DAXUE WULI SHIYAN

大学物理实验

刘雅茹 张明利 张景娇 主编

冶 金 工 业 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/刘雅茹，张明利，张景娇主编.-北京：冶金工业出版社，2000.4（2000.10重印）
ISBN 7-5024-2557-8

Ⅰ.大… Ⅱ.①刘…②张…③张… Ⅲ.物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第14360号

出版人 卿启云（北京沙滩嵩祝院北巷39号，邮编100009）
责任编辑 戴 群 谭学余 美术编辑 王耀忠 责任校对 杨 力 责任印制 李玉山
北京梨园彩印厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2000年4月第1版，2000年10月第2次印刷
787mm×1092mm 1/16；13.25印张；319千字；204页；5001-7000册
21.80元
冶金工业出版社发行部 电话：（010）64044283 传真：（010）64027893
冶金书店 地址：北京东四西大街46号（100711） 电话：（010）65289081
（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前　言

本书是按照国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》，结合河北理工学院物理实验课教学改革的经验编写的物理实验教材。

大学物理实验作为一门独立设置的必修基础课程，在教学目的、教学思想、教学内容和教学方法等方面都进行了很多改革，在若干方面提出了新的要求，原来的实验教材已不适应新的教学需要。因此，我们在总结教学经验和尝试改革的基础上，对传统的教材作了较大幅度的改动。提高了教学起点，适当加深了难度；增加了实验基础理论的内容；在测量结果质量评定上引入了测量不确定度概念；在数据处理方法方面加强了较科学的最小二乘法数据处理方法；对有较好保留价值的题目，尽量向应用方面发展，尽力与现代科学技术接轨，将数字仪表、智能仪表、激光技术、传感技术、CCD技术和计算机技术等引入到物理实验中；增大了综合性、设计性实验的比例，以加强学生综合能力的培养；在内容安排上，打破了按力、热、电、光、近代物理的层次，建立了教学内容分为基本实验、综合设计性实验和研究性实验三个层次的新体系。

实验教学是一项集体的事业，本书的编写凝聚了许多实验教师和技术人员的智慧，是他们多年积累的劳动成果，同时也吸收了兄弟院校宝贵的经验。孙正云、张丽慧、周志坚、郑仁宽、戴占海、艾小军等老师参加了本书的编写和有关工作。

本书由王家春老师审稿，在编写过程中，得到了多方面的关怀和支持，在此，我们一并对本书作出贡献的所有同志表示真挚的谢意。

编写一本适用的实验教材，是一项艰巨而复杂的系统工作，需要做长时间研究和努力才能完成，对我们来说，此项工作仅是初步尝试。由于业务水平有限，许多问题的处理很不成熟，难免有漏误之处，敬请读者给予批评和指正。

编　者

1999年12月

第一章 测量误差与数据处理基本知识

人们在生产和科学实验中经常需要对各种物理量进行测量，以获得这些量的定量结果或各量之间的定量关系，并通过对测量数据的误差分析和数据处理，科学地评价测得的物理量或物理关系接近于客观真实性的程度，以求得对自然现象本质的认识，这就形成了测量误差与数据处理的基本理论。

第一节 测量与测量误差

一、测量及其分类

对物理量的测量，就是在一定条件下，借助于仪器，通过实验的方法，把被测量和作为计量单位的标准量相比较的过程。或者说，测量就是测定待测量和标准计量单位的倍数关系。

对物理量的测量结果，可根据实际需要，有的只需写出被测量的量值，有的需要在固定坐标上绘出各量之间的关系图线，也有的需要按一定比例给出测量的图形。对任意一种测量结果，其物理量都必须由数值（倍数）和单位构成。

测量的基本分类是：

（1）直接测量和间接测量

根据取得测量结果的方法不同，可将测量分为两类。用量具或仪表直接读出测量值的，称为直接测量，相应的物理量称为直接测得量，例如用刻度尺测长度、用电流表测电流等。另外，还有很多物理量，它们不是用仪器直接测量的，而是先直接测量一些其他相关量，再用物理公式计算出结果，这称为间接测量，其相应的物理量称为间接测得量，例如在测电阻 R 时，可用电压表直接测电阻两端电压 U 值、用电流表直接测电阻上通过的电流 I 值，再用公式 $R=U/I$ 计算出电阻 R 值，对电阻的测量就属于间接测量。看来，直接测量是间接测量的基础。但必须指出，一个物理量需要直接测量还是需要间接测量，这通常与选用仪器有关，例如测液体密度（比重），可选用用比重计直接测量，也可以选用天平和量筒间接测量。

（2）等精度测量和不等精度测量

根据测量条件的不同，也可将测量分为两类。如果对某一物理量重复地测量了多次，而且每次测量都是在相同条件下（同一仪器、同一方法、同一环境、同一观察者）进行的，这时我们没有根据指出某一次测量比另一次更准确些，认为每次测量都是在相同精度下测得的，这称为等精度测量。如果在多次测量中，其中每次条件有了变化，那么在条件改变下的测量就是不等精度测量。

等精度测量和不等精度测量的数据处理方法是不同的，在大学物理实验中的重复测量都认为是在相同条件下的等精度测量。

二、测量误差及其表示方法

任一物理量，在一定条件下都存在一个客观值，这个客观值称为该物理量的真实值。而用实验手段测出来的值则称为该物理量的测得值。

由于仪器准确度、测量方法、环境影响等条件的限制，任何实验测量总是得不到真实值的，测得值与真实值总是存在差异，这种差异称为测量误差，简称误差。

对误差可采用两种表示方法：

（1）绝对误差

根据误差的定义，如以 A 表示某一物理量的真实值，以 x 表示该量的测得值，则绝对误差为

$$\delta = x - A$$

绝对误差 δ 可正可负，是一个代数值。它只表示测得值偏离真实值的程度，还不能全面表示测量的准确程度。

（2）相对误差

为了更进一步地评价测量结果的精确程度，不仅要看绝对误差的大小，还要看被测量本身的大小，于是又定义出相对误差的概念，相对误差为

$$\epsilon = \frac{\delta}{A} \times 100\%$$

相对误差 ϵ 小时，则表明测量的准确度高。例如，对两个电阻 R_1 和 R_2 的测量，如它们的绝对误差都是 $\delta=0.1\Omega$，而 $R_1=10.0\Omega$、$R_2=100.0\Omega$，则相对误差分别为 $\epsilon_1=\frac{0.1}{10.0}\times100\%=1\%$、$\epsilon_2=\frac{0.1}{100.0}\times100\%=0.1\%$，显然对第二个电阻测量的准确程度高。

三、误差的分类

根据误差产生原因和误差自身特点的不同，可将误差分为系统误差和随机误差两类。

1. *系统误差*

在同一条件下多次测量同一物理量时，误差的大小和符号始终保持恒定，或在条件改变时，误差的大小和符号按一定规律变化，这种误差叫系统误差。

系统误差是由于在测量过程中，存在某些确定的或按一定规律变化的不合理因素引起的，这种因素使测量结果向真实值的某一方向偏移一固定的量或按一定规律偏移真实值。

2. *随机误差*

在测量过程中，除存在某些确定因素影响外，还必然存在一些随机因素的影响。在同一条件下多次测量同一物理量时，由于一些随机因素的影响，而出现时大时小、时正时负的误差叫随机误差。

第二节　系统误差

一、系统误差的来源

系统误差来源于一些确定的不合理因素，它们是：

（1）由仪器本身的缺陷（如天平不等臂）或安装调试不当引起；

（2）由实验原理或实验方法的不完善（如计算公式的近似或忽略一些其他因素的影

响）所致；

（3）由外界环境（如温度、大气压、电磁场）变化所引起；

（4）由测量者的固有习惯、测量方法和测量技术的不正确所造成。

二、系统误差的发现

因系统误差总是使测量结果向一个方向偏离，因此原则上是能够发现系统误差的。人们经过长期实践和理论研究总结出一些发现系统误差的方法，其具体方法是：

（1）实验对比法

实验对比法就是改变实验的部分条件，乃至全部安排来测量被测量。对比改变前后的测得值是否有明显的不同，从中分析有无系统误差及产生根源。

实验对比法有多种，它包括：(1) 实验方法的对比，即用不同实验方法测量同一个量，看结果是否一致；(2) 仪器的对比，如改用不同电流表接入同一电路对比；(3) 改变测量步骤的对比，如测某物理量与温度的关系可以升温测量再降温测量看读数点是否一致；(4) 改变实验条件或换人测量等方法进行对比，如将物体分别放入天平的左盘和右盘称量，可发现天平不等臂引起的误差。

（2）理论分析法

它包括分析实验所依据的理论公式所要求的条件与本实验实际情况有无差异；分析仪器所要求的使用条件是否得到满足等。理论分析法是发现、确定系统误差最基本的方法。

（3）数据分析法

这种方法的理论根据是，如果是随机误差则服从一定的统计规律，如果是系统误差则不服从这种规律。当在相同条件下得到大量数据时，可采用这种方法判断是否为系统误差。比如按顺序记录的测量数据在时间和空间上是随机的，则为随机误差；而测量数据的偏差是单向的或周期性变化，则说明存在固定的或变化的系统误差。

以上只是从普遍意义上介绍了几种发现系统误差的方法，在实际工作中还可针对具体情况采用个别考察办法。

三、系统误差的修正和限制

对系统误差的处理可分为两种情况来考虑。一是对于能掌握的系统误差，可取其负值为修正值加到测量结果上，使测量结果得到修正；或者在计算公式上加上修正项去消除某项系统误差；或者用更高一级的标准仪器校准一般仪器，得到修正值或修正曲线等。二是对于在实际工作中有时难以找出确切的系统误差，这就要求在测量中想方设法抵消它的影响，从测量方法上抵消系统误差的常用方法是：

（1）替代法

在测量装置上对被测量进行测量后，再用已知标准量替换被测量进行同样的测量，并使仪器指示不变，则已知标准量就等于被测量。例如，天平两臂长分别为 L_1 和 L_2，当未知量 x 与砝码 T 平衡时，若天平等臂则有 $x=T$，若天平不严格等臂再取 $x=T$ 就会出现系统误差。现移去 x 以标准砝码 P 取而代之，当天平重新平衡时，则有 $x=P$，这就消除了由于 $L_1 \neq L_2$ 所带来的系统误差。

（2）抵消法

这种方法也叫异号法。在对被测量进行两次测量时，使系统误差一次出现正值，另一次为负值，取两次测量结果的平均值作为最后结果，以达到消除系统误差的目的。如磁电

式仪表在有较强恒定磁场环境中工作时，可将仪表转 180°取两次读数，用两个读数的平均值作为最后结果，则可消除外界恒定磁场带来的系统误差。

(3) 交换法

将被测量与标准量的位置互换进行两次测量，取两次测量的平均值作为测量结果，以达到消除系统误差的目的。再以天平不等臂为例，将被测量 x 放在左侧，标准量砝码放在右侧，天平平衡时砝码为 T 值，则有

$$x = \frac{L_2}{L_1} T$$

将被测量与砝码位置互换，天平再次平衡时，所需砝码值为 T'，则有

$$T' = \frac{L_2}{L_1} x$$

从而可得

$$x = \sqrt{TT'} = \frac{T + T'}{2}$$

这就消除了因天平不等臂所带来的误差。

(4) 半周期偶数观测法

它能消除按周期性规律变化的系统误差。具体方法是按系统误差变化的半个周期间隔取值，每周期内取两个观测值，然后取平均值作为结果。例如，分光计刻度盘偏心带来的角度测量误差是以 360°为周期，就采取相隔 180°的一对游标，每次测量读两个数，并取此二值的平均数作为测量结果，则可消除系统误差的影响。

(5) 对称观测法

若有随时间线性变化的系统误差，可将观测程序对某时刻对称地再做一次。例如，一只灵敏电流计零点随时间有线性漂移，在测量读数前记录一次零点值，测量读数后再记录一次零点值，取两次零点值的平均值来修正测量值。由于很多随时间变化的误差在短时间内均可看成是线性变化,因此对称观测法是一种能够消除随时间变化的系统误差的好方法。

总之，消除或减小系统误差的基本原则是找出产生误差的原因消除它的影响，如果做不到就采取修正的办法，或者在测量中设法抵消它的影响。

第三节　随机误差的数学处理

在测量时，即使精心排除产生系统误差的因素之后，由于人的感官灵敏程度和仪器的精度所限，由于周围环境的干扰等一些难以控制的随机因素的影响，也还会产生随机误差。由于随机误差的产生不能预料、不能控制，因此也就没有办法将其消除，只能按其所服从的统计规律进行合适的数学处理。

一、随机误差的统计规律

设某一物理量的真实值为 A，对其多次重复测量值分别为 x_1、x_2、…、x_n，则各次测量的随机误差可表示为

$$\delta_i = x_i - A \quad i = 1、2、\cdots、n$$

大量的实验事实证明，只要测量次数足够多，随机误差 δ_i 服从正态分布（或称高斯分布），

它具有以下性质：

（1）对称性：绝对值相等的正、负误差出现的概率接近相等。

（2）有界性：绝对值很大的误差出现的概率为零，即误差的绝对值不会超过某一界线。

（3）单峰性：绝对值小的误差出现的概率大，绝对值大的误差出现的概率小。

（4）抵偿性：当测量次数足够多时，由于绝对值相等的正、负误差出现的概率相等，因而随机误差的代数和趋于零。

抵偿性是随机误差最本质的统计特性，一般地讲，凡是具有抵偿性的误差，原则上都可以按随机误差处理。

二、随机误差的估算方法

由随机误差的分布特点可知，当测量次数足够多时，可得到图 1-3-1 所示的误差正态分布曲线。横轴表示误差 δ，纵轴表示误差的概率密度分布函数 $f(\delta)$。此函数的意义是表示在单位误差间隔内出现误差 δ 的概率。曲线下的总面积表示各种误差出现概率的总和，应恒等于 1。即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\mathrm{d}\delta = 1 \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

在一定测量条件下，概率密度分布曲线就被惟一确定下来。测量条件不同，其概率密度分布曲线也就不同。对于某一组测量来讲，如果各测得值的随机误差小，则说明此组测量值的离散性小，因曲线下的总面积为 1，所以该曲线就高而窄，如图 1-3-1 所示。反之，如果另一组各测得值的随机误差大，则此组测量值的离散性大，其概率曲线就平坦，如图 1-3-2 所示。因此，用概率密度曲线的形状可以定性地说明测量的可靠性程度。为了定量地表示测量的可靠程度，我们应该选用一个数来表示它，这个数能够反映任一次测量值 x_i 的可靠性的概率值。为此，我们用曲线上的一个特征点来表示曲线的形状，最典型的特征点是曲线的拐点在横轴上的坐标值 $\pm\sigma$，此值小则曲线窄，说明这组测得值离散性小，因此可用 σ 值来描述测得值的可靠性程度。σ 是一个取决于具体测量条件的常数，称 σ 为标准误差。

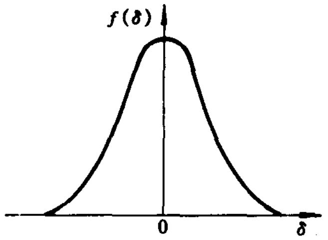

图 1-3-1

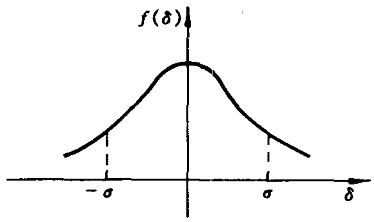

图 1-3-2

根据统计理论可以证明，概率密度分布函数为

$$f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

令此函数的二阶导数为零，便可解出 σ 正好是概率密度分布曲线拐点的横坐标值。还可以看出，当 $\delta=0$ 时，由式（1-3-2）得

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{1-3-3}$$

由式（1-3-3）也能说明，若标准误差 σ 很小，则必有 f（0）很大，曲线中间突起较大，因曲线与横轴所围面积为 1，所以曲线两侧下降较快，相应的绝对值小的随机误差出现较多，即测得值的离散性小，测量的可靠程度高，因此用 σ 值作为测量的标准误差。

经计算，均方误差 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta^2 f(\delta)=\sigma^2$。当测量次数 n 趋于无穷大时，再根据均方根误差定义

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum(x_i-A)^2}{n}} \tag{1-3-4}$$

可看出标准误差也称均方根误差。

通过计算，$\int_{-\sigma}^{\sigma}f(\delta)\mathrm{d}\delta=0.683=68.3\%$，即从 $\delta=-\sigma$ 到 $\delta=\sigma$ 之间曲线下的面积占总面积的 68.3%。这就是说，如果测量次数足够多，则在所测得的全部数据中，将有占测量总次数 68.3%的数据其误差落在区间 $\pm\sigma$ 内。或者说，在所测得的数据中，任一数据 x_i 的误差 δ_i 落在区间 $\pm\sigma$ 内的概率为 68.3%。当然在 $\pm\sigma$ 内包含真实值的概率也为 68.3%，这就提供了一个用概率来表达测量误差的方法。区间 $\pm\sigma$ 称为置信区间，在给定置信区间内包含真实值的概率（68.3%）称为置信概率。经计算，如扩大置信区间为 $\pm2\sigma$，则置信概率为 95.4%。在区间 $\pm3\sigma$ 内，置信概率为 99.7%。

三、算术平均值和标准偏差

在真实值已知的情况下，误差是一个明确的概念，可由定义式求得误差。在真实值未知的情况下，不能用定义式求得误差 δ，也不能由式（1-3-4）计算标准误差。由于随机误差的存在，对被测量进行 n 次等精度重复测量时，得到的将是一组大小略有起伏的一组数据 x_1、x_2、…、x_n，这时应当首先研究如何用这组数据估算真实值的最佳近似值。

1. 算术平均值

对一组测量数据 x_1、x_2、…、x_n，各次测量值的算术平均值为

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \tag{1-3-5}$$

可以证明，算术平均值是真实值的最佳近似值。

由误差定义可得

$$\delta_i=x_i-A$$

对此数组求和取平均，且假设测量次数 $n\to\infty$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\delta_i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum x_i}{n}-A$$

由随机误差的特点可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\delta_i}{n}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum x_i}{n}=A$$

由此式可见，当$n\to\infty$时，算术平均值无限接近真实值，所以我们有理由认为算术平均值是真实值的最佳近似值。

2. 标准偏差

真实值实际上是无法测得的，而且测量次数不可能无穷多，因此前面对误差的讨论只有理论上的意义。由于算术平均值是真实值的最佳近似值，实际中总是用算术平均值代替真实值，为了与误差加以区别，称

$$v_i = x_i - \overline{x}$$

为偏差，实际中也只能求得标准误差σ的最佳估计值。

对一组测量值x_1、x_2、…、x_n，各次测量值的误差为$\delta_i = x_i - A$，将这些误差求和取平均得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - A) = \overline{x} - A$$

或写成

$$\overline{x} = A + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

将$\overline{x}$代入上述偏差公式，得

$$v_i = x_i - A - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \delta_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

对上式平方求和得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}v_i^2 &= \sum\left[\delta_i^2 - 2\delta_i\cdot\frac{1}{n}\sum\delta_i + \left(\frac{1}{n}\sum\delta_i\right)^2\right]\\ &= \sum\delta_i^2 - 2\frac{1}{n}\left(\sum\delta_i\right)^2 + n\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum\delta_i\right)^2\right]\\ &= \sum\delta_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\delta_i\right)^2\end{aligned}$$

因为在测量中正负误差出现的概率接近相等，故$\left(\sum\delta_i\right)^2$展开后，交叉项$\delta_1\cdot\delta_2, \delta_1\cdot\delta_3\cdots\cdots$为正为负的数目接近相等，彼此相消，故得

$$\left(\sum\delta_i\right)^2 \approx \sum\delta_i^2$$

因而

$$\sum_{i=1}^{n}v_i^2 \approx \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$$

即

$$\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \approx \sqrt{\frac{\sum\delta_i^2}{n}}$$

等式右边若取$n\to\infty$时的极限，即是标准误差σ的定义式。因而等式左边的表达式可以认为是从一组数据中计算出来的标准误差的最佳估计值，称为标准偏差，记作σ_x，即

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{1-3-6}$$

一般来讲，利用标准偏差代替标准误差表示每一次测量值x_i的置信区间，只要测量次

数不太少，置信率也在 68.3%附近，这就是说标准偏差仍具有标准误差的含义。

3. 算术平均值的标准偏差

我们已经知道，标准偏差 σ_x 表示的是取得 $\bar{x}$ 的一组数据的离散性，如果我们在完全相同的条件下再重复测量一组数据，由于随机误差的影响，不一定能得到完全相同的 $\bar{x}$，这说明算术平均值本身也具有离散性，为了评定算术平均值的离散性，需引入算术平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$，可以证明

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-3-7}$$

算术平均值的标准偏差表示算术平均值的误差（即 $\bar{x}-A$）落在 $-\sigma_{\bar{x}}\sim+\sigma_{\bar{x}}$ 之间的概率为 68.3%，或者说在 $\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}$ 到 $\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$ 的范围内含真实值的概率为 68.3%。$\pm\sigma_{\bar{x}}$ 并不表示 $\bar{x}$ 的误差，$\bar{x}$ 的误差为多大并不知道，即使 $\sigma_{\bar{x}}$ 很大，误差也可能很小。

4. 测量次数很少时置信区间的确定

在测量次数不太少时，用 $\bar{x}$ 作为真实值 A 的最佳估计值，用标准偏差 σ_x 作为标准误差 σ 的最佳估计值。当测量次数很少时，由于测量到的误差会严重偏离正态分布，因而 $\bar{x}$ 和 σ_x 均会严重偏离 A 和 σ。如果仍用 σ_x 作为置信区间，置信率会远小于 68.3%。我们这里是保持 68.3%的置信率，而重新调整置信区间。

1908 年戈塞特根据误差理论提出，令 $t \equiv (\bar{x}-A)/\sigma_{\bar{x}}$，$t$ 作为一个统计量将遵从另一种分布，称作 t 分布，其函数式比较复杂，我们暂不去管它，但由 t 分布可提供一个系数因子，称作 t 因子，用这个 t 因子乘以 $\sigma_{\bar{x}}$ 作为置信区间，仍能保证在这个区间内有 68.3%的置信率。下面是几个常见的 t 因子数。

t 因子表（表中 n 表示测量次数）

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
$t_{0.683}$	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.04	1.03	1

从表中可见，t 因子随测量次数的增加而趋向于 1，即 t 分布当 $n\to\infty$ 时趋向正态分布。

第四节　大学物理实验中不确定度表示

我们已经明确，当报告物理量的测量结果时，必须给出结果质量的指标，以便使用它的人们能制定其可靠性。在误差理论中，是用系统误差和随机误差表示，但它并不科学，比如在已知的系统误差已全部考虑，适当的修正已作出，将测量结果表示成 $\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}$，将 $\sigma_{\bar{x}}$ 称做标准偏差，但 $\sigma_{\bar{x}}$ 表示的并不是误差的含义，而是测量结果不确定性程度的含义。在实际中还经常使用精度、精密度、准确度等术语来表示测量结果的质量，但它们的含义并没有一个统一的规范。所以在全球范围内，制定一个科学的、统一的测量结果质量的评定方法极其必要。

国际上众多权威组织提出了用不确定度表示测量结果的质量评定。为了和国际接轨，我国国家计量局和技术监督局明确规定使用不确定度表示测量结果的质量评定，像精密度、精确度、准确度等不再作为这一评定的术语。

测量不确定度表示是一个较复杂的理论问题，涉及到的细节较多，在我们物理实验中只是一种简化的表示。

一、直接测量不确定度的评定

测量不确定度简称不确定度，是测量结果带有的一个参数，用以评定测量结果的可靠性，它是被测量的真实值在某个量值范围内的一个评定，即测量结果写成 $x=x_0 \pm S$，S 称做不确定度，从 x_0-S 到 x_0+S 这个区间称置信区间，表达式的含义为被测量的真实值以一定的概率 P 落在 $x_0 \pm S$ 区间内，P 称为置信概率。

测量不确定度按评定方法分 A 类不确定度和 B 类不确定度，由观测数列用统计分析方法评定的不确定度称 A 类不确定度，由观测数列以外的其他信息用非统计分析方法评定的不确定度称 B 类不确定度。

1. A 类标准不确定度的评定

在等精度条件下对同一被测量多次测量，对所有已知或认识的误差分量已考虑，适当修正已作出，用算术平均值表示测量结果，由一组测量数列用统计分析方法计算算术平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$，结果表示为 $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$，其统计意义为被测量的真实值落在 $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$区间的概率是 68.3%。它的含义与不确定度的含义是一致的。因此求被测量的 A 类不确定度必须从计算 $\sigma_{\bar{x}}$入手，即用 $\sigma_{\bar{x}}$作为不确定度的 A 类评定，这样评定的不确定度称为 A 类标准不确定度，记作 S_A

$$S_A = \sigma_{\bar{x}} = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

测量结果写成

$$x = \bar{x} \pm S_A \tag{1-4-1}$$

其置信率 $P=0.683$。当测量次数很少时，仍要将 S_A 乘以一个 t 因子作为修正后的不确定度。

在我们的物理实验中，只评定 A 类标准不确定度。

2. B 类标准不确定度的评定

在测量过程中，必然涉及到所用材料的一般特性参数、制造说明书、检定证书、所用仪器所提供的检定数据以及取自手册的一些参数，这些都会造成测量结果的不确定性。当然在测量过程中，要将这些因素中已知的部分加以修正。这类不确定性不能用统计分析的方法加以评定，这称为 B 类评定，评定的依据就是上述内容提供的一些信息。应该强调的是这些信息造成的不确定性仍具有概率分布特性，所以 B 类不确定度仍估算标准偏差，只不过不能用统计分析的方法估算。如以下几种情形：

（1）不确定度给出为标准差的若干倍

例如，一标称值为 1000g 的标准砝码，检定证书给出信息："质量 $m_s=1000.000325\text{g}$，该值的不确定度按三倍标准差为 $240\mu\text{g}$"。显见，该值的 B 类标准不确定度 $S_B=240\mu\text{g}/3=80\mu\text{g}$。

(2) 不确定度给出较大的置信率区间

例如，标称值为10Ω的标准电阻，标准证书给出“在23℃时，$R_0=10.000742\Omega\pm129\mu\Omega$ ($P=0.99$)”。显见置信率为99%，则129μΩ不是标准不确定度，它是所谓的展伸不确定度，凡置信率不是0.683的不确定度统称展伸不确定度，它是由标准不确定度乘以一个称作包含因子的系数得到的。

包含因子与置信率的关系如下表：

$P\%$	50	68.3	90	95	99	99.7
K_P	0.6745	1	1.645	1.96	2.576	3

从表可知，129μΩ是由标准不确定度乘以2.576得到的，所以电阻R的B类标准不确定度为$S_B=129\mu\Omega/2.576=50\mu\Omega$。

(3) 信息给出的是仪器误差限

许多仪器给出的不是不确定度，而是误差限Δ(我们物理实验中遇到的大部分是这种情况)，则B类标准不确定度S_B为

$$S_B=\Delta/K \tag{1-4-2}$$

其中K是一个系数，视误差限Δ的概率分布而定，可以计算，若Δ为正态分布$K=3$，若为均匀分布$K=\sqrt{3}$，若为三角分布$K=\sqrt{6}$。通常级别较高的仪器Δ可视为正态分布，级别较低的仪器Δ可视为均匀分布。在我们物理实验中若不能确定Δ的分布，可视为是均匀分布。

3. 直接测量值不同性质不确定度的合成

一个测量结果，一般情况下总是存在不同性质的A类标准不确定度和B类标准不确定度，它们的评定方法虽然不同，但都具有概率特性，具有相同的置信率，所以把它们可以直接合成。

在大学物理实验中，我们采用方和根合成法，即

$$S=\pm\sqrt{S_A^2+S_B^2} \tag{1-4-3}$$

二、间接测量标准不确定度的传递公式

在很多情况下，被测量Y不能直接测得，而是由N个其它量X_1、X_2、…X_N决定，其函数关系为

$$Y=f(X_1、X_2、\cdots、X_N)$$

设各量X_1、X_2、…、X_N的测量值分别为x_1、x_2、…、x_N，被测量Y的测量值可表示为

$$y=f(x_1、x_2、\cdots、x_N)$$

各测量值x_1、x_2、…、x_N的不确定度$S(x_i)$必然造成y的不确定度$S(y)$。各x_i的不确定度$S(x_i)$可得自于A类评定或B类评定或二者皆有之，设为$S(x_1)_A$、$S(x_2)_A$、…、$S(x_N)_A$、$S(x_1)_B$、$S(x_2)_B$、…、$S(x_N)_B$，则在大学物理实验中y的不确定度可为

$$S(y)=\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}S(x_i)_A\right]^2+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}S(x_i)_B\right]^2\right\}^{1/2} \tag{1-4-4}$$

或

$$\frac{S(y)}{y}=\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\cdot S(x_i)_{\mathrm{A}}\right]^2+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\cdot S(x_i)_{\mathrm{B}}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{1-4-5}$$

三、关于不确定度表示的例题

例题 1 使用精度为 1′的分光计测量一块三棱镜的顶角 10 次，其结果列于下表，试表达测量结果。

n	x_i	$x_i-\bar{x}$ (分)	$(x_i-\bar{x})^2$	n	x_i	$x_i-\bar{x}$ (分)	$(x_i-\bar{x})^2$
1	60°27′	0	0	7	60°25′	−2	4
2	60°31′	4	16	8	60°20′	−7	49
3	60°24′	−3	9	9	60°24′	−3	9
4	60°28′	1	1	10	60°26′	−1	1
5	60°32′	5	25	$\bar{x}=60°27'$		$\sum(x_i-\bar{x})^2=150$	
6	60°33′	6	36				

解 算术平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=60°27'$$

算术平均值的 A 类标准不确定度为

$$S_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{150}{10\times(10-1)}}=1.3'$$

对精度为 1′的分光计可取仪器误差 $\Delta=1'$，所以 B 类不确定度为

$$S_{\mathrm{B}}=\Delta/\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.6$$

A 类不确定度和 B 类不确定度的合成

$$S=\sqrt{1.3^2+0.6^2}=1.42'\approx 2'$$

相对不确定度为

$$E=\frac{1.42'}{60°27'}=0.039\%$$

对三棱镜顶角 α 的测量结果表示为

$$\alpha=60°27'\pm 2' \qquad (P=68\%)$$
$$E=0.039\%$$

这个结果表示三棱镜顶角的真实值有 68%的把握落在 60°25′～60°29′范围内。

通过此题引起注意的是：用来计算标准不确定度的标准偏差是对标准误差的估计，所以结果一般只取一位有效数字就够了，对于尾数，为了保险采取“全入”的办法，高级测量可取两位有效数字。不确定度取一位，只适用于在最后结果表示中，中间运算过程还是应多取几位，以免造成太大的偏差。相对不确定度一般保留两位有效数字，这是为了当需要从相对不确定度确定位置区间时，不至于引起太大的偏差。

例题 2 一个钢球的体积可以通过测量钢球的直径 d 求得。钢球直径用 0～125mm、分度值为 0.02mm 的游标尺测量，结果表示为

$$d = 5.89 \pm 0.04\text{mm} \qquad (P = 68\%)$$

求钢球体积 V 及不确定度 S_V。

解 钢球体积为

$$V = \frac{\pi d^3}{6} = 3.142 \times (5.89)^3/6 = 107.0\text{mm}^3$$

体积 V 对直径 d 求偏导，得

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi d^2}{2}$$

体积的不确定度为

$$S_V = \frac{\pi d^2}{2} \cdot S_d = \frac{1}{2} \times 3.1 \times (5.9)^2 \times 0.04$$

$$= 2.2\text{mm}^3 \approx 3\text{mm}^3$$

从这个例子可注意到，在计算公式中，如果有像 π 这样的近似常数时，为了不使计算结果受 π 的截尾误差的影响，应取其有效数字比直接测量结果多一位。

例题 3 用流体静力法测固体密度的公式 $\rho = \frac{m}{m - m_1}\rho_0$，测得 $m = (27.06 \pm 0.02)$ g，$m_1 = (17.03 \pm 0.02)$ g，$\rho_0 = (0.9997 \pm 0.0003)$ g $\cdot$ cm^{-3}，都是以标准不确定度表示的置信区间，求密度 ρ 的实验结果表达式。

解 设 m、m_1、ρ_0 的不确定度分别为 $S(m)$、$S(m_1)$、$S(\rho_0)$，由此造成 ρ 的不确定度分别为 $S(\rho)_m$、$S(\rho)_{m_1}$、$S(\rho)_{\rho_0}$，则

$$S(\rho)_m = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m}{m - m_1}\rho_0\right) \cdot S(m)$$

$$= \frac{-m_1}{(m - m_1)^2} \cdot \rho_0 \cdot S(m) \approx -\frac{17}{27 - 17} \times 1 \times 0.02$$

$$= -3.4 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3$$

$$S(\rho)_{m_1} = \frac{\partial}{\partial m_1}\left(\frac{m}{m - m_1} \cdot \rho_0\right) \cdot S(m_1)$$

$$= \frac{m}{(m - m_1)^2} \cdot \rho_0 \cdot S(m_1) \approx \frac{27}{(27 - 17)^2} \times 1 \times 0.02$$

$$= 5.4 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3$$

$$S(\rho)_{\rho_0} = \frac{\partial}{\partial \rho_0}\left(\frac{m}{m - m_1}\rho_0\right) \cdot S(\rho_0)$$

$$= \frac{m}{m - m_1} \cdot S(\rho_0) \approx \frac{27}{27 - 17} \times 0.0003$$

$$= 3.1 \times 10^{-4}\text{g/cm}^3$$

$$S(\rho) = \sqrt{S(\rho)_m^2 + S(\rho)_{m_1}^2 + S(\rho)_{\rho_0}^2}$$

$$= 6.4 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3 \approx 7 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3$$

$$\rho = \frac{27.06}{27.06 - 17.03} \times 0.9997 = 2.697\text{g/cm}^3$$

密度 ρ 的测量结果表达式为

$$\rho = (2.697 \pm 0.007)\mathrm{g/cm^3}$$

例题 4 已知一圆柱体的半径 R 约为 10mm，高 H 约为 50mm，要求按公式 $V=\pi R^2 H$ 求得体积的相对不确定度不大于 1%，问 R 和 H 应使用什么测量仪器进行测量最合适？

解 这是一个间接测量问题，并对测量结果的质量事先有要求，这时可根据不确定度传递公式，来分配直接测量值的不确定度，从而选择合适的测量仪器。

由 $V=\pi R^2 H$，按不确定度传递公式有

$$E = \frac{S(V)}{V} = \sqrt{\left(2\frac{S(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{S(H)}{H}\right)^2} \leqslant 1\%$$

即 V 的不确定度是由 R 和 H 的不确定度合成的，通常先按不确定度等作用原则，令参与合成的各项皆有相同的贡献，即 $\left(2\frac{S(R)}{R}\right)^2=\left(\frac{S(H)}{H}\right)^2$，于是可得

$$\sqrt{2\left(2\frac{S(R)}{R}\right)^2} \leqslant 1\%$$

$$\sqrt{2\left(\frac{S(H)}{H}\right)^2} \leqslant 1\%$$

解得

$$\frac{S(R)}{R} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 1\% = 0.36\%$$

$$\frac{S(H)}{H} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1\% = 0.71\%$$

可求得

$$S(R) = 10 \times 0.0036 = 0.036\mathrm{mm}$$

$$S(H) = 50 \times 0.0071 = 0.36\mathrm{mm}$$

由量具说明书查得，0.1mm 分度的游标尺的误差限为 0.15mm，故可用来测高度 H。0～25mm的千分尺的误差限为 0.004mm，可用来测半径 R。

关于不确定度分配的等作用原则并不是固定不变的，实际中可以根据需要加以调整。

第五节 有效数字

实验的数据记录、数据运算以及实验结果的表达，都应遵从有效数字的规则。

一、有效数字的基本概念

所有测量结果都是真实值的近似值，但对同一物理量采用不同的方法测量，结果的近似程度会各有不同，这种不同除用不确定度反映外，还能反映在表示测量结果的数字的位数上。例如约 2.5cm 的长度，用最小分度为厘米的刻度尺测量，测量结果为 2.4cm，如图 1-5-1（a）所示。若用最小分度为毫米的刻度尺测量，测量结果为 2.45cm，如图 1-5-1（b）所示。若用更精密的仪器测量，测量结果会更精确，表示测量结果的数的位数就会更多。这说明表示测量结果的数的位数应能反映测量精度，一定的测量不确定度，必须用一定位数的数字来表示。

若数据来自仪器读数，一般情况下，不仅要读出整分度值的刻度数，而且要尽量估读出最小分度值的下一读数，如前面的 2.45cm。不同人或不同次，可能读出 2.44cm、2.43cm、2.46cm 等。前两位 2.4cm 是从刻度尺整分度读取的，因此是确切数字，而第三位是测量者估读的，这一位是有疑问的，称为存疑数字。把包括一位（且只能一位）存疑数字在内的所有从仪器上直接读出的数字称为有效数字。根据这个原则，实验记录的原始数据的最后一位都应该是估读的。若用最小刻度是毫米的刻度尺测量长度，始端与尺 0 点对齐，而末端正好与 4cm 的刻度对齐，则测量结果必须写成 4.00cm，写成 4cm、40mm 都不对。

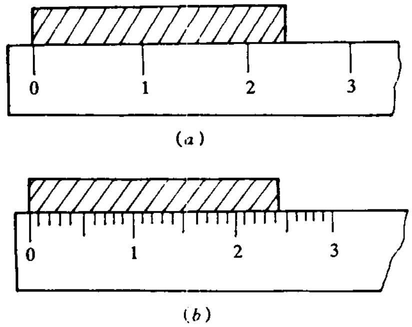

图 1-5-1

所谓存疑数字就是有误差的一位数字，所以有效数字的一般定义应为：包括一位有误差的数字和所有确切数字都是有效数字。所有实验工作者都必须遵从有效数字的规则来记录和表达测量数据，即使在没有写出不确定度项时，别人也会知道数据的最后一位是不确定的。在明确写出置信区间的测量结果中，要使结果的最后一位与不确定度的值对齐，多余的尾数应按舍入规则截取。

二、数字结尾的舍入规则

1. 不确定度的舍入规则

不确定度一般只保留一位有效数字。为了保险，多采用全入的办法。对相对不确定度，通常保留两位有效数字，结尾部分按下面一般数据的舍入规则进行舍入。

2. 一般数据的舍入规则

熟知的“四舍五入”规则是见五就入，这样会使从 1 到 9 的九个数中，入的机会总是大于舍的机会，因而是不合理的。现在通用的规则是：对保留数字末位以后的部分，小于五则舍；大于五则入；等于五时，若保留位为奇数时则加 1，为偶数时则不变，即把保留的末位数凑为偶数。例如，将下列数值保留为三位有效数字：

$$3.5425 \longrightarrow 3.54$$
$$3.5451 \longrightarrow 3.55$$
$$3.5350 \longrightarrow 3.54$$
$$3.5450 \longrightarrow 3.54$$

三、使用有效数字规则时应注意的问题

(1) 单位换算时，十进制单位换算有效数字与单位无关。例如 80.20g 是四位有效数字。若用千克单位表示则为 0.08020kg，仍为四位有效数字，因为表示小数点位置的“0”不算有效数字。若用毫克单位表示写成 80200mg，则就有问题了，因为按有效数字规定，最后一位是有误差的数，原来数据 80.20g 有误差的数是在 $\frac{1}{100}$g 位上，当写成 80200mg 时有误差的数是在 $\frac{1}{1000}$g 位上，则数据的准确性变了。为了解决这个矛盾，应使用所谓科学记数法，即把数据写成小数点只有一位，再乘以 10 的幂次来表示。如上述质量数据可写成 8.020×10^{4}mg 或 8.020×10^{-2}kg，它们都是四位有效数字，说明在十进制单位换算时，不应改变有