科學圖書大庫

數學是什麼

譯者　吳英格　余文能　劉　政

校閱　張壽彭　趙少鐵

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數學是什麼

譯者　吳英格　余文能　劉　政
校閱　張壽彭　趙少鐵

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鏗　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十六年十一月三十日四版

數 學 是 什 麼

基本定價　3.60

譯者　吳英格　東海大學講師
　　　余文能　東海大學講師
　　　劉　政　清華大學講師
校閱　張壽彭　輔仁大學教授
　　　趙少鐵　成功大學教授

(63)局版臺業字第0116號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲尉爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

玆特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛擧是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

中譯本卷頭語

這是一部深入淺出的數學名著。著者不僅是當代分析學巨擘、德意志偉大數學傳統的繼承人之一，也是希爾柏學派內圈人物中碩果僅存的一位。跟他的老師希爾柏一樣，庫朗在數學研究與數學教育上的影響之既深且廣，是極少有人可以望其項背的。庫朗著述等身，多半是純學術性的數學論著；此外，教育性的著作也不少，其中最最有名的，大概要算這一部了。本書內容精闢深入，文筆則飄逸謹嚴兼而有之；令人不讀則已，一讀就非一氣讀完不可！我們希望中譯本能對我國的青年科學工作者有所啓發；並希海內方家不吝指教。

二、三、四版序

在以往若干年裡，由於種種事件的影響，數學知識與訓練的需要日增。除非學生與教師都設法超越過數學上的形式主義與解題主義，並力求把握數學的真實本質，否則將難逃失敗與幻滅的危險。本書就是專為這些學生與教師而寫的。第一版所得到的反應鼓勵了作者所期望的：本書將對您有所助益。

大批讀者的批評，使本書作了許許多多的改正及改進。對Natascha Artin夫人不辭辛勞的為第四版作準備工作，謹表示由衷的謝意。

初版序言

兩千多年來，通曉數學一直被視為每一個受教育的人所不可或缺的知識裝備。如今，數學教育的傳統地位陷入危險的境域中；不幸的是，數學專家們都責無旁貸。數學教育有時已退化為空洞的解題訓練了。解題雖能發揮表面上的能力，却無法引致實際的瞭解或更深入的思考獨立性。數學上的研究工作已走上過分專門或過分着重抽象化的趨勢，忽視了它的應用性以及跟其他部門間的關連性。不過，這種情況絲毫不能證明緊縮數學教育的政策有理；正相反，我們應當大力加强數學教育才對。事實上，那些留意到智慧訓練價值的人已經在這樣作了。教師、學生跟受教育的衆人都主張建設性的改革，不可聽其各自發展；目的在使學生眞正地體會到數學為一有機的整體，並為科學思考與活動的基礎。

某些傳記性與歷史性的名著和某些富有刺激性的暢銷讀物曾鼓起潛在的一般興趣。然而知識不能僅靠間接方式學得。想藉着不假思索的傳授增加對數學的瞭解，並不比靠着報章雜誌把音樂傳授給那些從來沒有專心聽過音樂的人來得容易。每一個人都要跟活生生的數學概念及內容多多接觸，但不用一下子就走上學術性的工作，也不必多走不必走的彎路。數學的教學不必太注重通俗性的東西，這正如不應武斷一樣，因為武斷會掩飾動機或目的，因而總是變成進步的障礙。其實，我們可以從非常基本的事實開始直接達到有利的地位，不必拐彎抹角；而一到這個地位便可看出近代數學的重點及原動力所在了。

本書打算朝此方向進行。由於我們假定高中程度就足夠了，所以本書就是看做通俗讀物也無妨。但這並非對巧避任何努力的危險趨勢讓步的意思。閱讀本書需要某種程度的智性的成熟與自行思考的意願方能濟事。本書是為初學者與專家，學生與教師，哲學家與工程師，教學與參考而寫的。也許野心太大了！在其他工作的壓力下，本書雖經過若干年的準備，然係在其眞正完成之前出版，故須作若干折衷處理；因此，任何批評與建議均所歡迎。

無論如何，作者期望本書能對美國高等教育有所貢獻，俾對這個國家給我的機會深致謝意。此書的計劃與觀點都應由本人負責，至於任何成果與榮譽則須跟 Herbert Robbins 共享。自從參與此工作後，他便全力以赴。此書之能以這樣的形式呈現在讀者之前，他的功勞實不可沒。

這裡得感謝幾位朋友的幫忙。跟Niels Bohr, Kurt Friedrichs及Otto Neugebauer的討論，對本書的哲理觀點跟歷史態度，影響頗大；Edna Kramer站在教師的觀點，也給了很多有意義的批評；David Gilbarg爲本書定初稿；Ernest Courant, Norman Davids, Charlesde Prima, Alfred Horn, Herbert Mintzer Wolfgang Wasow以及其他一些人幫忙抄寫及重抄原稿並改進很多細節；Donald Flanders細查原稿並在印刷上提供不少有價值的建議；John Knudsen, Hertha von Gumppen berg, Irving Ritter, 及Otto Neugebauer繪圖；H. Whitney 提供附錄中所列的練習。洛克菲洛基金會一般教育組慷慨支持此課程與講義；本書即係以此爲基礎寫成的。對Waverly Press，尤其Grover C. Orth, 極其勝任的工作，還有，對於牛津大學印刷所，特別是Philip Vaudrin及W. Oman兩位先生的鼓勵跟合作，在此均一併致謝。

庫朗

本書的讀法

本書雖係以有系統的次序寫的，但讀者不用逐頁逐章仔細研讀。例如，歷史性或哲學性的引言可以延到唸完該章之後再看。各章彼此之間大部分不相關連。通常一節在開始時比較容易瞭解，然後慢慢的深，再變成難，直到一節之末或補充教材。因此，想要知道普通常識甚於特別知識的讀者，可以把較詳細的討論部分略掉。

數學程度較淺的讀者須作一抉擇；有星號的或小體字的部分可以在第一次閱讀時省去，這樣做不致於對後半部的瞭解有所影響。再者，讀者不妨只學習書中認爲比較有興趣的章節。大部分練習都是精選的；比較難的附以星號，讀者千萬不要因其較難或無法解答而灰心。

高中教師可以從幾何作圖與極大極小兩章中選出一些有益的材料給特選的學生參考。

作者期望本書能給大一到研究生階段的大學生以及對科學有特殊興趣的專業人士帶來一些用處。再者，本書可以作爲非慣例性的大學課程中介紹基本觀念的教材。第Ⅲ、Ⅳ與Ⅴ章可用做幾何課程，第Ⅵ與Ⅷ章構成了完整的微積分教材。這兩章注重內容的瞭解，並非通俗性的講解。這些材料對於想按需要而補充一些資料，以使內容更富有活性的教師來說，都可以用做初步的教材。分散在各章節裡的練習和附在書末另外收集的問題，都可以作爲課堂上使用本書時的輔助。

作者甚至希望專家們對於若干細節以及一些含有進一步發展的種子的初步討論感到興趣。

數學是什麼？

數學之做爲人類心智的一種表現，反應着主動的意志，深沈的推理，跟美感的追求。邏輯與直覺，分析與創造，一般性與個別性都是數學的基本要素。儘管不同的看法可能產生相異的偏重，但數理科學的生命，用途與至高價値，正是由這些相對力量間的交相作用，以及力求把這些力量予以綜合的努力所構成的！

無可置疑的，所有的數學發展在心理上多多少少係基於實用的需要，但是一旦在應用需求之下開始了，便無可避免的會獲得一股衝力，使它超過這種立即應用的界限。這種從應用到理論的趨勢自古已然；時至今日，由工程師與物理學家對近代數學所作的許多貢獻，更是數見不鮮的事了。

有記載的數學要從東方開始。約當紀元前前二千年，巴比倫人收集了許多應屬於今日的初等代數的豐富資料。但是數學之爲近代觀點下的科學，却是遲至紀元前第五世紀及第四世紀時才在希臘的土壤中出現的！早自波斯王朝時代，東方與希臘之間便經常來往接觸了。到了亞歷山大遠征以後，此種接觸達了極高峯，使希臘人吸收了不少巴比倫人的數學與天文學成果。於是數學立刻走上當時風行於希臘城邦的哲學討論的路。這樣，希臘思想家們開始體會到數學上有關連續、運動、及無限大的觀念不容易建立；同時想用已給單位去量任意長的問題也發生了困難。經過了漫長的努力，問題終獲解決，Eudoxus 的幾何閉聯體論便應運而生。這一成就只有二千年後近代的無理數論可以差堪比擬。數學上演繹—公設式的趨勢便是由 Eudoxus 時代開始，經歐幾里得的原理予以定型。

經過了一段漫長的準備後，十七世紀數學與科學的改革便以解析幾何及微積分爲主題展開了充滿活力的局面。雖然希臘幾何學保留着它的重要地位，但是希臘人渴望的那種公理化的結構形式跟系統的演繹不復在十七與十八世紀出現。邏輯上要求從清晰的定義、非矛盾性、〃自明〃公設作起點的精確推理，對那些數理科學的新開拓者似乎沒太大興趣。他們經由直覺的推測，與無意識的神秘主義所交織而成的有力推理，以及對形式推理程序的超

人威力所給的盲目信念裡，征服了一片無盡藏的數學世界。這種由進步帶來的狂喜，逐漸地被批判的自制精神所約束。在十九世紀，由於鞏固基礎的內在要求，同時爲求在推廣時不致發生意外起見，新數學便自然地回過頭來要求對基礎方面的重新釐訂，尤其是微積分學及其賴以建立的極限觀念。可見，十九世紀不但成爲新的進步時代，而且把古典的精確且嚴格的證明理想也都一一重現了。就這一方面來說，十九世紀的成就，較之希臘科學所企望的模式有過之而無不及。又一次的，單擺向純粹且抽象的一側擺去了。目前似乎還在這個時代裡，雖然我們希望，這種強烈改革時期所不能避免的純粹與應用間不幸的分離，終會有趨於統一的一天。這種重新獲得的內在力量，還有最主要的，由更清楚瞭解的基礎上所獲得的龐大簡化，使我們不僅精通數學上的理論，而且不致失去對應用的掌握。重新建立純粹科學與應用科學間有機的結合，並在抽象的一般性與各色各樣的單獨性間建立更堅強的平衡，是最近將來數學研究上最主要的工作。

這裡不是詳細討論數學的哲學分析或心理分析的地方，我們只想強調幾點：過分着重演繹—公設式的數學特性可能失之偏激。的確，建設性發明以及引導與促發直覺的要素，不易以簡單的哲理公式表示之；但是它卻是任何數學理論的核心，不論它多麼抽象。即使定型的演繹爲終極目的，直覺與創造至少是一種推動力。科學成長中的嚴重威脅是武斷數學不過是從定義與公設導出的一套理論系統，其中的定義與公設一定要相容，此外數學要隨數學家的心欲隨意創造。假若這樣的說法正確，那麼數學對受敎育的人來說，就沒有什麼意思了。那時候數學就只成了定義、法則與三段論法的遊戲了，毫無動機或目的可言。所謂智者能隨心所欲創造有意義的公設系統的說法，不過是騙人的片面眞理。只有在以達到有機整體爲目標的約束之下，只有靠着內在需求的引導，自由的心靈才能夠獲得具有科學價值的結果。

儘管邏輯分析的思辨趨勢不足以代表所有的數學，但是它卻已導致數學上諸事實與其彼此間關係深一層的瞭解，同時使我們對數學的主要觀念有了更清楚的領悟。數學中的近代觀點，（此一觀點已成爲一般科學態度的典型），也是由此而來的。

不管我們的哲學觀點如何，爲了科學上研究的目的，我們的目標是要對所有可理解的題材加以透徹的理解。當然，僅靠理解是不足以構成知識與見解；一定要以某一更基本的整體，即〃物自體〃爲準，加以調和與解釋才行。所謂〃物自體〃並非物理上直接觀察的對象，

而是屬於形上學的範圍。然而，科學方法上最要緊的就是不得插入形而上的元素，而要將可觀察的事作爲概念與構想的根源。放棄〝對物自體〞的領悟、極致眞理的洞悉以及大地本源的闡明，或許會使那些素樸的熱誠人士遭受心理上的挫折，但這却是近代思想上最成功的一種改變。

許多物理學上的偉大成就都是靠着〝滅玄原則〞(The principle of eliminating metaphysics)而得的。例如，當愛因斯坦想把〝異地同時發生之事件〞歸結到可觀察到的現象時，當他把以此觀念自身有其科學含意的信念指爲形而上學上的偏見時，他已找到相對論的關鍵所在了！當波爾(Niel Bohr)和他的學生發現任何物理上的觀察都會使被觀察物體受到觀察工具的影響時，便知道想同時確定質點的位置與速度在物理觀點上是不可能辦到的。這種發現所產生的深入結果，曾在量子力學的理論上具體表現過，現在已經是每一位物理學家耳熟能詳的事了。十九世紀流行過一種概念，認爲空間內質點的機械力與運動是物體，而電、光與磁則應看成機械現象，一如對熱的看法一樣。〝以太〞是一種假想的介質，能夠從事我們無法完全解釋的運動；而以太的運動便是光與電。後來，人們慢慢地認爲〝以太〞必然是無法觀察的；屬於形而上學的範圍，而非物理學的範圍。最後，有關光與電的機械解說以及隨此而來的以太都棄掉了。

同樣的情況，在數學上也發生過。在各個年代裡，數學家們也曾認爲他們所研究的對象如數、點都是實體。由於對這些要素很難加以恰當的描述，所以十九世紀的數學家開始慢慢領悟到這些說法在數學上未必有何意義可言。最好的說法是不要指到實體，只敘述數學上〝無定義物體〞與有關運算法則上所產生出來的相互關係。所謂點、線、數究竟是什麽，在數學中無法也無需討論。可證實的東西只有結構與關係，如兩點決定一線，諸數在一定的法則下合併成另一數等等。數學上這些基本觀念的意像化對其深入的瞭解是不可或缺的，這是近代公設化發展中最重要而且效果最宏的成果。

幸好，創造的思想沒有被武斷的哲學信念所影響，蓋一旦有了這種思想，難免不會阻止建設性成果的獲得。總之，對學者跟外行人來說都是一樣，只有靠對數學本身的生動經驗才能回答這個問題：數學是什麽？

目　　錄