计算方法

下册

清华大学
北京大学《计算方法》编写组

科学出版

计算方法

下册

清华大学
北京大学
《计算方法》编写组

科学出版社

内 容 简 介

本书介绍电子计算机上常用的数值方法，内容包括解线性代数方程组的直接法、迭代法、矩阵特征值问题及解常微分方程和偏微分方程的差分方法、有限元法．

本书可供计算数学专业师生阅读，工程技术人员也可参考．

计 算 方 法

下 册

清华大学
北京大学 《计算方法》编写组

*

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年 1月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1980年 1月第一次印刷 印张：6 3/8

印数： 43,330 字数：168,000

统一书号：13031・1146

本社书号：1603・13—1

定价： 0.65 元

目　　录

第八章　解线性代数方程组的直接法

第九章　解线性代数方程组的迭代法

第十章　矩阵特征值问题

第十一章　用差分方法解边值问题

第十二章　用差分方法解抛物型方程

第十三章　用差分方法解双曲型方程组

第十四章　有限单元法

第八章　解线性代数方程组的直接法

这一章叙述解线性代数方程组的直接法. 用矩阵和向量的记号,线性代数方程组可以简单地表示成

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}, \tag{8.1}$$

其中 A 为 $n\times n$ 的系数矩阵, $\boldsymbol{d}$ 为给定的 n 维向量, $\boldsymbol{x}$ 为所求的解向量,也是 n 维的.

所谓直接解法, 就是指在计算过程中所有的运算都是精确的前提下, 经过有限多次运算就可得到准确解的那一类解法. 另一类解法一般说来不具有上述特征, 称之为迭代方法, 是下一章介绍的主题.

大家知道, 如果 A 的行列式 $\det A\neq 0$, 则方程组 (8.1) 有唯一解,并且可用克来姆法则将解表示出来,即

$$x_j=\frac{D_j}{D},\ 1\leqslant j\leqslant n. \tag{8.2}$$

其中 x_j 为 $\boldsymbol{x}$ 的第 j 个分量, $D=\det A$, D_j 为用 $\boldsymbol{d}$ 代替 A 的第 j 列后所得矩阵的行列式. 今后总是假定 $D=\det A\neq 0$, 而不再提起.

(8.2) 虽然从理论上给出了解, 并且也确实可用它来计算, 然而运算量很大, 不是经济的计算方案. 下面叙述几种常用的直接法, 其计算量比直接用 (8.2) 要小得多.

由于在计算过程中往往不可能精确地进行运算, 而要引进或大或小的舍入误差,因此,直接法虽然就计算公式说来保证得出准确解, 但是实际上受舍入误差的影响使得所求出的解依然是不准确的,近似的. 下面对于误差也进行一些初步的分析.

§1. 消　去　法

在初等数学中曾经叙述过用消去法解二元或三元一次联立方

程组，这个消去法便是这里所要叙述的消去法，它对于更多个未知数仍然是适用的.

现在以三个未知数的方程组为例，叙述消去法的基本思想，从而由此可看出对于 n 个未知数的一般的有规律的计算公式.

给定方程组

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = d_1^{(1)}, \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = d_2^{(1)}, \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = d_3^{(1)}. \end{cases} \tag{8.3}$$

或用矩阵和向量的记号，写成

$$A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_1,$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_1 = \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \\ d_3^{(1)} \end{bmatrix}.$$

消去法的第一步是将 (8.3) 的后两个方程中的未知数 x_1 消去，为此，将 (8.3) 的第一个式子用 $-\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ 乘后加到第二个式子上去，其结果得到

$$\left(a_{22}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}a_{12}^{(1)}\right)x_2 + \left(a_{23}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}a_{13}^{(1)}\right)x_3 = d_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}d_1^{(1)},$$

或写成

$$a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = d_2^{(2)},$$

其中

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}a_{12}^{(1)},$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}a_{13}^{(1)},$$

$$d_2^{(2)} = d_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}d_1^{(1)}.$$

类似地，将 (8.3) 的第一个式子用 $-\dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ 乘后加到第三个式子上

去，得到

$$a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = d_3^{(2)},$$

其中

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{12}^{(1)},$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{13}^{(1)},$$

$$d_3^{(2)} = d_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} d_1^{(1)}.$$

总之，经过这一步骤，方程组化成

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = d_1^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = d_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = d_3^{(2)} \end{cases} \tag{8.3'}$$

或

$$A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_2,$$

其中

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_2 = \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix}.$$

下一步是将(8.3′)的后一个方程中的未知数 x_2 消去，为此，将(8.3′)的第二个式子用 $-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ 乘后加到第三个式子上去，得到

$$a_{33}^{(3)}x_3 = d_3^{(3)},$$

其中

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{23}^{(2)}, \quad d_3^{(3)} = d_3^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} d_2^{(2)}.$$

经过这一步骤，方程组又化成

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = d_1^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = d_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 = d_3^{(3)} \end{cases} \tag{8.3''}$$

或

$$A_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_3.$$

其中

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_3 = \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(3)} \end{bmatrix}.$$

显然，(8.3″) 很容易求解. 通常，将原方程组化成上述容易求解的方程组的全过程，叫做消去过程. 至于从形状如 (8.3″) 的容易求解的方程组得出解的过程，叫做回代过程. 对于 (8.3″)，这个回代过程便是：先从第三个方程算出

$$x_3 = \frac{d_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}.$$

然后代入到第二个方程中算出 x_2，再将 x_3 和 x_2 代入到第一个方程中算出 x_1.

消去法即如上述. 对于 n 个未知数说来，消去过程要 $n-1$ 个步骤，三个未知数时只有两步. 至于系数的计算公式，不难从三个未知数的情形看出规律.

现在，用矩阵的术语对消去法再进行一些说明. 可以直接验证

$$A_2 = L_1A_1, \quad \boldsymbol{d}_2 = L_1\boldsymbol{d}_1.$$

其中

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 \\ -\dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这就是说，从 (8.3) 得出 (8.3′)，不过是用 L_1 左乘

$$A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_1,$$

即

$$L_1A_1\boldsymbol{x} = L_1\boldsymbol{d}_1,$$

便得出

$$A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_2.$$

还可直接验证

$$A_3 = L_2A_2, \quad \boldsymbol{d}_3 = L_2\boldsymbol{d}_2,$$

其中

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix}.$$

这就是说，从 (8.3′) 得到 (8.3″)，不过是用 L_2 左乘

$$A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_2,$$

即

$$L_2A_2\boldsymbol{x} = L_2\boldsymbol{d}_2,$$

便得出

$$A_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_3.$$

由此可见，消去过程不过是用一些适当的矩阵左乘方程组；其次，用来左乘的适当的矩阵，如 L_1，和 L_2，都是下三角形矩阵，而最终所化成的容易求解的方程组，其系数矩阵，如 A_3，为上三角形矩阵. 这就是说，原系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可用一些下三角形矩阵左乘而成上三角形矩阵，即

$$L_2L_1A_1 = A_3. \tag{8.4}$$

注意到 L_1 和 L_2 的逆矩阵都存在，并且仍是下三角形矩阵，因此

$$A_1 = L_1^{-1}L_2^{-1}A_3.$$

由于下三角形矩阵之乘积还是下三角形矩阵，所以上式说明原系数矩阵 A_1，分解成下三角形矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与上三角形矩阵 $\boldsymbol{U}$ 之积，即

$$A_1 = LU.$$

其中

$$L = L_1^{-1}L_2^{-1}, \quad U = A_3.$$

总之，消去法实现了系数矩阵 A_1 的 LU 分解；同时，反过来也可以说，消去法正是建立在矩阵的 LU 分解这一理论结论之上，是它的具体实现的手段之一. 顺便提一下，许多直接法的基本思想也如此，往往建立在矩阵的这种或那种分解之上，同一种分解，由

于实现的手段不同，也就构成这种或那种计算方法. 今后将进一步看出这些来.

现在来分析舍入误差的影响. 同一个方程组，倘使将方程的次序调换一下，或者将未知数的次序调换一下，或者兼而有之，但是用消去法求解则不变，照理说，得到的结果应当是一样的，至少虽有舍入误差的影响也应是近似的. 然而长期采用消去法的经验表明，有时却不然，结果相差甚远. 这说明舍入误差的影响有时很严重. 请看下例.

$$\begin{cases}0.0003x_1+3.0000x_2=2.0001,\\1.0000x_1+1.0000x_2=1.0000,\end{cases}$$

它的准确解为 $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$.

用消去法将第二个方程中的 x_1 消去，得到

$$-9999x_2=-6666,$$

从而

$$x_2=\frac{6666}{9999}\approx 0.6667.$$

将 x_2 代入到第一个方程中，则有

$$0.0003x_1+3.0000\times 0.6667=2.0001,$$

从而

$$x_1=0.$$

这个计算结果与准确解相差就太悬殊了.

可是，将方程的次序调动一下，改成

$$\begin{cases}1.0000x_1+1.0000x_2=1.0000,\\0.0003x_1+3.0000x_2=2.0001.\end{cases}$$

这时用消去法将第二个方程中的 x_1 消去，得到

$$2.9997x_2=1.9998,$$

从而

$$x_2=\frac{1.9998}{2.9997}\approx 0.6667.$$

将 x_2 代入到第一个方程中，则有

$$1.0000x_1 + 1.0000 \times 0.6667 = 1.0000,$$

从而

$$x_1 = 0.3333.$$

这个计算结果与准确解相差就无几了.

由此可见，在计算过程中，压制舍入误差的影响，便成为运用消去法的一个重要课题. 解决这一课题至少有两个可供选择的方案. 其一，增加计算时数字的位数，例如，由四位数字增加成六位数字，即增加字长，这可使个别运算所产生的舍入误差就量而言大大压低，从而使得在最后结果中积累起来的误差也随着削弱，在原则上这是可能的，在实践上也确实如此，但是这有一个很大的缺陷，就是这样一来，计算时间往往要成倍地增加. 因此这一措施，一般只在万不得已的情形下，或者为了达到某种比较试验的目的时才采用.

另一种办法是在长期积累的经验基础上提出的，通常称之为主元素法. 在消去法中要进行少量的除法，除数便是 $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(2)}$ 等等这些数. 经验表明，一般说来，这些除数的绝对值越小，舍入误差也就越严重. 而选择绝对值尽可能大的数，作为 $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(2)}$ 等等又是完全可能的，因为只要将方程的次序和未知数的次序做必要的调动，就可达到此项目的. 选择的这些绝对值尽可能大的数叫做主元素. 主元素法便是以这一思想为依据进行消去过程.

下面以

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15, & (1) \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15, & (2) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 & (3) \end{cases}$$

为例说明. 其准确解为 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. 首先找出绝对值最大的系数，即主元素，这时为 -18. 将前两个方程的次序对调，方程组成为

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15, \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

消去后两个方程中的 x_1，得

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15, \\ \quad -x_2 + 2.333x_3 = 5.000, \\ 1.167x_2 + 0.944x_3 = 5.167. \end{cases}$$

这一步骤便是选择 -18 作为 $a_{11}^{(1)}$. 下一步在后两个方程中找出绝对值最大的系数，即主元素，这时为 2.333. 将未知数 x_2 和 x_3 的次序对调，方程组成为

$$\begin{cases} -18x_1 - x_3 + 3x_2 = -15, \\ \qquad 2.333x_3 - x_2 = 5.000, \\ \qquad 0.944x_3 + 1.167x_2 = 5.167. \end{cases}$$

消去后一个方程中的 x_3，得

$$\begin{cases} -18x_1 - x_3 + 3x_2 = -15, \\ \qquad 2.333x_3 - x_2 = 5.000, \\ \qquad\qquad 1.572x_2 = 3.144. \end{cases}$$

这一步骤便是选择 2.333 作为 $a_{22}^{(2)}$. 现在消去过程已告结束，方程组容易求解，得 $x_2 = 2.000$，$x_3 = 3.000$，$x_1 = 1.000$.

应当指出，方程次序的调动，未知数次序的调动，都不是必要的. 完全可以不调动，只要掌握住那些系数该消去的就消去，便成了. 差别在于，最后所得容易求解的方程组的系数矩阵，不必然是上三角形的. 例如计算可采用下述表格(见下页). 表内数字加有方框者为每步所选的主元素.

补充说几句. 倘使同时有几个系数的绝对值相同，则任择其一作为主元素. 其次，选择绝对值最大的系数也并非必要，只要绝对值比较大就可以了，这可减轻选择的工作.

消去法不仅可以用来解线性代数方程组，还可用来求逆矩阵和计算行列式的值，下面对此略加说明.

设有几个方程组，其系数矩阵相同，不同的只是右端项. 在用消去法一个一个方程组求解时，很容易发现，有大量的计算是共同的. 这一点在用矩阵向量的术语解释消去法时就更清楚，不同的只在于用 L_1，L_2 依次乘右端项和回代过程，而这步计算量在全部

系　　数			右端项	说　　明
x_1	x_2	x_3		
12	−3	3	15	(1)
$\boxed{-18}$	3	−1	−15	(2)
1	1	1	6	(3)
	−1.000	$\boxed{2.333}$	5.000	$(4)=(1)+\frac{12}{18}\times(2)$
−18	3	−1	−15	$(5)=(2)$
	1.167	0.944	5.167	$(6)=(3)+\frac{1}{18}\times(2)$
	−1.000	2.333	5.000	$(7)=(4)$
−18	3	−1	−15	$(8)=(5)$
	$\boxed{1.572}$		3.144	$(9)=(6)-\frac{0.944}{2.333}\times(4)$

计算量中只占很小的比重．由此可见，当系数矩阵相同只是右端项不同时，可以将这些方程组同时用消去法求解，共同的计算只进行一次，这样就可大大节省计算量．

用消去法求逆矩阵正好就是利用这一点．设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

令

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix},$$

由于 $AA^{-1}=I$，所以

$$A\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

从而求逆矩阵 A^{-1} 就化成求解几个系数矩阵相同，右端项为单位向量的方程组．

至于计算行列式 A 的值，仍设

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

由于(8.4)，

$$L_2 L_1 A = A_3,$$

从而

$$(\det L_1)(\det L_2)(\det A) = \det A_3.$$

注意到

$$\det L_1 = 1, \quad \det L_2 = 1,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{vmatrix} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} a_{33}^{(3)},$$

所以

$$\det A = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} a_{33}^{(3)}.$$

对于 $n \times n$ 的矩阵完全类似.

最后提一下消去法的计算量．求解 n 个未知数的线性代数方程组，乘除法的次数约为 $\frac{1}{3} n^3$，加减法的次数也如此.

§2. 豪斯浩德尔方法

在§1中曾经提到，用消去法解线性代数方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$，实际上是用一系列下三角形矩阵左乘方程两端，在保证方程组的解不变的同时，使得方程组的系数矩阵逐步化简，最终成为上三角形阵，从而达到容易求解这一目的.

所谓豪斯浩德尔(Householder)方法，则是用一系列正交阵代替消去法中的下三角形阵左乘方程的两端，以图达到同样的目的.

下面以

$$\begin{bmatrix} 3 & -\frac{14}{13} & -\frac{19}{13} \\ 4 & 0 & \frac{5}{13} \\ 12 & -\frac{3}{13} & -\frac{11}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{13} \\ \frac{57}{13} \\ \frac{142}{13} \end{bmatrix}$$

为例，叙述豪斯浩德尔方法的计算过程，将系数矩阵记成 A_1，右端项记成 $\boldsymbol{d}_1$. 用正交阵

$$P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

左乘方程的两端，得

$$P_1 A_1 \boldsymbol{x} = P_1 \boldsymbol{d}_1.$$

令

$$A_2 = P_1 A_1, \quad \boldsymbol{d}_2 = P_1 \boldsymbol{d}_1,$$

此时

$$A_2 = \begin{bmatrix} -13 & \frac{6}{13} & 1 \\ 0 & \frac{5}{13} & 1 \\ 0 & \frac{12}{13} & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{150}{13} \\ \frac{18}{13} \\ \frac{25}{13} \end{bmatrix}.$$

原来的方程组化成 $A_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_2$.

下一步用正交阵

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

左乘 $A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_2$ 的两端，得

$$P_2A_2\boldsymbol{x} = P_2\boldsymbol{d}_2,$$

令

$$A_3 = P_2A_2, \quad \boldsymbol{d}_3 = P_2\boldsymbol{d}_2,$$

此时

$$A_3 = \begin{bmatrix} -13 & \frac{6}{13} & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{17}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{13} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{150}{13} \\ -\frac{30}{13} \\ -\frac{7}{13} \end{bmatrix}.$$

方程组又化成 $A_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_3$. 这时容易求解了，得到 $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$. 至于 P_1 和 P_2 是怎样确定的，将在下面说明，它们是正交阵这一点可直接验证. 这个例子说明，用两个正交阵左乘就可达到简化方程组的目的，一般说来，对于 n 个未知数的方程组，要用 $n-1$个正交阵左乘，就可将方程组化成系数矩阵为上三角形阵的方程组.

现在来叙述如何确定正交阵. 以 $n = 4$ 为例，即方程组为

$$A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_1,$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{41}^{(1)} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{d}_1$ 为已知的四维向量. 令 A_1 的第一个列向量为 $\boldsymbol{a}_1$，即

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} \\ a_{41}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

首先确定 P_1. 选择 P_1 为一种特殊形式的正交阵.

令
$$P_1 = I - 2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1', \tag{8.5}$$