奥数教程

总主编
单墫　熊斌

·初三年级·

葛军　编著

华东师范大学出版社

ISBN 7-5617-2381-4

9 787561 723814 >

G·1117 定价：13.00 元

总主编 单 墫 熊 斌

奥数教程

·初三年级·

葛 军 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程.初三年级 / 葛军编著.—上海:华东师范大学出版社,2000.11

ISBN 7-5617-2381-4

Ⅰ.奥... Ⅱ.葛... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48986 号

奥数教程

·初三年级·

总主编 单墫 熊斌

策划组稿 倪明 宋维锋

编著 葛军

责任编辑 宋维锋

封面设计 高山

版式设计 蒋克

出版发行 华东师范大学出版社

市场部 电话 021-62865537

传真 021-62860410

社址 上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

http://www.ecnupress.com.cn

印刷者 江苏扬中市印刷厂

开本 890×1240 32 开

印张 11.5

字数 320 千字

版次 2000 年 11 月第一版

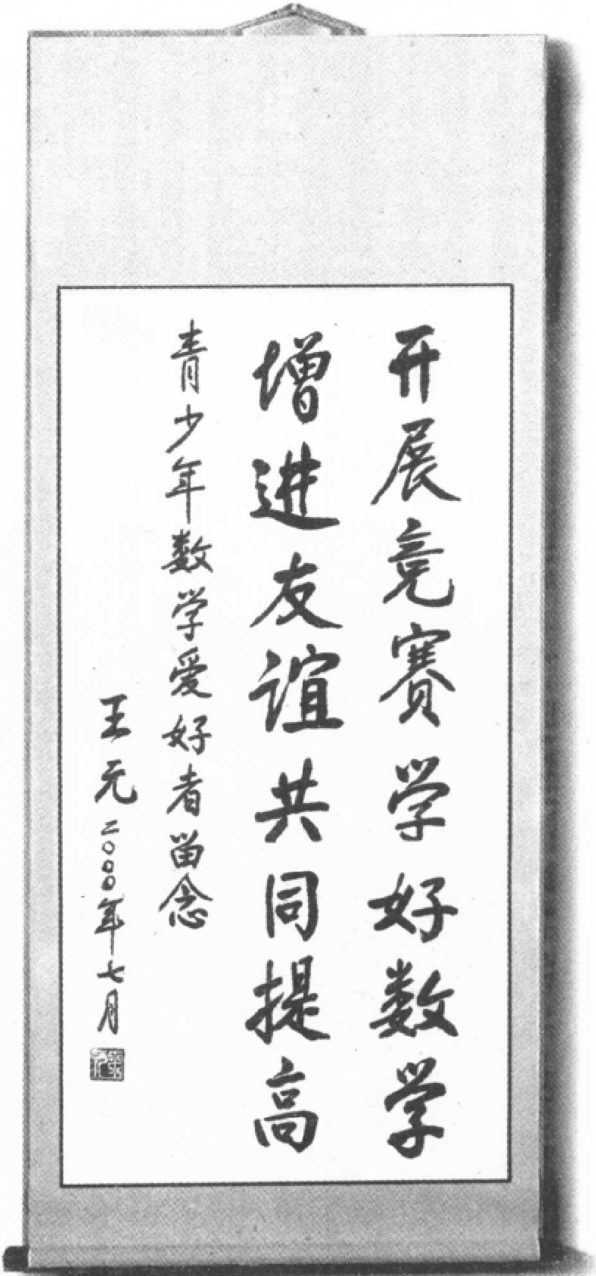
印次 2002 年 1 月第六次

书号 ISBN 7-5617-2381-4/G·1117

定价 13.00 元

出版人 朱杰人

(如本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021—62865537 联系)



中国数学奥林匹克委员会主席、中国科学院王元院士致青少年数学爱好者

前　　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”.

但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好.

的确，数学是中国人擅长的学科.如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余).

中国文字都是单音节，易于背诵.例如乘法表，学生很快就能掌握.再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”.但外国人，一学乘法，头就大了.不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵.

圆周率 $\pi=3.14159\cdots$. 背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了.可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个，……要背 π 先背诗，我们看来简直自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色.从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生学习兴趣，启迪学生智慧.例如：

“一百个和尚分一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚？”

外国人多半只会列方程解.中国人却有多种算术解法,如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚,100 个馒头表明小和尚是 300 个.多出 200 个和尚,是由于每个大和尚变小和尚,多变出 8 个人.从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数.小和尚自然是 75 人.或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组,平均每人吃一个馒头.恰好与总体的平均数相等.所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少,即大和尚是 $100 \div (3 + 1) = 25$ 人.

中国人善于计算,尤其善于心算.古代还有人会用手指帮助计算(所谓“掐指一算”).同时,中国很早就有计算的器械,如算筹、算盘.后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中,我国的优势显然,所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理,在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算,我国有不少论著),比希腊人稍逊一筹.但是,中国人善于向别人学习.目前我国中学生的几何水平,在世界上遥遥领先.曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班,他们认为所教的几何内容太深,学生不可能接受.但听课之后,不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解,而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中,我国选手获得众多奖牌,就是最有力的证明.当代著名数学家陈省身先生对此特别赞赏.他说:“今年一件值得庆祝的事,是中国在国际数学竞赛中获得第一.……去年也是第一名.”(陈省身 1990 年 10 月在台湾成功大学的讲演《怎样把中国建为数学大国》)

陈省身先生还预言:“中国将在 21 世纪成为数学大国.”

成为数学大国,当然不是一件容易的事,不可能一蹴而就,它需要坚持不懈的努力.我们编写这套丛书,目的就是:

1. 进一步普及数学知识,使数学为更多的青少年喜爱,帮助他们取得好的成绩.

2. 使喜爱数学的同学得到更好的发展,通过这套丛书,学到更多的知识和方法.

“天下大事,必作于细.”我们希望,而且相信,这套丛书的出版,

在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用.

著名数学家、中国科学院院士、中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词. 我们表示衷心的感谢.

还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生，没有他们，这套丛书不可能很快问世.

本丛书从小学三年级至高中三年级共 10 册. 本册为初三年级，由葛军编著.

单 墫 熊 斌

2000 年 8 月

本书荣获

第十届全国教育图书展

优秀畅销图书奖

《奥数教程》编委会

顾　问　王　元

主　编　单　墫　熊　斌

编　委　（按姓氏笔画为序）

冯志刚　刘诗雄

江兴代　余红兵

单　墫　杭顺清

胡大同　赵雄辉

倪　明　葛　军

熊　斌

葛军　南京师范大学数学与计算机科学学院副教授，硕士生导师，中国数学奥林匹克高级教练，《数学通讯》杂志编委。主要从事竞赛数学、解题理论、数学教育等方面的研究，已发表论文26篇，参编教材与著作20部，其中主编《新编奥林匹克数学竞赛指导（高中）》、《小学数学奥林匹克启蒙》，编著《初等数学研究教程》、《数学教学论与数学教学改革》等。曾获国家教委和中国科协联名表彰，以及省部级以上奖励7项。

目　录

第一讲　一元二次方程

一、知识要点和基本方法

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$$

它的简单形式就是 $Ax^2=B$.

我们解一元二次方程，就是把所给的方程转化为形如 $Ax^2=B$ 的方程来解. 这里的转化方式就是配方. 具体做法是:

因为 $$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right]+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

所以 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 就转化为

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad ①$$

从而利用平方根的意义得到方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

配方法是解一元二次方程的基本方法，而公式法是由配方法演绎得到的. 由①式就可以得到解一元二次方程的求根公式:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\ (b^2-4ac\geqslant 0) \qquad ②$$

用求根公式解一元二次方程的方法称为公式法.

有时,用因式分解法解一元二次方程.

如果一元二次方程的两根为 x_1、x_2,那么我们就有基本等式

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),\ (a \neq 0) \tag{③}$$

这是一个非常有用的基本等式.

如果我们对式②的形式 $x_{1、2} = A \pm \sqrt{B}$ $(B \geqslant 0)$“追根究源”,就可以知道 $A \pm \sqrt{B}$ 一定是一个一元二次方程的根,从而必有形如 $ax^2 + bx + c = 0$ 的等式成立(这里 $x = A \pm \sqrt{B}$). 利用这一结果常可以简化一些复杂的数值计算.

二、例题精讲

例 1 已知 b、c 为方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两个根,且 $c \neq 0$, $b \neq c$. 求 b、c.

解 因为 b、c 是方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两个根,所以

$$\begin{cases} b^2 - 4c \geqslant 0, & ④ \\ b^2 + b^2 + c = 0, & ⑤ \\ c^2 + bc + c = 0. & ⑥ \end{cases}$$

由⑥式及 $c \neq 0$ 得 $c = -b - 1$, 把它代入⑤式得

$$2b^2 - b - 1 = 0$$

即 $b = -\dfrac{1}{2}$, 或 $b = 1$.

当 $b = -\dfrac{1}{2}$ 时, $c = -b - 1 = -\dfrac{1}{2}$, 则 $b = c$. 这与题意不符. 于是 $b = 1$, $c = -b - 1 = -2$.

说明 如果 x_0 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根,那么就有 $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. 反之亦然.

例 2 已知 m、n 是有理数,方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有一个根是 $\sqrt{5} - 2$. 求 $m + n$ 的值.

解 由题意得

$$(\sqrt{5}-2)^2+m(\sqrt{5}-2)+n=0,$$

即

$$(9-2m+n)+(m-4)\sqrt{5}=0.$$

因为 m、n 是有理数、所以必有

$$\begin{cases}9-2m+n=0,\\ m-4=0,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}m=4,\\ n=-1.\end{cases}$$

于是 $$m+n=3.$$

例 3 已知 a 是方程 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根，求 $\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}$ 的值.

解 由题意得

$$a^2+a-\frac{1}{4}=0,$$

即

$$a^2=\frac{1}{4}-a,\ a^2+a=\frac{1}{4}.$$

于是

$$\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}=\frac{a\left(\frac{1}{4}-a\right)-1}{a^3(a^2+a)-a(a^2+a)}$$

$$=\frac{\frac{a}{4}-a^2-1}{\frac{1}{4}a(a^2-1)}$$

$$=\frac{\frac{a}{4}-\left(\frac{1}{4}-a\right)-1}{\frac{1}{4}a\left(\frac{1}{4}-a-1\right)}$$

$$=\frac{5a-5}{\frac{a}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$=20.$$

例 4 设 x_1、x_2 是方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，求 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值.

解 由题意得 $x_1\neq x_2$，且

$$x_1^2=3-x_1,\ x_2^2=3-x_2.$$

于是

$$\begin{aligned}x_1^3-4x_2^2+19&=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19\\&=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7\\&=4(x_1+x_2)+4.\end{aligned}$$

而 $$x_2^2-x_1^2=(3-x_2)-(3-x_1)=x_1-x_2,$$

即

$$(x_2-x_1)(x_2+x_1)=x_1-x_2.$$

又 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1+x_2=-1$.

故 $$x_1^3-4x_2^2+19=0.$$

说明 计算 x_1+x_2 可直接用第 3 讲中根与系数关系（即韦达定理）得到.利用方程的根所满足的等式，去处理一些代数式的计算，可以起到“降次”作用而简化计算.

例 5 已知 $x=-\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $\sqrt{x^3+4x^2+x+9}$ 的值.

解 由题意得 $$x=\sqrt{3}-2,$$

即 $$x+2=\sqrt{3},$$

于是有 $$(x+2)^2=(\sqrt{3})^2,$$

即 $$x^2+4x+1=0.$$

所以 $\sqrt{x^3+4x^2+x+9}=\sqrt{x(x^2+4x+1)+9}$

$$=\sqrt{9}=3.$$

例 6 已知首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$$

及

$$(b-1)x^2+(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$$

(a、b 是正整数)有一个公共根,求 $\dfrac{a^a+b^b}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

解 由题意知 $a>1$,$b>1$,$a\neq b$. 利用因式分解可解得上述两个方程的根分别为

$$a,\ \frac{a+2}{a-1};\quad b,\ \frac{b+2}{b+1}.$$

因为题中两个方程有一个公共根,则必有

$$a=\frac{b+2}{b+1}\quad 或\quad \frac{a+2}{a-1}=b.$$

上述两式都化简为

$$ab-a-b-2=0,$$

即

$$(a-1)(b-1)=3.$$

所以由 a、b 是大于 1 的正整数得

$$\begin{cases}a-1=1,\\ b-1=3\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a-1=3,\\ b-1=1.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a=2,\\ b=4\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a=4,\\ b=2.\end{cases}$$

故 $$\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^b b^a=4^2\cdot 2^4=256.$$

说明 还可以设题中两个方程的公共根为 x_0,则就有