

点击悟性火花
同步现行教材

唤醒无穷智慧
着眼素质能力

初三数学

课堂新思维

点击悟性…… 希扬 主编

点

恍然大悟即彻头彻尾的理解……
有悟性的头脑远比聪明的脑袋更重要

悟

首都师范大学出版社

课堂新思维点悟

初三数学

主编 刘富森

作者 刘富森 春 娥

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

课堂新思维点悟·初三年级/希扬编. —北京:首都师范大学出版社,2001.7
ISBN 7-81064-269-3

I. 课… II. 希… III. 课程-初中-习题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 26041 号

《课堂新思维点悟》编委会

丛书主编 希扬

丛书副主编 屠新民 张敦生

编委 卢浩然 张锐 孙红蓓 蔡泽敏 杨冬莲

KETANGXINSIWEIDIANYU·CHUSANSHUXUE

课堂新思维点悟·初三数学

主编 希扬

首都师范大学出版社出版发行

北京市西三环北路 105 号

邮政编码 100037

电传 68907725(总编室)

68418514(发行部)

68903162(出版部)

Email: gmp@mail. cn. edu. cn

北京昌平兴华印刷厂印刷

全国新华书店经销

版次 2001 年 7 月 1 版

印次 2001 年 8 月 2 次印刷

开本 880 × 1230 1/32

字数 538 千 印张 13.625

印数 46,001 - 54,000 册

定价 17.40 元

书号 ISBN 7-81064-269-3/G·168

版权所有 违者必究

如有质量问题 请到出版社退换

ketangxinsiwaidianwu

ketangxinsiwaidianwu ketangxinsiwaidianwu

ketangxinsiwaidianwu

点燃悟性火花 唤醒无穷智慧

——《课堂新思维点悟》

序 言

新世纪，新奉献。这套《课堂新思维点悟》，是我们奉献给初一至高二中学生的一套与教学同步的素质教育丛书。

何谓“点悟”？认识论告诉我们，人们的认识是一个由已知到未知的发展过程。人的认识，只有沟通新旧知识之间的联系，引发知识的碰撞，才能产生新知。这个新旧知识之间的联系点，或引发知识碰撞的爆发点，就是认识的悟点，即悟性。我们通常所说的悟性，是指觉悟、领悟、领会和理解力。

在教学中运用点悟，就是沟通新旧知识之间的联系，使认识由此及彼、由表及里、由浅入深；就是强调学习中分析、判断、联系、发展的综合认识，培养综合运用能力；就是使知识升华，使思维与灵魂对话。点悟，可使学生“恍然大悟”、“豁然开朗”，达到大彻大悟的境界。这样就可收到举一反三、融会贯通、学以致用之效。“纸上得来终觉浅，心中悟出方知深”，学习方法万千条，只有悟出才是根本。

ketangxinsiwaidianwu

ketangxinsiwaidianwu

ketangxinsiwaidianwu

ketangxinsiwaidianwu

目前，我们提出的素质教育，对教学提出了更高的要求，如何通过课堂教学，培养和造就无数有慧心、有灵气、会学习、会沟通、能创新的人才，是亟待解决的重大课题。我们认为，把点悟引入课堂教学，是通过课堂教学实践素质教育的最佳途径。这是一种创新，是一个尝试。我们深信，它将取得意想不到的理想效果。

本书特点是：

一、栏目新、实用性强

它紧贴教材，栏目设计新颖实用。除一般的栏目外，根据各科特点分别设有“知识要点点悟”、“状元名题赏析”、“默读·联想·记忆”和“在悟中升华”等栏目。它信息新、信息量大，符合学生实际需要。

二、导学导练

它难度适中并有跨度，适合不同程度学生的需要；它讲解翔实透彻，又把学与练结合起来，把练与升学考试结合起来，用平时的练瞄准升学考试，又用升学考试指导平时的练习。

三、以点悟贯穿全书

它重在点击悟性、打开思路、启迪智慧、授之以法。让学生学会学习、学会思考、学会沟通、学会运用，实实在在地提高学生素质，培养他们的创新能力。

今日放飞希望，明日收获精彩。

我们放飞的是一个希望，希望此书能给中学生读者插上智慧的双翅，在知识的王国里翱翔，成为新世纪的有用之才。我们是探索者，难免有这样那样的缺点、错误，欢迎批评指正。我们希望在读者和有识之士的帮助下，来日共同回收精彩。

“点悟”将改变你的学习，你的学习将因此而精彩！

希扬

2001.6

前 言

2001 年全国在初中阶段普遍使用了《九年义务教育三年制初级中学教科书(数学)》新教材,为了帮助初中学生学好新教材,我们从指导学生掌握学习数学的方法,培养读者创新能力,独立解决数学问题的能力入手,编撰了这套与新教材同步的辅导用书。本书应用了全新的学习理念,在每节中设置了学习基本目标、考纲重点要求,知识要点悟等栏目,分初、中、高三个层次介绍了知识点、考点和对考点的理解方法,每节还设置有中考模型题例、中考误区警示、状元名题赏析三个专栏,分类介绍中考所考题型的解题方法、技巧和解题思想方法,也点明了本节内容在中考中易出现错误的问题,以警示读者不再重蹈覆辙。同时,给出了本节的重点题型(即中考“热点”题型),加以分析点评,指导读者成为中考“状元”。每节后还有“默读·联想·记忆”,画龙点睛地给出全节的总结,并给出“在悟中升华”训练题一套,使读者能通过练习达到巩固所学知识的目的。

由以上叙述不难看出,本丛书的内容与教材贴近,但稍高于教材,旨在指导读者明确所学知识的要点,掌握审题、解题、答题规范,总结所学知识,避免产生答题错误。使读者的学习能力有较大升华,成为学生中的“拔尖”人物。

本丛书每章前给出“教材导学”,点明了中考考点和全章的知识网络,使读者掌握全章知识的脉络。

更为重要的是作者在写作中,对大量例题进行了点评,从点拨学习、解题、深化、理解的角度,启迪读者的“悟性”,使读者的思维能力更上一层楼。

本书的另一亮点是，在写作中将中考的“热点”题型，即数学建模、数学阅读题、探索性问题突出编写，形成本丛书的一个新的特点。

我们此次推出《课堂新思维点悟》丛书，其主旨是帮您考上如愿的中华名校。

作者

2001年6月

代数部分

第十二章 一元二次方程	(1)
12.1 一元二次方程	(2)
12.2 一元二次方程的解法	(7)
12.3 一元二次方程的根的判别式	(20)
12.4 一元二次方程的根与系数的关系	(33)
12.5 二次三项式的因式分解	(46)
12.6 一元二次方程的应用	(57)
12.7 分式方程	(65)
12.8 无理方程	(75)
12.9 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组	(83)
12.10 由一个二元二次方程和一个可分解为两个二元一次方程 的方程组成的方程组	(91)
综合能力测试	(98)
第十三章 函数及其图象	(101)
13.1 平面直角坐标系	(104)
13.2 函数	(112)
13.3 函数的图象	(121)
13.4 一次函数	(128)
13.5 一次函数的图象和性质	(133)
13.6 二次函数 $y = ax^2$ 的图象	(144)
13.7 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象	(151)
13.8 反比例函数及图象	(165)
综合能力测试一	(176)
综合能力测试二	(179)
第十四章 统计初步	(184)
14.1 平均数	(184)
14.2 众数与中位数	(191)
14.3 方差	(195)
14.4 频率分布	(202)
综合能力测试一	(207)

综合能力测试二	(209)
---------	-------

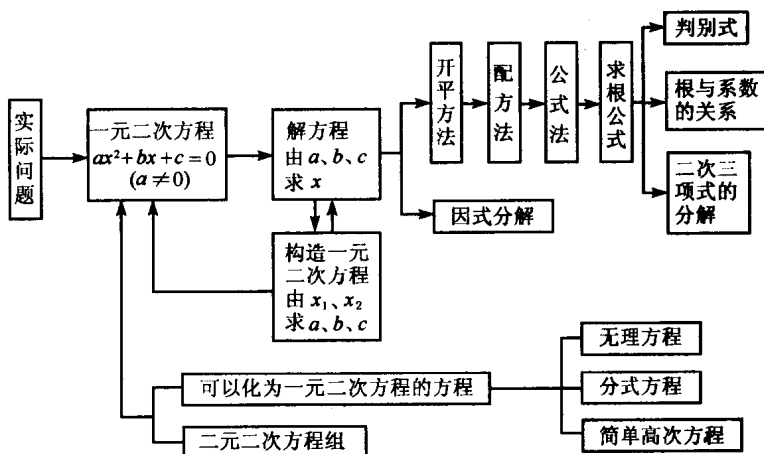
几何部分

第六章 解直角三角形	(213)
6.1 正弦与余弦	(214)
6.2 正切与余切	(220)
6.3 解直角三角形	(227)
6.4 解直角三角形的应用	(235)
综合能力测试一	(243)
综合能力测试二	(247)
第七章 圆	(250)
7.1 圆	(251)
7.2 过三点的圆	(258)
7.3 垂直于弦的直径	(262)
7.4 圆心角、弧、弦、弦心角间的关系	(268)
7.5 圆周角	(273)
7.6 圆内接四边形	(279)
7.7 直线与圆的位置关系	(286)
7.8 切线的判定和性质	(291)
7.9 三角形的内切圆	(297)
7.10 切线长定理	(303)
7.11 弦切角	(310)
7.12 和圆有关的比例线段	(316)
7.13 圆和圆的位置关系	(324)
7.14 两圆的公切线	(331)
7.15 相切在作图中的应用	(338)
7.16 正多边形和圆	(340)
7.17 正多边形有关计算	(343)
7.18 画正多边形	(346)
7.19 圆周长、弧长	(348)
7.20 圆、扇形、弓形的面积	(350)
7.21 圆柱和圆锥的侧面展开图	(354)
综合能力测试	(357)
模拟试卷一	(360)
模拟试卷二	(363)
参考答案	(366)

代数部分

第十二章 一元二次方程

知识结构



内容导学

本章内容包括一元二次方程及其解法，一元二次方程根的判别式及根与系数的关系，用一元二次方程解应用题，可化为一元二次方程的分式方程和无理方程的解法，简单的二元二次方程组的解法等，以及由这些内容所反映出来的数学思想方法。

本章的重点是：(1) 一元二次方程的概念与解法；(2) 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程的解法；(3) 列方程解应用题。

本章的难点是：(1) 用配方法解一元二次方程；(2) 列方程解应用题；(3) 分式方程和无理方程的增根及验根问题。

一元二次方程是中学数学的主要内容，在初中代数中占有重要的地位，本章知识的学习，在整个代数知识的学习中起着承上启下的作用，它既是对已学过的知识，诸如实数、整式、分式、根式、一元一次方程的巩固和加深，又是为

今后学习指数、对数、三角函数及三角方程、不等式、函数等内容奠定基础。所以，在学习本章时，要求熟练掌握解一元二次方程的开方法、配方法、求根公式法及因式分解法等四种基本方法，还要熟练掌握二次方程根的判别式及根与系数的关系，应用一元二次方程解决一些实际问题，掌握用求根公式分解二次三项式，还要掌握解分式方程和无理方程并了解其增根产生的原因，会对其中的增根进行检验，对于二元二次方程组要熟练掌握加减消元法、代入消元法、因式分解法、换元法等几种解法。

12.1 一元二次方程

【学习基本目标】

1. 理解整式方程和一元二次方程的概念；
2. 知道一元二次方程的一般表达式，会把一元二次方程化成一般形式。

【考纲重点要求】

1. 准确判定一个方程是不是一元二次方程；
2. 熟练地将一元二次方程化为一般形式，并准确写出表达式的二次项系数、一次项系数及常数项；
3. 熟练掌握一元二次方程的求解及其应用。

【知识要点点悟】

首先是关于整式方程的概念，即方程两边都是关于未知数的整式，要注意这里所说的整式是关于未知数的整式，有些含字母系数的方程，尽管分母中含有字母，但只要分母中不含未知数，这样的方程仍是整式方程。在此基础上引入了一元二次方程的概念，即只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程。关于 x 的一元二次方程的标准式为： $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，其中 ax^2 叫做二次项， a 叫做二次项系数； bx 叫做一次项， b 叫做一次项系数； c 叫做常数项。一次项系数 b 和常数项 c 可以取任何实数，二次项系数 a 是不等于零的实数，显然，在任何一个一元二次方程中，二次项是必不可少的项，这里隐含了 $a \neq 0$ 的条件。

任何一个一元二次方程，经过整理都可以化成标准形式。

缺少一次项或常数项的一元二次方程称为不完全的一元二次方程。如 $ax^2 + c = 0 (a \neq 0, b = 0, c \neq 0)$ 。缺一次项； $ax^2 + bx = 0 (a \neq 0, b \neq 0, c = 0)$ 缺常数项； $ax^2 = 0 (a \neq 0, b = c = 0)$ 缺一次项和常数项等。要认定一个整式方程是否为一元二次方程，一般要化成 $ax^2 + bx + c = 0$ 的形式后再判断，若 $a \neq 0$ ，它是一元二次方程，否则，不是。如 $x^2 + 3x = x^2 - 1$ ，移项合并，得 $3x + 1 = 0$ ，它就不是一元二次方程。

本节的重点是一元二次方程的概念及化任意的一元二次方程为标准式，难

点是对一元二次方程的标准式的正确理解及各项系数的确定.

【中考模型题例】

例 1 下列方程是关于 x 的一元二次方程的是 ()

考查一元二次方程的概念

(A) $ax^2 + bx + c = 0$

(B) $k^2x + 5k + 6 = 0$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 - \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

(D) $(m^2 + 3)x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$

分析与解: 首先, 关于 x 的方程是指方程中只有 x 是未知数, 其它字母都是字母系数, 应视为已知数. 然后, 根据一元二次方程的定义或一元二次方程的标准式判断哪个选择是关于 x 的一元二次方程. 对于(A), 若 $a=0$ 时, 它不是一元二次方程, 应排除; 对于(B), 未知数 x 的最高次数为 1, 本身就不是一元二次方程, 将(B) 排除掉; 对于(C), 未知数 x 的最高次数为 3, (C) 也应排除. 对于(D), 它符合一元二次方程的标准式, 且二次项系数 $m^2 + 3$ 不等于 0, 所以(D) 是一元二次方程.

故选(D).

评注: 欲判断一个方程是否为一元二次方程, 可以根据定义也可以根据一元二次方程的标准式判断. 若经过恒等变形后, 一个方程是整式方程, 并且只含有一个未知数, 未知数的最高次数是 2, 或经过恒等变形能化成一元二次方程的标准式, 那么它就是一元二次方程, 否则就不是一元二次方程.

例 2 若方程 $(m-1)x^{|m|+1} - 2x = 3$ 是关于 x 的一元二次方程, 则 $m =$ _____.

分析与解: 欲使已知方程为关于 x 的一元二次方程, 需满足

$$\begin{cases} |m| + 1 = 2, \\ m - 1 \neq 0. \end{cases}$$

注意一元二次方程的概念

解之, 得 $m = -1$.

故应填 $m = -1$.

评注: 本题的关键是正确理解一元二次方程的概念, 即一个方程要是一元二次方程, 那么二次项系数就不能为零.

例 3 对于方程 $(m-1)x^2 + (m+1)x + 3m + 2 = 0$, 当 $m =$ _____ 时, 为一元一次方程; 当 $m =$ _____ 时, 为一元二次方程.

分析与解: 已知方程的二次项系数为 $m-1$, 一次项系数为 $m+1$. 若方程为一元一次方程, 需满足 $m-1=0$ 且 $m+1 \neq 0$, 即 $m=1$; 若方程为一元二次方程, 需满足 $m-1 \neq 0$, 即 $m \neq 1$. 故应填 $m=1$ 和 $m \neq 1$.

例 4 把 $(ax+b)(cx+d) = m (ac \neq 0)$ 化成一元二次方程的标准式, 指

出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

二次项与二次项的系数、一次项与一次项的系数是不同的

分析: 对已知方程进行恒等变形.

解 去括号, 得 $acx^2 + adx + bcx + bd = m$.

移项, 整理得 $acx^2 + (bc + ad)x + (bd - m) = 0$.

二次项系数为 ac ; 一次项系数为 $bc + ad$; 常数项为 $bd - m$.

评注: 要特别注意的是方程中各项的系数包括常数项, 都应含它前面的符号.

例 5 判断关于 x 的方程 $x^2 - mx(2x - m + 1) = x$ 是不是一元二次方程. 若是, 指出其二次项系数, 一次项系数和常数项.

分析: 先把方程化为标准式, 再进行判断.

解 去括号, 得 $x^2 - 2mx^2 + m^2x - mx = x$.

移项, 整理得 $(1 - 2m)x^2 + (m^2 - m - 1)x = 0$.

当 $1 - 2m = 0$, 即 $m = \frac{1}{2}$ 时, 原方程为 $-\frac{5}{4}x = 0$, 这时, 它不是一元二次方程;

当 $1 - 2m \neq 0$, 即 $m \neq \frac{1}{2}$ 时, 原方程是一元二次方程, 其二次项系数为 $1 - 2m$, 一次项系数为 $m^2 - m - 1$, 常数项为 0 .

评注: 由于本题是关于 x 的方程, 但不一定是关于 x 的一元二次方程, 所以在上述解答中对 $1 - 2m$ 是否为 0 应加以讨论.

例 6 下列方程中无论 a 为何值, 总是关于 x 的一元二次方程的是

()

二次项系数不为 0

(A) $(2x - 1)(x^2 + 3) = 2x^2 - 2$ (B) $ax^2 + 2x + 4 = 0$

(C) $ax^2 + x = x^2 - 1$ (D) $(a^2 + 1)x^2 = 0$

分析: 利用一元二次方程的概念直接判断.

解 (A) 是关于 x 的一元三次方程, (B) 中当 $a = 0$ 时是关于 x 的一次方程, (C) 当 $a = 1$ 时变为 x 的一次方程, 所以(A)、(B)、(C) 都应排除掉. 对于(D), 因为 $a^2 + 1$ 对于任何 a 值都不等于 0 , 虽然它没有一次项和常数项, 但它仍为 x 的一元二次方程, 所以应选(D).

评注: 上述求解中采用了分析求解法, 关键是正确理解一元二次方程的概念, 即一元二次方程的最高次项的次数为 2 , 其系数不为零.

【中考误区警示】

题目 指出方程 $3x^2 = 2x + 1$ 的二次项系数、一次项系数和常数项。

化为一元二次方程的标准式

分析与解：把方程化为标准形式 $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ，于是该方程是关于 x 的一元二次方程，其二次项系数为 3，一次项系数为 -2，常数项为 -1。

评注：求一元二次方程的各项系数和常数项，必须先把方程化为标准式，因为一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项都是在方程为标准式的前提下定义的。对于本题，不能将一次项系数和常数项写成 2 和 1。

【状元名题赏析】

题 1 一元二次方程 $2x^2 + 4x - 1 = 0$ 的二次项系数、一次项系数及常数项之和为_____。

分析与解：该一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项分别为 2、4 和 -1，所以它们的和为 5，故填 5。

评注：根据一元二次方程的标准式先确定各项的系数及常数项，然后相加即得所求，要注意常数项包括符号，即为 -1。

题 2 若 $px^2 - 3x + p^2 - p = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 ()

一元二次方程的概念

- (A) p 为任意实数
- (B) $p = 0$
- (C) $p \neq 0$
- (D) $p = 0$ 或 1

分析与解：显然方程 $px^2 - 3x + p^2 - p = 0$ 是关于 x 的整式方程，且方程中含有一个未知数 x ，若想让它满足一元二次方程的定义，需使未知数的最高次数为 2 的系数 $p \neq 0$ ，故应选(C)。

【默读·联想·记忆】

1. 正确理解一元二次方程的概念，并能把它化成一元二次方程的标准形式；
2. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 中的系数 b 、 c 可以是任意实数，而 a 必须是不等于 0 的实数；
3. 求一元二次方程各项系数 a 、 b 、 c 时，要先将方程化为标准形式。

【在悟中升华】

1. 判断下列方程是否为关于 x 的一元二次方程。

- (1) $3x^2 = 5$. ()
- (2) $x^2 + 2x - 3y = 0$. ()

Baitang

精英在挑战

Guangjian

(3) $ax - 7 = a^2x$ (a 为实数). ()

(4) $\sqrt{7}x^2 - 5 = 3x$. ()

(5) $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{3} = 0$. ()

(6) $(a-5)x^2 + 3x + \sqrt{5} = 0$ ($a \neq 5$). ()

2. 选择题

(7) 下列方程中是一元二次方程的为 ()

(A) $3x^2 + \frac{1}{x} = 1$ (B) $x^2 + 5x = 2y$

(C) $\sqrt{x^2 + 3} = 2x$ (D) $\frac{x^2 + 1}{3} = \frac{2x}{3}$

(8) 方程 $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + (1 + 2x)^2 = x - 2$ 的常数项是 ()

(A) 0 (B) -3 (C) 3 (D) 5

(9) 关于 x 的方程 $m^2x^3 + mx^2 = m^2x^3 + nx^2 + px + q$ ($m \neq n$), 经过化简整理, 化成 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的一般形式, 其中 a 、 b 、 c 分别是 ()

(A) $a = m - n, b = p, c = q$ (B) $a = m - n, b = -p, c = q$

(C) $a = m - n, b = -p, c = -q$ (D) $a = m - n, b = p, c = -q$

(10) 下面关于 x 的方程中, 一元二次方程的个数是 ()

① $x^2 + b - 3 = 0$; ② $(x - 2)(x + 2) = x^2 + 4x - 1$;

③ $x^2 - 2a^2x - a^3 = 0$; ④ $x^2 + \frac{3}{x} - 5 = 0$.

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

3. 填空题(11) 把方程 $(2\sqrt{3} - x)(2\sqrt{3} + x) = (3 - x)^2$ 化成一般形式, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.(12) $(a-1)x^2 + (a+1)x + 3a + 2 = 0$, 当 a _____ 时为一元二次方程, a _____ 时为一元一次方程.(13) 将方程 $3x^2 = 5x + 2$ 化为一元二次方程的一般形式为 _____.(14) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + ax + a = 0$, 它的二次项系数、一次项系数和常数项之和为 _____.(15) 若方程 $kx^2 + x = 3x^2 + 1$ 是一元二次方程, 则 k 的取值范围是 _____.(16) 一元二次方程 $mx^2 - 5x + 2 = x^2 - m$ ($m \neq 1$) 的一般形式是 _____, 它的二次项系数是 _____, 一次项系数是 _____, 常数项是 _____.**4. 解答题**(17) 把方程 $(ax + b)(cx - d) = k$ ($ac \neq 0$) 化成一元二次方程的一般形式, 并依次写出它的二次项系数, 一次项系数及常数项.(18) a 为何值时, 方程 $ax^2 + bx = 5x^2 - 4$ 是关于 x 的一元二次方程?

(19) k 为何值时, 关于 x 的方程 $(k^2-1)x^2+(k+1)x-2=0$ 是:

①一元二次方程; ②一元一次方程?

(20) 方程 $(a^2-b^2)x^2-4abx=a^2-b^2$, 何时为一元二次方程; 何时为一元一次方程?

12.2 一元二次方程的解法

【学习基本目标】

1. 初步掌握用直接开平方法解一元二次方程, 即用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b(b \geq 0)$ 的方程;
2. 掌握用配方法解一元二次方程, 会用配方法解数字系数的一元二次方程;
3. 掌握一元二次方程的求根公式的推导过程, 能够熟练运用求根公式解一元二次方程;
4. 能够运用因式分解法解某些一元二次方程.

【考纲重点要求】

熟练掌握用直接开平方法、配方法、求根公式法、因式分解法解一元二次方程, 能灵活运用一元二次方程的四种基本解法求方程的解, 对于一元二次方程的求根公式, 要深入领会其推导的思想, 并会推导一元二次方程的求根公式. 本节的重点是公式法和因式分解法, 难点是配方法和求根公式的推导.

【知识要点点拨】

本节介绍了一元二次方程的四种解法:

1. 直接开平方法

用直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法. 用直接开平方法解一元二次方程的理论根据是平方根的定义, 如果一个一元二次方程, 左边是一个含有未知数的完全平方, 而右边是一个非负数, 就可以用直接开平方法来解, 即形如 $(ax+b)^2=c^2$ 的一元二次方程用直接开平方法来解, 其解为 $x = \frac{\pm c - b}{a}$. 如 $(x-1)^2=4$, 开平方得 $x-1 = \pm 2$, 从而 $x_1=3, x_2=-1$.

2. 配方法

将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 配方的一般步骤是:

- (1) 方程两边同除以二次项系数, 得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$;
- (2) 把常数项 $\frac{c}{a}$ 改变符号后移到等式右边, 并在方程两边各加上一项系数一半的平方, 得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$;
- (3) 左边因式分解, 右边化简, 得

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

(4) 当方程右边是非负数时, 用直接开平方法求出方程的根.

3. 公式法

将一元二次方程化成一般形式 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 把各项系数 a 、 b 、 c 的值代入求根公式:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

就可以求得方程的根, 这种解一元二次方程的方法叫做公式法.

4. 因式分解法

对一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 左边若能因式分解, 变成 $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$ 的形式, 根据若几个因式之积为 0, 至少有一个因式为 0, 可得 $a_1x + b_1 = 0$ 或 $a_2x + b_2 = 0$, 从而得 $x_1 = -\frac{b_1}{a_1}$, $x_2 = -\frac{b_2}{a_2}$, x_1 、 x_2 就是原方程的两个根. 这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法.

在解一元二次方程时, 究竟用上述哪一种方法, 要根据具体而选择. 就这四种方法而言, 公式法是一般方程, 只要明确了二次项系数、一次项系数和常数项, 若方程有实根, 就一定可以用求根公式求出根, 但是因为要代入 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 求值, 所以对某些特殊方程, 解法就显得复杂了. 直接开平方法、因式分解法是解一元二次方程的特殊方法, 它在解答符合某些特点的方程时很方便, 但也有失效的时候, 在用特殊方法难以求解时, 就要及时利用公式法求解. 配方法是解一元二次方程的一种非常重要的方法, 特别是利用配方法推导出了求根公式, 其数学思想方法要认真领会掌握.

【中考模型题例】

例 1 选用适当方法解下列方程:

(1) $4(x-1)^2 = 225$;

(2) $(a^2 - b^2)x^2 - 4abx + b^2 - a^2 = 0 (|a| \neq |b|)$;

(3) $(3x+4)^2 - (2x-5)^2 = 0$;

(4) $x^2 - 2x = 224$.

分析: 观察各方程的特点, 正确选择相应的解法. (1) 用直接开平方法比较简捷; (2) 应选用公式法; (3) 应考虑因式分解法; (4) 用配方法比较方便.

解 (1) 开平方, 得

$$2(x-1) = \pm 15, \text{ 即}$$

$$2x-2 = \pm 15.$$

开平方法