半解的层次上.

一般来说,应该先复习后作业,但不能一概而论,如果课堂学习效率很高,老师讲的知识在课堂上已经完全消化了,法则或公式都记住了,没有遗留问题,课后就可以立即做作业,在学习的四个环节中,更重要的环节是听课,要重视听课,善于听课,最大限度地提高课堂45分钟的学习效益.

(1)专心致志是听好课的基础

要听好课,听懂课,首先要专心致志.所谓专心,就是要集中注意力,不要分心,所谓致志,就是锻炼自己的注意力,俄国教育家乌申斯基说过:"注意是知识的门户,没有它,知识的阳光就照射不进来."学习效果的优劣与学习时集中注意力的程度密切相关,怎样才能做到专心致志呢?

明确听课目的,是听课中长时间保持集中注意的必要条件.此外,注意与兴趣有着密切关系,兴趣是引起和维持注意的重要因素,但兴趣不是天赋,是可以通过后天的学习和训练加以培养的,是在人们需要的基础上产生和发展的,原来对数学不感兴趣的人,如果认识到数学是一切科学的工具,用顽强的毅力去克服学习中的困难,在学习过程中逐步领略到数学中所蕴含的美的因素,如数学语言的简练美、严谨美、数学公式的对称美,几何图形的和谐美等,不再感到数学枯燥难懂,随着学习成绩的提高,对数学的兴趣就会越来越浓.

听课时,常常会受到各种外部因素或内部因素的干扰,如环境嘈杂,心情不愉快,身体状况欠佳等,这就需要有坚强的意志和自我控制能力,排除干扰,迫使自己集中注意力听课.

(2)积极思维是听好课的关键

专心致志,集中注意是听好课的必要条件,但并非唯一条件,为了提高听课效率,还要讲究听课方法,听课的基本方法是:以老师讲课的思路为主线,充分调动自己的各种感觉器官的功能,手脑并用,把听、看、想、做、记有机地结合起来,在这五个字中,想——积极思维是关键,听、看、做、记都离不开想、离不开思考.

在听课时,要紧扣老师的思路,经常想一想"为什么"和"怎么办".例如,对于数学概念要想一想为什么要建立这个概念,与这个概念相近或对立的概念是什么?对于定理,要分清条件和结论,想一想证明的关键步骤在哪里?是否还有其他证法,对于公式,想一想公式的来龙去脉,适用范围,公式的结构特征.并尽可能在课堂内记住所学的公式和定理,对于例题,想一想解题用的是什么方法,其中包含哪些解题技巧,是否有别的解法?

听课,主要是接受老师的思路,如果自己有独特的想法,在课堂上也不要沉溺于自己的思路,课后复习再去考虑自己的想法是否正确.在听课时,"卡壳"现象是难免的,如果急于马上弄明白,将注意力停留在"卡壳"的环节上,就会偏离老师讲

课的思路,后面的内容就听不懂了,正确的做法是在"卡壳"环节处打个问号,越过它,继续听下去,也许听了后面的内容卡壳的问题就迎刃而解了,如果仍解决不了,作为遗留问题在复习时再解决.

做,主要是做课堂练习,即当堂听课,当堂练习,课堂练习一般是围绕讲课的内容的一些基础题,难度不大,认真做课堂练习,可以巩固听课成果,及时发现问题,为课后完成家庭作业打好基础.

记,包括两方面的要求,一是记笔记,二是当堂记住这节课的主要内容,定理和公式.在听课时首先要有记忆的打算,并采用适当的方法去记忆.

做好听课笔记,是听课的一个有机组成部分,在听课时,既要听、看、想,又要记笔记,处理得不好,会顾此失彼,记笔记应该从属于听讲和思考,首先是听、看、想,然后才是记,有些人颠倒了主从位置,把自己变成了书记员,只顾抄笔记,不动脑筋,结果是笔记很完整,很漂亮,但对笔记的内容却不甚了然,对于学习基础差,听课感到吃力的学生,可以少记笔记或暂时不记,课后再补.至于笔记的内容和方式,要从实际出发,如果教师讲的内容与教科书基本相同,可以不记或少记,将内容提要,思路等记在教科书上有关内容四周的空白处,用红笔将重要结论,概念勾起来,将关键词语标上着重号,如果老师讲课的思路与教科书不完全相同,或有较多的补充,教科书上记不下,就应记在笔记本上.

听课时,有的学生只听中间,不重视开场白和结束语,其实开场白很重要,开场白是由旧知识引入新知识,点出新课的中心内容,结束语也同样重要,结束语归纳这一节课的重点,方法或解题规律,有画龙点睛的作用.

(三)认真做好每一次作业

作业是学习的四个环节中最后一个环节,对于数学学习,这个环节必不可少,它的重要性仅次于听课,华罗庚说过,"如果不做书上所附的习题,那就好比入宝山而空返".通过做作业,可以巩固课堂上所学的知识,对数学概念加深理解,进一步掌握解题方法和解题规律,另一方面,解题能力是衡量一个人数学水平的主要标志之一,一般数学考试就是考解题,要提高解题能力,就要认真做好每一次作业.

1. 如果在课堂上没有完全解决问题或课堂上讲的知识还记不住,那就一定要先复习再作业,切忌不复习乱作业,有些学生,平时不记公式,每到做作业才翻书抄公式,考试前突击记公式,这种恶习最终导致学习成绩低下.

2. 做作业要专心,要有时间观念.不要拖拖拉拉.有的学生做作业时听音乐,美其名曰"调节神经",这是不可取的,解数学题是一种繁重的脑力劳动,必须注意力高度集中,否则会出现失误,影响作业质量.

3. 要独立思考,独立完成作业.有的学生解题只能模仿例题,对型入座,如果

题目的条件或结论稍有变化，不能对型入座，就不愿意深入思考，细致分析，立刻去问别人，或索性“参考”别人的作业，这种“思想懒汉”是学不好数学的.

4. 解题过程要清楚，书写要合乎规范，解题格式以教科书上的例题或教师的范例为准，在书写时要做到字迹清楚，疏密合度，行款得当，详略得当，例如初学某种运算，解题时应把运算步骤一步步写出来，不能遗漏，熟练之后，可以只写关键步骤，要做到题解过程清楚，首先要提高自己的逻辑表达能力，正确使用数学语言符号，其次要打腹稿，下笔之前要想清楚先写什么后写什么，哪些详写哪些略写，不要想到一点写一点，缺乏全盘考虑，这样的题解必然没有条理. 优秀的题解是一篇好文章，它应该是逻辑清楚，计算准确，条理分明，结构紧凑，详略得当.

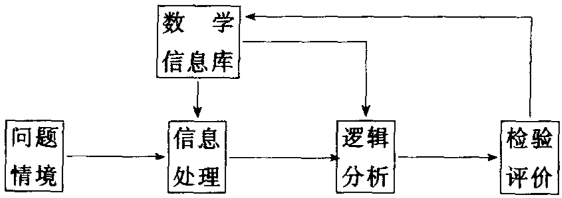
5. 对解题结果要进行检验，这是题解的一个重要环节. 一是要检验是否有不合题意的解，二是检查解题过程有无差错和疏漏，前者是解答的必要组成部分，必须在题解中写出来，后者虽无须写出，但并非可有可无，养成检验习惯，这是作业认真的一种表现. 检验也要讲究方法，不同的题型有不同的检验方法，例如，对于数或式的计算可以利用其逆运算进行验算；对于解方程，可以把求得的解代入原方程检验，对于几何问题，可以通过精确作图来验证，对于有多种解法的题目，可以用不同的方法去解等等. 不掌握检验方法，有自己的“失误点”心中无数，不可能查出问题来，检验也就失去了作用，有的同学，解完题后，自己不想检验，总想找人对答案，这是一种不良习惯.

6. 批改了作业要重新看一遍，对解题中出现的差错要认真思考，细致分析，然后改错或重做，还要查找出错的原因，以便吸取教训，并进行反思，想一想此题能否一题多解，诸多解法中，哪一种是通法？哪一种解法需要特殊技巧？再想一想此题的结论能否推广？逆命题是否成立等等. “反思”是解题的最后一个环节，也是不可缺少的环节，它有充实数学信息库，提高解题效益的功能，如果只是片面追求解题数量，解题时不愿独立思考，解题后懒得反思，这种题海战术是低效率的做法，事倍功半. 须知，解题能力虽与解题数量密切相关，但并非成正比，在做了一定数量的题目之后，勤于“反思”的人会实现由知识到能力的飞跃，解题能力迅速提高，而懒于“反思”的人却可能陷入茫茫“题海”中不能自拔.

§1.2 思维方法

学数学离不开解题，中学数学学习的关键就是要学会解题，不少同学由于未掌握正确的思维方法，常常“望题兴叹”，束手无策.

解题的思维模式可用下图表示：



信息处理是解题的中心环节，解题者根据问题情境提供的信息，不断从自身的数学信息库中提取相关的信息，经过分析、综合、类比、联想、归纳等一系列思维活动，探索解题方法和思路.

逻辑分析阶段主要使解题思路具体化，得到解题步骤. 这一阶段也需要从信息库中不断提取相关信息.

检验和评价就是检验解题过程和结果的正确性，评价解法的优劣，进而把问题特殊化或普遍化，并选出需要记忆的知识，(题目的结论，解题的方法和技巧)存入数学信息库，以便今后解题之用.

如果说问题是数学的心脏，那么解题的思维方法就应当是数学的灵魂. 思维方法不是指解答某道题的具体方法，也不是指分解因式之类的技术性方法，而是指如何考察数学问题的带有全局性，指导性的普遍方法，例如要解决“拿到一道数学题后，该如何着手?”之类的问题，就是需要思维方法指导的根本问题.

思维方法是丰富多彩的，本书仅介绍常用的几种即广泛联想、适时化归、逆向思维、特殊探路、辅助与构造.

(一)广泛联想

解题过程就是由题目条件向结论转化的过程，由此及彼的联想能启迪思维，在条件和结论之间搭桥开路. 可以毫不夸张地说，没有联想就没有思维活动，就无从解题.

联想要有明确的目的，要充分注意命题的结构，注意条件和结论的特征或图形的特征，从命题的具体情况出发，从不同的方向进行联想，有时可联想有关定理和公式，有时可联想解过的题目，还可以联想某些解题方法和技巧，还可以将以上几个方面结合起来联想.

数学中的定义、定理、公式、法则等都是解题的依据，其推导或证明方法也是典型的数学问题，可以作为解题的借鉴，面对待解的命题，应充分审题，联想有关的定义、定理和公式，这是最基本的联想. 例如有关代数式的分解变形，可以联想乘法公式，多项式分解因式；有关一元二次方程或二次三项式的命题，可以联想根的判别式，根与系数的关系，二次三项式的因式分解公式；有关比例线段的证明题，可以联想平行线截得比例线段定理，相似三角形对应边成比例，涉及圆的比例

线段的证明,可以联想圆幂定理,切线长定理,有关直角三角形的命题,应该联想勾股定理,斜边上的中线等于斜边的一半,锐角三角函数等,如果命题结构不太复杂,综合性不大,经过这样的联想,一般能顺利找到解题途径.

有些命题数量关系比较复杂,按上述方法联想,有时可能头绪很多,不容易确定解题方向.在这种情况下,不妨从命题结构上,联想过去做过的结构相似的题目,以便从中得到启发,尽快找到解题途径.

为了少走弯路,避免不必要的挫折,有时也可以从命题具体情况出发,联想某些常用的证明方法,例如有关线段的比值的问题,可以联想面积证法,有关唯一性命题,可以联想反证法或同一法;求一次、二次函数解析式,应当联想特定系数法;解较复杂的几何计算题应联想方程解法等等.

联想是寻求解题途径,发现解题方法的一种基本思维方法,不少题目经过广泛联想,很容易找到证明途径,对于结构复杂的命题,一般需要多种思维方法才能探明解题线索,但是联想却是不可缺少的一种思维方法,联想的结果常常可以作为进一步分析的出发点.为了活跃思维,使联想能左右逢源,必须牢固掌握数学基础知识,基本方法,熟悉定义、定理和公式,经常回顾做过的题目,记住一些典型题目的结论和解题方法,总之要不断充实和整理自己的数学信息库,这是联想的源泉.

【例1】 已知实数 a、b 满足 $a^2+3a+1=0$,$b^2+3b+1=0$,求代数式 $\frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}$ 的值.

【分析】 由 $a^2+3a+1=0$ 得 $a^2+1=-3a$,由 $b^2+3b+1=0$ 得 $b^2+1=-3b$

则 $\frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}=\frac{b}{-3a}+\frac{a}{-3b}$

$=-\frac{1}{3}(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})=-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}$

这是一个对称式,$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,由此联想到一元二次方程两根的和与积,事实上,a、b 是一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根,于是得 $a+b=-3$,$ab=1$.

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{b}{a^2+1}+\frac{a}{b^2+1}&=-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}\\&=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}\\&=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(-3)^2-2\times1}{1}\\&=-\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

【解】 略.

【例 2】 如图 1-1 在$\triangle ABC$中,CD是$\angle ACB$平分线,延长CD交外接圆于E,求证:$BE^2=DE\cdot EC$

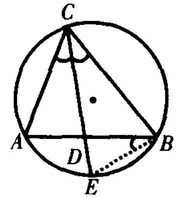


图 1-1

【分析】 乘积式$BE^2=DE\cdot EC$,通常化为比例式$\frac{BE}{EC}=\frac{DE}{BE}$,从结论看,可以联想相似三角形对应边成比例,由于两个比中有一条公共线段BE,将BE看成两个相似三角形的公共边,BE与EC是$\triangle BEC$的边,DE与BE是$\triangle BDE$的边,要证$\frac{BE}{EC}=\frac{DE}{BE}$,只须证$\triangle BEC\backsim\triangle BDE$.

【证明】 连结BE.

∵ $\angle ACE=\angle ABE$,且$\angle ACE=\angle BCE$,

则 $\angle ABE=\angle BCE$,即$\angle DBE=\angle BCE$,

又∵ $\angle DEB=\angle CEB$,

∴ $\triangle BEC\backsim\triangle BDE$,

故 $\frac{BE}{EC}=\frac{DE}{BE}$,即$BE^2=DE\cdot EC$.

就一个具体的命题而言,可以联想的定理很多,从何入手,运用哪些定理证明或计算,只能具体问题具体分析.

(二)适时化归

所谓化归,就是将要解决的问题,通过转化,归结为一个已经解决的问题,或者归结为一个比较容易解决的问题,或者归结为一个已为人们所熟知的具有既定解决方法和程序的问题.

在初中课本中,自始至终贯串着化归的思想方法.例如将有理数大小比较转化为算术数(非负数)大小比较;将有理数四则运算转化为算术数的运算;整式加减法运算法则的实质是利用合并同类项转化为有理数加减法运算,多项式乘以多项式转化为单项式乘以多项式,而单项式乘以多项式又转化为单项式乘以单项式;方程和方程组的解法更是化归思想的典型体现,一元一次方程解法的五个步骤实质上是一种化归程序,即将一元一次方程化为最简单的$x=a$的程序.一元二次方程各种解法及求根公式的实质是降次,即把二次方程化为两个一次方程,一元一次.二次方程的解法是解方程的基本模式.多元方程组通过消元化为一元方程;无理方程有理化,分式方程整式化,高次方程低次化,这一系列化归的终极目标是化归为基本模式即一元一次、二次方程,化归的方法是消元和降次.

平面几何中也渗透着化归的思想方法,初中平面几何研究的是平面图形的性质,这些变化无穷的平面图形则是由各种不同的最简单最基本的图形组合而成,

要解决一个几何问题，只要在复杂图形中，辨析或构造出基本图形，再应用基本图形的性质，使问题得到解决，即把需解决的几何问题作为化归对象，把基本图形作为化归目标，将复杂图形化归为基本图形，这就是基本图形分析法.

用化归方法解题，就是把原题连续化简或连续化易，最后化为一道基本题——解题方法程序化的规范问题，简言之，所谓化归，就是问题的规范化，模式化. 俄罗斯著名的数学家雅诺夫斯卡娅对"解题是什么"的回答惊人的简单，她说："解题就是把习题归结为已经解过的问题".

【例3】 解无理方程：$x^2-6x-6-x\sqrt{x^2-2x-2}=0$

【解】 $3x^2-6x-6-x\sqrt{x^2-2x-2}-2x^2=0$,

即 $3(x^2-2x-2)-x\sqrt{x^2-2x-2}-2x^2=0$

令 $y=\sqrt{x^2-2x-2}$ 得，

$3y^2-xy-2x^2=0$,

$(3y+2x)(y-x)=0$,

得 $3y+2x=0$, 或 $y-x=0$,

即 $3\sqrt{x^2-2x-2}=-2x$, 或 $\sqrt{x^2-2x}=x$,

两边平方得，

$9(x^2-2x-2)=4x^2$, 或 $x^2-2x-2=x^2$,

即 $5x^2-18x-18=0$, $x=-1$.

$x=\dfrac{9\pm3\sqrt{19}}{5}$

经检验 $x=\dfrac{9-3\sqrt{19}}{5}$ 是原方程的根，$x=\dfrac{9+3\sqrt{19}}{5}$ 和 $x=-1$，是增根.

以上解法是通过连续化简实现化归的典型方法. 首先利用换元和因式分解将一个复杂的不规范的无理方程化简为无理方程的基本模式 $3\sqrt{x^2-2x-2}=-2x$或 $\sqrt{x^2-2x-2}=x$，然后用平方法将无理方程化归为方程的基本模式——一元一次或二次方程.

从某种意义上讲，解题就是化归，就是连续化简，这是一条带公理性的解题规律.

化归方法包含三个基本要素：化归的对象、化归的目标和化归的方法. 在上例中，化归的对象是一个复杂的无理方程，形式不规范，化归的目标是无理方程的基本模式，无理方程基本模式的化归目标又是一元一次或二次方程，化归的方法是换元、因式分解、及平方法.

【例4】 如图1-2，AB、CD是⊙O的两条弦，且AB、CD交于P点. 求证：$\angle APC$的度数等于$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{BD}$度数和的一半.

【分析】 $\angle APC$ 的顶点在圆内（称为圆内角）联想到圆周角定理，设法将 $\angle APC$ 转化为两个圆周角的和.

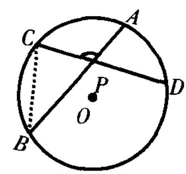


图 1-2

【证明】 连结 BC.

则 $\angle APC$ 是 $\triangle BPC$ 的外角，根据三角形外角定理得，$\angle APC=\angle PBC+\angle PCB$，

$\because$ $\angle PBC=\angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$度数，

$\angle PCB=\angle DCB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 度数，

$\therefore$ $\angle APC$ 度数$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$度数.

在此例中，化归的对象是圆内角 $\angle APC$ 的度数，化归的目标是圆周角，化归的方法是添加辅助线，构造三角形，再用三角形外角定理.

【例 5】 如图 1-3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90°$，$\angle A:\angle ADC:\angle BCD=2:3:4$，$AB=3$，$CD=2$，求 BC 的长.

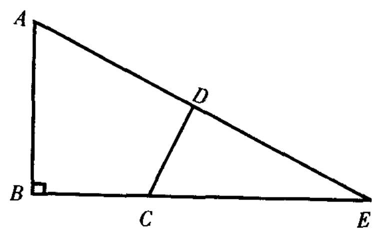


图 1-3

【分析】 根据四边形内角和为 360°，由 $\angle B=90°$，可得 $\angle A=60°$，$\angle ADC=90°$，$\angle BCD=120°$，欲求 BC 的长，若连结 AC，BD，均使特殊角 60°、120°、90°遭到支解，如果能构造出与 AB、CD、BC 有联系且含有特殊角的图形，BC 长便可求出.

【解】 延长 AD、BC 交于 E 点，如图 1-3.

$\because$ $\angle A+\angle B+\angle BCD+\angle ADC=360°$，　又　$\angle B=90°$，

得　$\angle A+\angle BCD+\angle ADC=270°$　又　$\angle A:\angle ADC:\angle BCD=2:3:4$，

则　$\angle A=\frac{2}{9}\times 270°=60°$　$\angle ADC=\frac{3}{9}\times 270°=90°$　$\angle BCD=\frac{4}{9}\times 270°=120°$

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AB=3$，$\angle A=60°$，

得　$BE=AB\text{tg}\angle A=3\text{tg}60°=3\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle CDE$ 中，$CD=2$，

$\angle CED=\angle AEB=90°-\angle A=30°$，

得　$CE=2CD=4$，

$\therefore$　$BC=BE-CE=3\sqrt{3}-4$.

在此例中，化归的对象是四边形，化归的目标是特殊图形——直角三角形，化归的方法是添辅助线，构成直角三角形，本例的另一种解法是，延长 AB、DC 交于