与二阶微分方程相联系的本征函数展开

（第 一 册）

〔英〕E.C.梯其玛希著 芝萌译 夏道行校

与二阶微分方程相联系的本征函数展开

第一册

〔英〕E. C. 梯其瑪希 著
芝 萌 譯
夏 道 行 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书闡述奇异情况下按本征函数展开的普遍理論，現在是第一部分，研究的是二阶常微分方程的情形，第二部分处理偏微分方程的情形.

作者在本书中采用了柯西圍道积分和留数理論的經典方法，因而避免了积分方程和綫性算子的一般理論的应用，其方法和結果具有深刻的意义.

本书根据 1946 年的英文原本翻譯，譯成后又根据原文最新版作了校訂. 原书的俄文譯本于 1960 年出版，其中附加了一些注解，添补了有关近代結果的五篇附录及文献，現在一并譯出.

本书可供高等学校数学系、物理系高年級学生，研究生閱讀，也可供数学、物理研究工作者参考.

EIGENFUNCTION EXPANSIONS
ASSOCIATED WITH SECOND-ORDER
DIFFERENTIAL EQUATIONS
PART I
E. C. Titchmarsh
Oxford Univ. Press.

与二阶微分方程相联系的本征函数展开

第 一 册

芝 萌 譯 夏道行 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海新华印刷厂印刷　　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 9 4/32　排版字数 226,000
1964 年 5 月第 1 版　1964 年 5 月第 1 次印刷　印数 1—3,000

統一书号 13119·553　定价（十四）1.55 元

作者序

将任意函数按二阶微分方程的解来展开的想法，从一百多年前的所謂 Sturm 和 Liouville 时期就已經开始萌芽了．在二十世紀初，許多作者初步作出了这种展开的正确性的滿意証明．后来，Weyl 以积分方程的理論为基础，建立了奇异情形的一般理論．基于 Hilbert 空間內綫性算子普遍理論的一个方法，可以在 Stone 关于这个課題的工作中找到．

在本书中，我采用了另外的一个方法．Cauchy 早就根据圍道积分和留数理論証明了类似的展开式，往后，这个方法被許多作者在 Sturm-Liouville 的正則情况下加以运用过．这里，将它应用到普遍的奇异情况中去了．因此，这个方法使我們可以避免涉及积分方程理論和綫性算子的普遍理論，虽然，有时候我們所做的工作只不过是綫性算子普遍理論在所考虑的特殊情况下的变形而已．

現在，按 Sturm-Liouville 正則問題的本征函数的展开，已是众所周知的了．因此，我将尽快地把这个問題叙述过去，而把注意力集中到奇异情况上面，这种情况包括了所有最有意义的例子．为了在适当的篇幅內把理論叙述得清楚起見，我决意放弃所有可能的推广．所作的許多証明，完全可以十分方便地推广到另外的情形，如象二元一阶联立方程的情形中去．

看来，物理学家对书中所考虑的問題的某些情况会感到兴趣．如果物理学家能在这里找到一些他們所想要知道的东西，那我自然是很高兴的．但是，这本书还是为数学家准备的．我相信，在将

来，会有《物理学家用数学》一类书籍出现，但我希望，在这方面的写作者，頂好对物理学和数学都有同样的造詣.

E. C. Titchmarsh

俄譯本校者序

大家都知道，在解許多数学物理問題时，有必要将任意函数按 Sturm-Liouville 問題的本征函数展开成 Fourier 級数．相应于有限綫段和連續系数的方程的所謂 Sturm-Liouville 正則問題，早已被研究过，并且在数学物理方程和积分方程的著作中，一般都有詳細的叙述．

在广大数学工作者中，只有少数人熟习那种不满足一个或两个正則条件的所謂奇异 Sturm-Liouville 問題．应該說，奇异問題的个别特殊情况，还是为大家所熟知的．我所指的就是 Fourier 积分和 Fourier-Bessel 积分，前者相应于按方程

$$y''+\lambda y=0$$

的本征函数在全直綫上的展开，或者在偶函数或奇函数的情况下在半直綫 $(0, \infty)$ 上的展开；而后者則相应于按方程

$$x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0$$

的本征函数在半直綫 $(0, \infty)$ 上的展开．但是，纵使这两种情形在数学分析及其应用中起着非常重要的作用，但相应的展开定理，一般还只是根据特殊的考虑得到的，因此也就几乎不可能給出有关这一方面的任何普遍概念．

同时，目前已經可以举出大量的导致奇异情况本征函数展开的問題．毫无疑問，在其中最重要的是量子力学問題，对于量子力学問題来說，奇异微分算子大概就是它最基本的数学工具了．

正則問題和奇异問題的理論基础是 Hilbert 空間中的自共軛綫性算子的譜理論．但是，这个理論远不能涉及到綫性微分算子

的全部問題．例如，在关于微分算子譜的性质的重要問題中，譜的普遍理論就很少有帮助．

最初，一維綫性微分算子的普遍理論是由 H. Weyl ([1]～[3]) 所闡述的，他把問題引导到自共軛有界积分算子的譜理論．

在这本专著中，給出了导致展开定理的另一更近的途徑，作者把 Cauchy 圍道积分的經典方法应用到奇异的情形．

这本专著（第一卷）是由該书两部分中的第一部分譯出（原书第一部分在 1946 年出版，第二部分在 1958 年出版）．它包括了 Weyl 和 Weyl 以后其他一些研究工作者的基本結果．它基本上是本书作者自己的一些結果，这些結果也許是 Weyl 以后对于奇异微分算子理論的最大貢献了．

自然，从 1946 年以来，已經过去了相当一段时間，本书的許多結果显得有些过时了，特别是关于討論展开定理的各种精确度的第六、第九和第十各章．但是，本书中大部分結果，直到現在还不失其意义．首先，包含大量有趣例子的第四章就是很有意义的．

在我給本书写的一些附录中，指出了解决这个理論的基本問題，例如，对于正則或奇异情况的展开定理，点譜的研究，展开式的精确度等等的更簡单的途徑．尤其是，在附录 V 中，完全地包括了第六、第九和第十各章的基本結果．在附录中，我把一些在本书中沒有涉及但我认为是最重要的問題包括了进去，当然，这些問題的选擇是从我个人的科学兴趣出发的．

在翻譯过程中（按指俄譯）糾正了原书中的許多刊誤和錯誤．最重要的修正是在 § 4.1 和 § 5.8 两节中．§ 5.8 的新內容是根据 Titchmarsh 和 Sears 的論文❶重写的，这篇論文就是为更正本书的錯誤而写的，同时，我們将关于 $q(x)=-e^{2x}$ 的情况的譜的研

❶ Sears D. B., Titchmarsh E. C., Some eigenfunction formulae (一些本征函数的公式), Quart. J. Math., 1 (1950), 165～75.

究(第四章)移到了第五章(§5.8)中❶，关于这个研究，原著的叙述也是錯誤的.

該书的第二部分的俄譯本在第一部分的俄譯本出版以后不久也就出版了. 它叙述了按偏微分方程的本征函数展开的基本問題，但也用了許多篇幅叙述与常微分方程有关的問題，这些問題，或者在第一部分中完全沒有叙述到，或者虽則叙述到了但都不够完整，諸如：1)算子的亏指标的研究；2)周期势的譜的研究；3)微扰理論以及其他一些問題.

总的来說，Titchmarsh 教授的这本书是数学分析方面的杰出著作，它将是許多数学家和理論物理学家感到兴趣而且是有所帮助的书.

Б. М. Левитан

---

❶ 在本书中譯本中，我們按照原著新版所作的补充，将第四章中的这个例子仍然保留，但在 §5.8 中，仍按照俄譯本修改后的譯文譯出. ——校者注

目　录

第一章 Sturm-Liouville 展开

1.1. 引論 令 L 表示作用于函数 $y=y(x)$ 的綫性算子. 我們来考虑方程

$$Ly=\lambda y, \tag{1.1.1}$$

这里, λ 是参数. 满足这个方程以及某些边界条件 (例如在 $x=a$ 和 $x=b$, 函数值为零) 的函数称为本征函数. 相应的值 λ 叫做本征值. 这样, 如果 $\psi_n(x)$ 是一个本征函数, 相应的本征值为 λ_n, 那么就有

$$L\psi_n(x)=\lambda_n\psi_n(x). \tag{1.1.2}$$

本书的目的就是研究算子

$$L\equiv q(x)-\frac{d^2}{dx^2}, \tag{1.1.3}$$

这里 $q(x)$ 是 x 的給定函数, 定义在某个給定区間 (a, b) 上. 在此情形下, y 满足二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\{\lambda-q(x)\}y=0, \tag{1.1.4}$$

而 $\psi_n(x)$ 满足方程

$$\psi_n''(x)+\{\lambda_n-q(x)\}\psi_n(x)=0. \tag{1.1.5}$$

如果我們将此式乘以 $\psi_m(x)$, 同时以 m 代替此式的 n 后乘以 $\psi_n(x)$, 将所得两式相减, 我們便得到

$$(\lambda_m-\lambda_n)\psi_m(x)\psi_n(x)=\psi_m(x)\psi_n''(x)-\psi_n(x)\psi_m''(x)$$

$$=\frac{d}{dx}\{\psi_m(x)\psi_n'(x)-\psi_n(x)\psi_m'(x)\}.$$

因此, 若两个函数 $\psi_m(x)$ 和 $\psi_n(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处为零 (或者满足更一般的、类似的边界条件), 那么

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx=[\psi_m(x)\psi_n'(x)-\psi_n(x)\psi_m'(x)]_a^b=0.$$

如果 $\lambda_m\neq\lambda_n$，则得

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx=0. \tag{1.1.6}$$

在必要时，可以在本征函数上乘以一个常数，使它适合

$$\int_a^b \psi_n^2(x)dx=1. \tag{1.1.7}$$

这样，函数 $\psi_n(x)$ 就构成一个規格化正交集.

我們的基本問題在于决定在怎样的条件下，任意函数 $f(x)$ 可以按上述函数系展开成級数，就象普通的 Fourier 級数那样. 如果这种展开是可能的，并且相应的展开式为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x), \tag{1.1.8}$$

那么，将此式乘以 $\psi_m(x)$，并且从 a 到 b 积分，我們就形式地得到

$$c_m=\int_a^b f(x)\psi_m(x)dx. \tag{1.1.9}$$

在某些情况下，本征值全体不是离散的，而組成連續的点集，例如充满半軸$(0, \infty)$. 此时展开式便取如下形状：

$$f(x)=\int_0^\infty c(\lambda)\psi_\lambda(x)d\lambda. \tag{1.1.10}$$

在普通 Fourier 級数的情形中，所有这些都有最簡单的說明. 例如，我們假定 $q(x)=0$，并設所考慮的区間是$(0, \pi)$. 于是，方程(1.1.4)在 $x=0$ 处为零的解就是函数 $y=\sin(x\sqrt{\lambda})$. 这一函数当且仅当 $\lambda=n^2$(n 为整数)时，在 $x=\pi$ 处也为零. 这些 λ 值便是本征值，相应的本征函数为 $\sin nx$. 任意函数可以按这些函数展开，这是在 Fourier 正弦級数中熟知的定理.

1.2. 为了驗証上面所指出的那种展开的正确性，有时可用如下的論断. 考慮偏微分方程

$$Lf = i\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{1.2.1}$$

其中 $f=f(x, t)$. 如果对某个 t_0 值給定了它的解 $f(x, t_0)$, 那么, 在比这个 t_0 值稍大的 t 处, 解 $f(x, t)$ 也由方程唯一地确定. 因此,可以預期,給定了 $f(x, t)$ 的初值,例如,当 $t=0$ 时 $f(x, t)$ 等于任意函数 $f(x)$, 那么, 我們就决定出方程(1.2.1)的一个解, 而且也只有一个解.

現在,我們假定这个解可以表成 Fourier 积分

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \lambda)e^{-i\lambda t}d\lambda, \tag{1.2.2}$$

其中

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)e^{i\lambda t}dt. \tag{1.2.3}$$

将(1.2.2)代入(1.2.1), 我們得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}LF(x, \lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-i\lambda t}F(x, \lambda)\,d\lambda.$$

因为此式对所有 t 的值都是正确的, 其左右两側积分中 $e^{-i\lambda t}$ 的系数必然相等,这就得到

$$LF(x, \lambda) = \lambda F(x, \lambda).$$

因而 $F(x, \lambda)$ 也是算子 L 相应于本征值 λ 的本征函数. 今在(1.2.2)中令 $t=0$, 我們便得到

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \lambda)\,d\lambda,$$

这就是任意函数 $f(x)$ 用連續本征函数来表示的表达式. 如果 $f(x, t)$ 作为 t 的函数,可表成 Fourier 級数而不是 Fourier 积分, 那么,由类似的討論我們就得到一个級数展开式.

如果要严格地直接作出这个論断,那显然是有困难的.

1.3. 包含在上述討論中的一个假設是: 当 $t\to\infty$ 时, $f(x, t)$ 趋向于零,这是因为,要使 Fourier 积分(1.2.2)存在,就要求积分

(1.2.3)收斂．为了避免这个限制，下面，我們来討論积分表达式(1.2.2)的更一般的形式．令

$$F_{+}(x, \lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \operatorname{Im} \lambda>0, \quad (1.3.1)$$

$$F_{-}(x, \lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \operatorname{Im}(\lambda)<0. \quad (1.3.2)$$

于是反演公式为

$$f(x, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty} F_{+}(x, \lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ic'-\infty}^{ic'+\infty} F_{-}(x, \lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda, \quad (1.3.3)$$

其中 $c>0$, 而 $c'<0$. 利用这个公式以及方程 (1.2.1), 并假定在 $t=0$ 时, $f(x, t)=f(x)$, 我們就形式地得到

$$\begin{aligned} LF_{+}(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} Lf(x, t) e^{i\lambda t} dt \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} e^{i\lambda t} dt \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x, t) e^{i\lambda t}\right]_{0}^{\infty} + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x, t) e^{i\lambda t} dt \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} f(x) + \lambda F_{+}(x, \lambda). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

类似地可得

$$LF_{-}(x, \lambda)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}} f(x)+\lambda F_{-}(x, \lambda). \quad (1.3.5)$$

由此便可导出下面求得展开式的方法．由給定的函数 $f(x)$ 作出方程(1.3.4)和(1.3.5)的满足一定边界条件的解 F_{+} 和 F_{-}, 然后，以 $t=0$ 代入反演公式 (1.3.3), 就得到

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty} F_{+}(x, \lambda) d\lambda+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ic'-\infty}^{ic'+\infty} F_{-}(x, \lambda) d\lambda. \quad (1.3.6)$$

在最簡单的情形下, $F_{-}(x, \lambda)$ 只与 $F_{+}(x, \lambda)$ 在下半平面上的

解析延拓相差一个符号. 引入記号

$$\Phi(x,\lambda)=-i\sqrt{2\pi}\,F_{+}(x,\lambda), \tag{1.3.7}$$

由(1.3.4)我們便得

$$(L-\lambda)\Phi(x,\lambda)=-f(x), \tag{1.3.8}$$

此时等式(1.3.6)变成

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{ic'-\infty}^{ic'+\infty}+\int_{ic+\infty}^{ic-\infty}\right)\Phi(x,\lambda)\,d\lambda. \tag{1.3.9}$$

由此,依留数理論就可以得到展开式,而級数的項就是函数 $\Phi(x,\lambda)$ 在极点的留数.

在一般情形下,因为(1.3.4)和(1.3.5)的不同只在 i 前的符号,所以(1.3.6)中的两項是互为复共軛的. 因而,我們又有

$$\begin{aligned} f(x)&=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty}F_{+}(x,\lambda)\,d\lambda\right\}\\ &=-\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty}\Phi(x,\lambda)\,d\lambda\right\}. \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

由这个公式,令 $c\to 0$, 就可以得到按本征函数的展开式.

特别是,上述討論指出:参数 λ 必須作为一个复变量来处理;但是,直到目前为止,所有的分析当然仍都是純形式的.

1.4. 在算子 L 由公式(1.1.3)給出,而(1.3.8)是一个二阶微分方程

$$\Phi''(x)+\{\lambda-q(x)\}\Phi(x)=f(x) \tag{1.4.1}$$

的特殊情形下,函数 $\Phi(x,\lambda)$ 能够用方程(1.1.4)的解来表示. 用 $W_x(\varphi,\psi)$ 或 $W(\varphi,\psi)$ 代表两个函数 φ 和 ψ 的 Wronski 行列式:

$$W(\varphi,\psi)=\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x).$$

进而,設 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$ 为方程(1.1.4)的两个解,它們满足 $W(\varphi,\psi)=1$. 于是方程(1.4.1)的一个解就是

$$\Phi(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)\int_a^x\varphi(y,\lambda)f(y)\,dy+\varphi(x,\lambda)\int_x^b\psi(y,\lambda)f(y)\,dy, \tag{1.4.2}$$

将此式微分两次就容易确証这一点.

下述事实是以上理論的另一个出发点,它在算子(1.1.3)的情形下避免了引出 Fourier 积分. 假設按本征函数的展开式(1.1.8)已經确立,我們来考慮函数

$$\Phi(x)=\Phi(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\psi_n(x)}{\lambda-\lambda_n} \tag{1.4.3}$$

的性质. 由它給出

$$\begin{aligned}\Phi''(x)-q(x)\Phi(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\{\psi_n''(x)-q(x)\psi_n(x)\}}{\lambda-\lambda_n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-c_n\lambda_n\psi_n(x)}{\lambda-\lambda_n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right)\\&=f(x)-\lambda\Phi(x).\end{aligned}$$

因此, 函数 $\Phi(x)$ 满足方程 (1.4.1), 仍然引导到这个微分方程的解. 如果我們可以解出这个方程,那么,(1.4.3)就指出 $f(x)$ 的展开式的項就是 $\Phi(x,\lambda)$ 在其极点的留数.

下面我們所采用的一般方法是: 由公式 (1.4.2) 决定出函数 $\Phi(x,\lambda)$, 沿 λ 复平面上的扩張的圍道对这个函数进行积分, 在极限情况下我們就得到函数 $f(x)$, 将此圍道收縮到实軸上($\Phi(x,\lambda)$ 的奇点即在实軸上),这样, 我們就得到 $f(x)$ 按本征函数的級数展开式或积分展开式.

1.5. Sturm-Liouville 展开 以下,我們将始終假定: $q(x)$ 是 x 的实函数, 而且在我們所考慮的区間 (a,b) 內的每一个点上都是連續的. 在經典的 Sturm-Liouville 情形中,区間(a,b)是有限的,同时函数 $q(x)$ 在 $x\to a$ 和 $x\to b$ 时具有有限的极限.

方程(1.1.4)的解存在的一般定理如下.

定理 1.5 如果 $q(x)$ 满足上述条件, 那么,对于任意的 α,在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上,方程(1.1.4)有一个解 $\varphi(x)$ 满足条件

$$\varphi(a)=\sin\alpha,\quad \varphi'(a)=-\cos\alpha.$$

对于每一个 x, 函数 $\varphi(x)$ 是 λ 的整函数.

令

$$y_0(x)=\sin\alpha-(x-a)\cos\alpha,$$

并对 $n=1, 2, \cdots$, 令

$$y_n(x)=y_0(x)+\int_a^x\{q(t)-\lambda\}y_{n-1}(t)(x-t)dt.$$

設在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上, 有 $|q(x)|\leqslant M$, $|y_0(x)|\leqslant K$, 又設 $|\lambda|\leqslant N$, 那么,

$$|y_1(x)-y_0(x)|\leqslant\int_a^x(M+N)K(x-t)dt=\frac{1}{2}(M+N)K(x-a)^2.$$

当 $n\geqslant1$ 时,

$$y_n(x)-y_{n-1}(x)=\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\{y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)\}(x-t)dt,$$

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant(M+N)(b-a)\int_a^x|y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)|dt.$$

因此,

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant\frac{K(M+N)^2(b-a)}{2}\int_a^x(t-a)^2dt$$

$$=\frac{K(M+N)^2(b-a)(x-a)^3}{3!},$$

而一般地有

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant\frac{K(M+N)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

因此,級数

$$\varphi(x)=y_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\{y_n(t)-y_{n-1}(x)\}$$

当 $|\lambda|\leqslant N$ 时关于 λ 一致收斂,当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时关于 x 一致收斂. 因为当 $n\geqslant2$ 时,成立着

$$y_n'(x)-y_{n-1}'(x)=\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\{y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)\}dt,$$

$$y_n''(x)-y_{n-1}''(x)=\{q(x)-\lambda\}\{y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)\},$$

所以, 将上述級数微分一次和微分两次所得到的級数也关于 x 一

致收斂．因此，

$$\begin{aligned}\varphi''(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\{y_n''(x)-y_{n-1}''(x)\}\\&=\{q(x)-\lambda\}\left[y_0(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\{y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)\}\right]\\&=\{q(x)-\lambda\}\varphi(x),\end{aligned}$$

这就是説，$\varphi(x)$ 満足方程(1.1.4)．它显然也満足所給边界条件．

1.6．現在令 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\chi(x,\lambda)$ 是方程(1.1.4)的解，满足条件

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi'(a,\lambda)=-\cos\alpha,\\ \chi(b,\lambda)=\sin\beta,\quad \chi'(b,\lambda)=-\cos\beta.\end{aligned}\right\}\tag{1.6.1}$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W(\varphi,\chi)&=\varphi(x)\chi''(x)-\chi(x)\varphi''(x)\\&=\{q(x)-\lambda\}\varphi(x)\chi(x)-\{q(x)-\lambda\}\chi(x)\varphi(x)\\&=0.\end{aligned}$$

因此 $W(\varphi,\chi)$ 与 x 无关，这样，它就仅仅是 λ 的函数，我們就用 $\omega(\lambda)$ 来表示它．由上述定理显見：$\omega(\lambda)$ 是 λ 的整函数．

令

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{\chi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_a^x\varphi(y,\lambda)f(y)dy+\frac{\varphi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_x^b\chi(y,\lambda)f(y)dy.\tag{1.6.2}$$

可以直接驗証，对于所有的 λ，$\Phi(x,\lambda)$ 滿足方程(1.4.1)以及边界条件

$$\left.\begin{aligned}\Phi(a,\lambda)\cos\alpha+\Phi'(a,\lambda)\sin\alpha=0,\\ \Phi(b,\lambda)\cos\beta+\Phi'(b,\lambda)\sin\beta=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.6.3}$$

我們假定：函数 $\omega(\lambda)$ 只有分布在实軸上的单零点 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots$，那么，函数 $\varphi(x,\lambda_n)$ 和 $\chi(x,\lambda_n)$ 的 Wronski 行列式等于零，由是 $\chi(x,\lambda_n)$ 就等于 $\varphi(x,\lambda_n)$ 乘以一个常数，即

$$\chi(x,\lambda_n)=k_n\varphi(x,\lambda_n).\tag{1.6.4}$$