与吴百诗教授主编的
《大学物理（新版）》配套

《大学物理（新版）》学习指导

主编　张孝林

给出各章的内容要点
增加了大量的例题
详细解答了所有习题

科学出版社

内 容 简 介

本书是与吴百诗教授主编的《大学物理(新版)》教材配套的教学参考书.本书给出了教材中全部习题的解答,在解题过程中,力求做到思路清晰,解法简捷.为了便于读者学习,书中还给出每章的主要内容,定律,公式,以及80多道典型例题.

本书可供工科各专业大学生学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

《大学物理(新版)》学习指导/张孝林主编. -北京:科学出版社,2002
ISBN 7-03-009403-4

Ⅰ.大… Ⅱ.张… Ⅲ.物理学-高等学校-教材 Ⅳ.O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第02125号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002年1月第一版 开本:720×1000 1/16
2002年1月第一次印刷 印张:27 1/2
印数:1—5 000 字数:528 000

定价: 30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前　　言

大学物理是一门重要的基础课，它在培养学生的科学素质、科学思维方法、提高学生智力等方面具有重要的作用．要学好大学物理，除了课堂的学习和训练外，还要结合教学要求，做一定数量的练习题．运用物理学中的基本定律和原理求解具体问题是学习中很重要的一个环节，它有助于加深对基本概念和定律的理解，有助于拓宽学生的知识面，对培养学生分析问题和解决问题的能力具有重要作用．本书是与吴百诗教授主编的《大学物理(新版)》教材配套的教学参考书．本书给出了教材中全部习题的详细解答，在解题过程中，力求做到思路清晰，解法简捷．为了使读者掌握和了解更多类型的题目，书中还给出了 80 余道具有一定代表性和示范性的典型例题．在这些典型例题的求解中，突出物理概念和物理模型，注重题目的分析和解题方法的介绍．愿这本书能对读者学习大学物理有较大的帮助．读者在使用本书时应先自己解题，然后再看题解，这样做的收获会更大一些．

参加本书编写的有田蓬勃(1～4 章)、张孝林(5～7、12 章)、苏亚凤(8～10 章)、喻有理(11, 15, 16, 18, 19 章)、刘丹东(13, 14 章)、徐忠锋(17 章)，全书由张孝林负责统稿．李普选和张俊武用计算机绘制了全书的插图．由于编者水平所限和编写时间仓促，书中难免会有一些疏漏和错误，希望使用本书的读者指正．

本书在编写过程中得到了吴百诗教授的悉心指导，得到了李甲科教授、焦兆焕教授及教研室其他教师的极大帮助和支持，在此我们谨致以衷心地感谢．

编　者

2000 年 10 月

目 录

第一篇　力　　学

第1章　质点运动学

一、基本内容和主要公式

1. 确定质点位置的方法　确定质点运动首先要确定参考系.在确定的参考系中,确定质点位置的方法主要有坐标法、位矢法和自然法.

2. 运动学方程　质点相对参考系运动时,质点位置坐标随时间变化的函数关系称为质点运动学方程.运动学方程描述了质点的运动状态.几种不同描述方法对应的运动学方程有

坐标法:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

位矢法:$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$

自然法:$s = s(t)$

3. 质点的位移、速度和加速度

位移:$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$

速度:$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$

加速度:$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$

用自然坐标表示的速度和加速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$

4. 常见的几种运动

匀加速度运动:

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

圆周运动:

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

$$v = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\beta$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega v = r\omega^2$$

5.速度和加速度在不同坐标系下的变换——伽利略变换

在两个相互作平动运动的坐标系中,有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e$$

二、典型例题

1-1 一质点沿 x 轴作直线运动,其速度与时间之间关系如图 1-1(a)所示.设 $t=0$ 时,$x=0$,试根据已知的 v_x-t 图,画出 $a-t$ 图和 $x-t$ 图.

解 v_x-t 曲线的斜率即为加速度,从已知的 v_x-t 曲线可得

0~2 s $\quad a_{0-2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{20-(-20)}{2-0} = 20\ (\mathrm{ms^{-2}})$

2~6 s $\quad a_{2-6} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{30-20}{6-2} = 2.5\ (\mathrm{ms^{-2}})$

6~10 s $\quad a_{6-10} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{0-30}{10-6} = -7.5\ (\mathrm{ms^{-2}})$

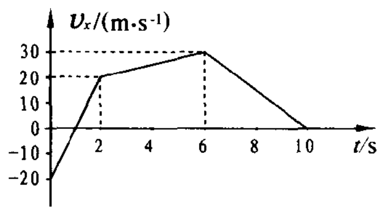

图 1-1(a)

根据以上结果可画出 $a-t$ 曲线,如图 1-1(b)根据 v_x-t 曲线,有

0 - 2s

$$v = 20t - 20$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 20t - 20$$

$$\mathrm{d}x = (20t - 20)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t (20t - 20)\mathrm{d}t$$

$$x = 10t^2 - 20t,\qquad t = 2\ \mathrm{s},\qquad x = 0\mathrm{m}$$

同理可得

2~6 s $\quad v = 2.5t + 15$

$\quad x = 1.25t^2 + 15t - 35,\qquad t = 6\ \mathrm{s},\qquad x = 100\ \mathrm{m}$

6~10 s $\quad v = -7.5t + 75$

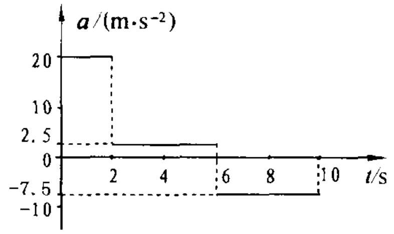

图 1-1(b)

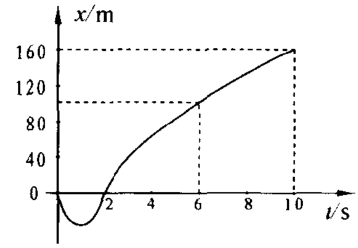

图 1-1(c)

$$x = -3.75t^2 + 75t - 215,\ t = 10\ \text{s},\ x = 160\ \text{m}$$

根据以上结果作 $x-t$ 曲线，如图 1-1(c)所示

说明 理解运动图线 $v-t$ 性质，掌握图线上点、线、斜率和面积所表示的物理内容，根据位移、速度、加速度的定义和性质，由 $v-t$ 关系可得 $x-t$，$a-t$ 关系.

1-2 由光滑钢丝弯曲成竖直平面里一条曲线，质点穿在此钢丝上，可沿着它滑动(图 1-2). 已知其切向加速度为 $-g\sin\theta$. θ 是曲线切向与水平方向的夹角. 试求质点在各处的速率.

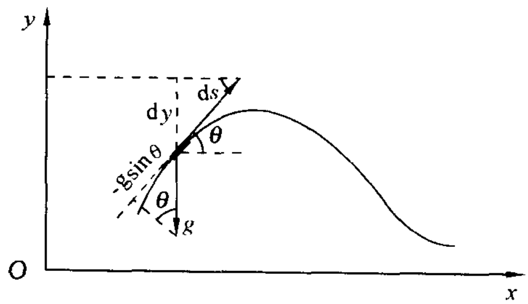

图 1-2

解 取如图 1-2 所示的直角坐标系，令 ds 为质点移动的弧长，它在 y 方向的投影为 $dy = ds\sin\theta$. 这里只用到切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta$$

故

$$dv = -g\sin\theta dt = -g\frac{dy}{ds}dt$$

而 $ds/dt = v$ 上式可写成

$$dv = -\frac{gdy}{v} \quad 或 \quad vdv = -gdy$$

两边积分

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -g\int_{y_0}^{y}\mathrm{d}y$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y)$$

即

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y)$$

说明 掌握切向加速度、法向加速度和总加速度之间的关系及定义是解此题的基础，关系式 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}s\cdot\sin\theta$ 将直角坐标系与自然坐标系中的 y 和 s 联系起来是解此题的关键. 通过积分可解此题. 由此题可看出：切向加速度改变质点速度的大小；法向加速度虽然在此题中没显示出来，但它的作用是改变质点运动的方向.

1-3 一球以 v_0 的速率水平抛射，试求 t 时刻质点加速度的切向分量和法向分量及曲率半径.

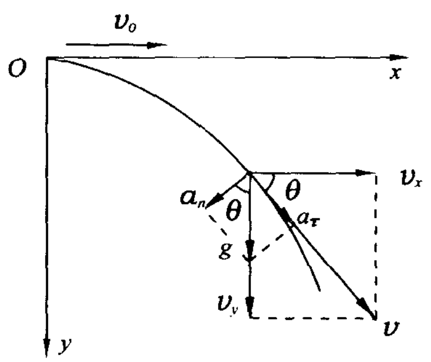

图 1-3

解 球作平抛运动，故球的运动方程为

$$\boldsymbol{r} = v_0 t\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}$$

即

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

因此

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0 t) = v_0$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = gt$$

球在时刻 t，速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

方向

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{gt}{v_0} \quad (见图 1-3)$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

小球作加速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ 的抛体运动,因此

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n$$

所以

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

由 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ 可得曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{g v_0}$$

说明 知道了质点的运动方程,即可通过微分来求质点的速度及加速度.本题一方面在直角坐标系中,由运动方程求速度;另一方面根据自然坐标系下速度、切向加速度的关系,及切向加速度和法向加速度垂直的性质与合加速度的关系求解.

1-4 罗盘显示飞机头指向正东,空气流速表的读数为 215 km/h,此时风向正南、风速 65 km/h,(a) 求飞机相对地面的速度;(b) 若飞行员想朝正东飞行,机头应指向什么方向?

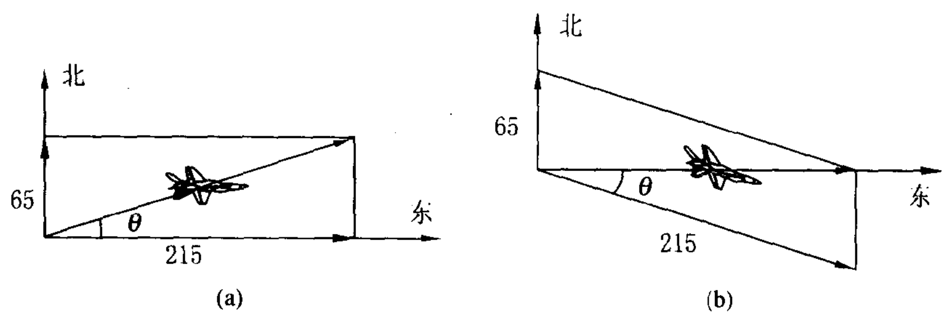

图 1-4

解 由速度变换有 $\boldsymbol{v}_{飞\text{-}地} = \boldsymbol{v}_{飞\text{-}风} + \boldsymbol{v}_{风\text{-}地}$

(a) 由图 1-4(a)可得,飞机对地面的速度和方向为

$$v = \sqrt{(215)^2 + (65)^2} = 225 \ (\mathrm{km/h})$$

$$\theta = \arctan \frac{65}{215} = 16.8°$$

(b)由图 1-4(b)可得,机头所指的方位为

$$\theta = \arcsin \frac{65}{215} = 17.6°$$

即机头应指向东南方向 17.6°.

其实际航速为

$$v = \sqrt{(215)^2 - (65)^2} = 205(\mathrm{km/h})$$

说明 伽利略变换体现了低速情况下不同参考系物体运动速度之间的变换关系,正确掌握它,并注意到速度的矢量性,由矢量叠加得到本题结果.

三、习题详解

1.1 选择题

(1)根据瞬时速度矢量$\boldsymbol{v}$的定义,及其用直角坐标和自然坐标的表示形式,它的大小$|\boldsymbol{v}|$可表示为(B, D, F, H)

(A)$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ (B)$\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ (C)$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ (D)$\left|\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$

(E)$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ (F)$\left|\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right|$

(G)$\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$ (H)$\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

(2)根据瞬时加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的定义,及其用直角坐标和自然坐标的表示形式,它的大小$|\boldsymbol{a}|$可表示为(A C G H)

(A)$\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$ (B)$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (C)$\left|\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|$ (D)$\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$

(E)$\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$ (F)$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$

(G)$\left[\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (H)$\left[\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

(3)以下说法中,正确的是(B, C, D, F)

(A)质点具有恒定的速度,但仍可能具有变化的速率.

(B)质点具有恒定的速率,但仍可能具有变化的速度.

(C)质点加速度方向恒定,但速度方向仍可能在不断变化着.

(D)质点速度方向恒定,但加速度方向仍可能在不断变化着.

(E)某时刻质点加速度的值很大,则该时刻质点速度的值也必定很大.

(F)质点作曲线运动时,其法向加速度一般并不为零,但也有可能在某时刻法向加速度为零.

(4)能正确表示质点在曲线轨迹上 P 点的运动为减速的图是图 1.1(4)(d)

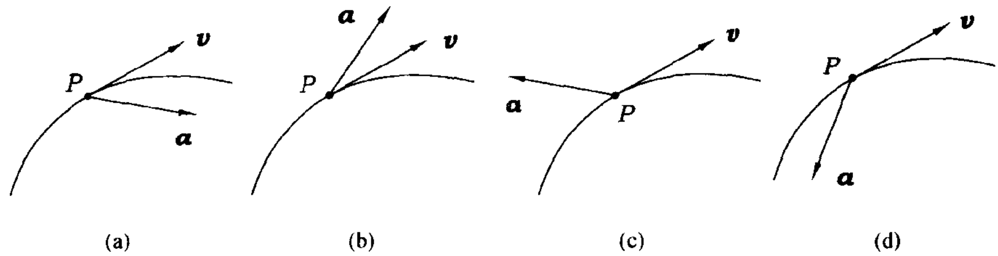

图 1.1(4)

(5)质点以速度 $v=4+t^2\text{m/s}$ 作直线运动，沿质点运动直线作 Ox 轴，并已知 $t=3\text{s}$ 时，质点位于 $x=9\ \text{m}$ 处，则该质点的运动学方程为(C).

(A) $x=2t$　　　　(B) $x=4t+\dfrac{1}{2}t^2$

(C) $x=4t+\dfrac{1}{3}t^3-12$　　　　(D) $x=4t+\dfrac{1}{3}t^3+12$

1.2　填空题

(1)质点沿 x 轴作直线运动，其速度 v 与时间 t 的关系如图 1.2(1)，则 t_1 时刻曲线的切线斜率表示该时刻质点的瞬时加速度，时刻 t_1 与 t_3 之间曲线的割线斜率表示从 t_1 到 t_3 时间内质点的平均加速度，从 $t=0$ 到 t_4 时间内，质点的位移可表示为 $\int_0^{t_4} v\,\mathrm{d}t$，从 $t=0$ 到 t_4 质点经过的路程可表示为 $\int_0^{t_4} |v|\,\mathrm{d}t$.

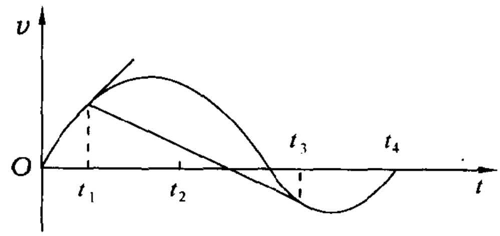

图 1.2(1)

(2)质点在平面上运动，若 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 不为零，则质点作圆周运动；若 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 不为零，则质点作匀速率曲线运动；若 $\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=0$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ 不为零，则质点作变速率曲线运动.

(3)已知质点的运动学方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，则 t_1 时刻质点的位矢

$\boldsymbol{r}(t_1)=x(t_1)\boldsymbol{i}+y(t_1)\boldsymbol{j}$，时间间隔$(t_2-t_1)$内质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}=[x(t_2)-x(t_1)]\boldsymbol{i}+[y(t_2)-y(t_1)]\boldsymbol{j}$，该时间间隔内质点位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\{[x(t_2)-x(t_1)]^2+[y(t_2)-y(t_1)]^2\}^{1/2}$，该时间间隔内质点经过的路程 $\Delta s=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}t$.

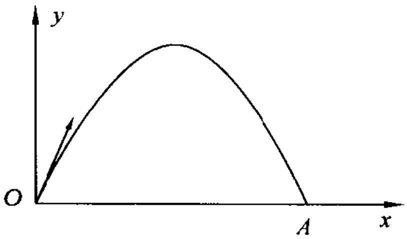

图 1.2(4)

(4)质点在竖直的 Oxy 平面内作斜抛运动，$t=0$ 时质点在 O 点，$t=t_1$ 时质点运动到 A 点，如图 1.2(4)，则 $\int_0^{t_1}v_x\mathrm{d}t$ 表示从$t=0$ 到 t_1 时间内质点位移沿 x 轴的投影；$\int_0^{t_1}v_y\mathrm{d}t$ 表示从$t=0$ 到 t_1 时间内质点位移沿 y 轴的投影；$\int_0^{t_1}v\mathrm{d}t$ 表示从$t=0$ 到 t_1 时间内经历的路程；$\int_0^A\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示从O 点运动到A 点的过程中质点的位移；$\int_0^A|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 表示从 O 点运动到A 点的过程中质点经历的路程；$\int_0^A\mathrm{d}r$ 表示从O 到A 的距离.

(5)AB 杆以匀速度 $\boldsymbol{u}$ 沿 x 轴正方向运动，带动套在抛物线($y^2=2px$)导轨上的小环，如图 1.2(5). 已知 $t=0$ 时，AB 杆与y 轴重合，则小环运动的轨迹方程为$y^2=2px$，运动学方程为 $x=ut$，$y=\pm(2put)^{1/2}$，速度 $\boldsymbol{v}=u\boldsymbol{i}\pm\frac{pu}{\sqrt{2put}}\boldsymbol{j}$，加速度 $\boldsymbol{a}=\pm\frac{pu}{2t\sqrt{2put}}\boldsymbol{j}$.

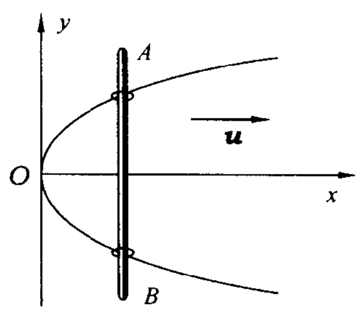

图 1.2(5)

1.3 路灯距地面高度为 h，身高 l 的人以速度 v_0 在路上匀速行走，见图 1.3. 求人影中头顶的移动速度，并求影长增长的速率.

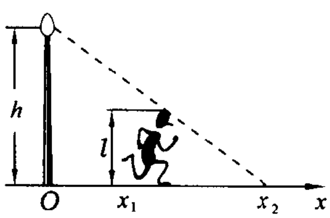

图 1.3

解 在图示的坐标系中，人坐标为 x_1，人影头顶坐标为 x_2，设人影头顶的移动速度为 v，影长增长的速率为 u，则有

$$v=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t},\quad v_0=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$

因 x_2-x_1 为人影长度，因此

$$u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2 - x_1) = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$

由图 1.3 知

$$\frac{h}{x_2} = \frac{l}{x_2 - x_1} \quad x_2 = \frac{h}{h - l}x_1$$

故有

$$v = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{h - l}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{h - l}v_0$$

$$u = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{h - l}v_0$$

1.4 湖中有一小船,岸边有人用绳子通过一高处的滑轮拉船,如图 1.4 所示,人收绳的速率为 v.问:

(1)船的运动速度 u(沿水平方向)比 v 大还是小?

(2)如果保持收绳的速率 v 不变,船是否做匀速运动?如不是,其加速度如何?

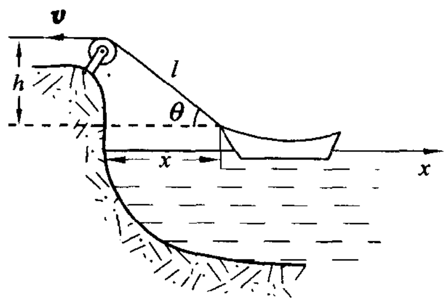

图 1.4

解 (1)将船看作一质点,在如图所示的坐标系中,船到滑轮绳长为 l,滑轮距水面的高度 h,依题意

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|, \qquad u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$x^2 = l^2 - h^2$$

有

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}, \qquad |u| = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{l}{x}\left|\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{l}{x}v$$

故 $u = -\frac{l}{x}v = -\frac{v}{\cos\theta}$, u 为负,表示运动方向向左,$|u| > v$.

(2)船作变换运动，其加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{l}{x}v\right)=-\frac{v^2}{x^3}(l^2-x^2)$$

或 $a=-\frac{v^2}{x}\tan^2\theta$，$a$ 与 v 方向相同，船做变加速运动.

1.5 雷达与火箭发射台的距离为 l，观测沿竖直方向向上发射的火箭，如图 1.5. 观测得 θ 的规律为 $\theta=kt$（k 为常数）. 试写出火箭的运动学方程，并求出当 $\theta=\pi/6$ 时，火箭的速度和加速度.

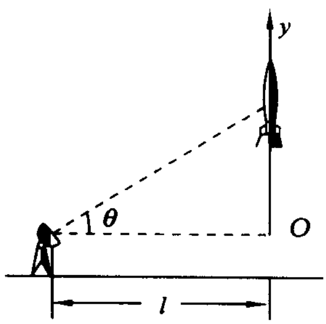

图 1.5

解 在图中所示的坐标系，则

$$y=l\tan\theta=l\tan kt$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=lk/\cos^2kt$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2lk^2\tan kt\cdot\sec^2kt$$

当 $\theta=\pi/6$ 时

$$v=\frac{4}{3}lk$$

$$a=\frac{8\sqrt{3}}{9}lk^2$$

因此，火箭在匀加速上升.

1.6 粒子按规律 $x=t^3-3t^2-9t+5$ 沿 x 轴运动，在哪个时间间隔它沿着 x 轴正向运动？哪个时间间隔沿着 x 轴负向运动？哪个时间间隔它加速？哪个时间间隔减速？分别画出 x,v,a 以时间为自变量的函数图.

解 因已知粒子的运动学方程，对其微分，可求得速度、加速度，因此有

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2-6t-9$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=6t-6$$

可见，当 $v=3(t^2-2t-3)>0$，即 $t>3$ s 时，粒子沿 x 轴正向运动；

当 $v=3(t^2-2t-3)<0$，即 $t<3$ s 时，粒子沿 x 轴负向运动.

由于 $a=6(t-1)$，故有 $t>1$ s 时，$a>0$；$0<t<1$s 时，$a<0$.

可见，在时间间隔 $0<t<1$ s 内和 $t>3$s 内，v 和 a 同号，粒子作加速运动；在时间间隔 1 s$<t<3$ s 内，v 和 a 异号，粒子作减速运动. 图略.

1.7 一质点的运动学方程为 $x=t^2$，$y=(t-1)^2$，x 和 y 均以 m 为单位，t 以 s 为单位，试求：

(1)质点的轨迹方程；

(2)在 $t=2$s 时，质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

解 (1)由运动学方程消去时间 t 可得质点的轨迹方程,将 $t=\sqrt{x}$ 代入有

$$y=(\sqrt{x}-1)^2 \quad 或 \quad \sqrt{y}=\sqrt{x}-1$$

(2)对运动学方程微分求速度及加速度,即

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2(t-1)$$

$$\boldsymbol{v}=2t\boldsymbol{i}+2(t-1)\boldsymbol{j}$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=2,\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=2$$

$$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$$

当 $t=2$ s 时,速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s}, \qquad \boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s}$$

1.8 已知一质点的运动学方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}$,其中,$\boldsymbol{r}$,$t$ 分别以 m 和 s 为单位,试求:

(1) 从 $t=1$s 到 $t=2$s 质点的位移;

(2) $t=2$s 时质点的速度和加速度;

(3)质点的轨迹方程;

(4)在 Oxy 平面内画出质点的运动轨迹,并在轨迹图上标出 $t=2$s 时,质点的位矢 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

解 依题意有

$$x=2t \tag{1}$$

$$y=2-t^2 \tag{2}$$

(1)将 $t=1$,$t=2$ 秒代入,有

$$\boldsymbol{r}_{(1)}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{r}_{(2)}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

故质点位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{(2)}-\boldsymbol{r}_{(1)}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$$

(2)通过对运动学方程求导可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}=-2\boldsymbol{j}$$

当 $t=2$s 时,速度、加速度为

$$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s}, \qquad \boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

(3)由(1)、(2)两式消去时间 t 可得质点的轨迹方程

$$y = 2 - \frac{x^2}{4}$$

即质点的运动轨迹为一抛物线.

(4)图略

1.9 一粒子沿着抛物线轨道 $y = x^2$ 运动,粒子速度沿 x 轴的投影 v_x 为常数,等于 3 m/s,试计算质点在 $x = \frac{2}{3}$m 处时,其速度和加速度的大小和方向.

解 依题意:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3\text{m/s}$$

$$y = x^2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 2xv_x$$

当 $x = \frac{2}{3}$m 时, $v_y = 2 \times \frac{2}{3} \times 3 = 4$ m/s

速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5 \text{ m/s}$$

其方向为 $\alpha = \arccos\frac{v_x}{v} = 53°8'$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2v_x^2 = 18 \text{ m/s}^2$$

加速度的大小为

$a = a_y = 18 \text{ m/s}^2$, **$a$** 的方向沿 y 轴正向.

1.10 一质点沿一直线运动,其加速度为 $a = -2x$,式中 x 的单位为 m,a 的单位为 m/s²,试求该质点的速度 v 与位置坐标 x 之间的关系.设当 $x = 0$ 时,$v_0 = 4$ m/s.

解 依题意

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = -2x$$

$$\int_0^x -2x\,dx = \int_{v_0}^v v\,dv$$

积分得

$$-x^2 = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2x^2} = \sqrt{16 - 2x^3}$$

在本题中,积分变量的替换非常重要.这种方法在许多问题中都有应用,读者应注意体会该方法的思路.

1.11 火箭沿竖直方向由静止向上发射，加速度随时间的变化规律如图所示．试求火箭在 $t=50$ s 时燃料用完那一瞬间所能达到的高度及该时刻火箭的速度．

解 由图可知

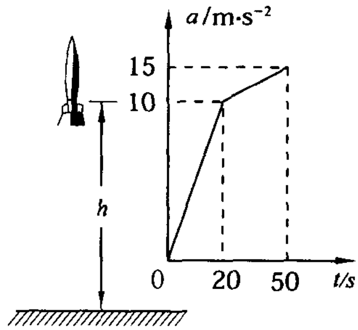

图 1.11

第一阶段 $a=\dfrac{1}{2}t$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}t,\qquad dv=\frac{t}{2}dt$$

积分

$$\int_0^v dv=\int_0^t\frac{1}{2}t\,dt,\ v=\frac{1}{4}t^2$$

当 $t=20$ s， $v=100$ m/s

由 $v=\dfrac{1}{4}t^2$ 积分

$$\int_0^x dx=\int_0^t\frac{1}{4}t^2dt$$

$$x=\frac{1}{12}t^3,\ t=20\text{ s}\quad x=\frac{2000}{3}\text{ m}$$

第二阶段

$$a=\frac{1}{6}t+\frac{20}{3}$$

$$dv=\left(\frac{1}{6}t+\frac{20}{3}\right)dt$$

积分

$$\int_{100}^v dv=\int_{20}^t\left(\frac{1}{6}t+\frac{20}{3}\right)dt$$

$$v=\frac{1}{12}t^2+\frac{20}{3}t-\frac{200}{3}$$

再积分

$$\int_{\frac{2000}{3}}^x dx=\int_{20}^t\left(\frac{1}{12}t^2+\frac{20}{3}t-\frac{200}{3}\right)dt$$

可得

$$x=\frac{1}{36}t^3+\frac{20}{6}t^2-66.6t+444.4$$

当 $t=50$ s时， $v=475$ m/s， $h=8918.0$ m．

1.12 一质点沿半径 $R=1$ m 的圆周运动．$t=0$ 时，质点位于 A 点，如图．然后沿顺时针方向运动，运动学方程 $s=\pi t^2+\pi t$，其中 s 的单位为 m，t 的单位为 s，