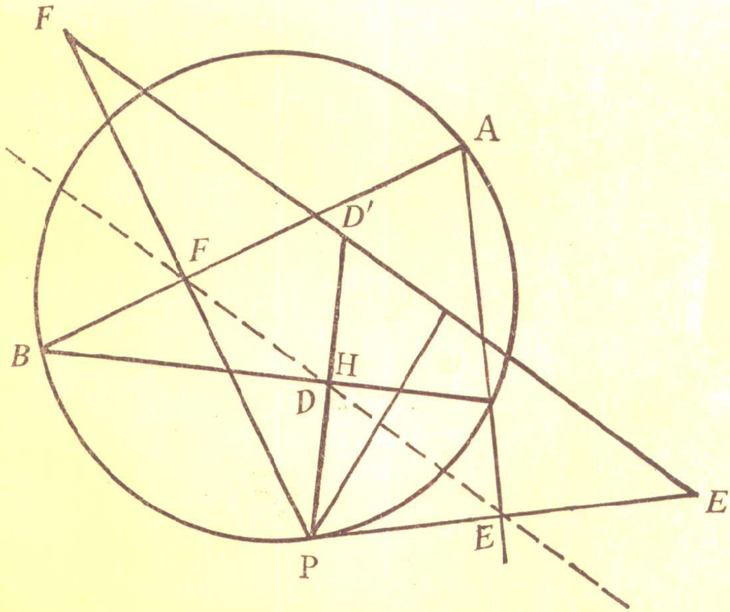
几何的有名定理

JIHE DE YOUMINDINGLI

矢野健太郎 著
陈永明 译



上海科学技术出版社

几何的有名定理

〔日〕 矢野健太郎 著

陈永明 译 陈光富 校

责任编辑 周玉刚

几何的有名定理
〔日〕矢野健太郎 著
陈永明 译 陈光富 校
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行 江苏泗阳印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 5.25 字数 112,000
1986 年 8 月第 1 版 1988 年 1 月第 2 次印刷
印数：9,701—17,700
ISBN 7-5323-0427-2 /O·2
定价：1.15元

内容提要

本书是日本共立出版株式会社出版的名为“数学点滴”的一套丛书中的一册，主要介绍了平面几何学中的著名定理。其中有古老的毕达哥拉斯定理(勾股定理)、泰利斯定理、托勒密定理、梅涅劳斯定理、塞瓦定理、西摩松定理，也有在本世纪前后发现的康托尔定理、莫利定理、清宫定理、爱可尔斯定理。内容丰富，叙述流畅，并常常引进复数证法，构思奇特，简洁明瞭，更给本书增添了新意。

本书可作中学数学教师的教学参考书，也可供初、高中学生课外阅读参考。

写在"数学点滴丛书"出版发行之际

数学，过去仅仅是立志研究某些专业的人们才需要学习的，而现在正成为几乎所有的人都必须学习的学科。

所以，为了适应各种人的需要，在从高中到大学的数学教材中，引入了许多古典数学和现代数学的内容，致使数学教材正在成为涉及面广，介绍概观的书籍。

在数学里，到处都存在着某些被称为"关键"的内容，只要深刻理解了这些关键内容，其他内容均可迎刃而解；反之，如果对这些关键内容马虎了事，其他内容则就变得难以理解，从而也就达不到学习数学的预期目的。

本书的宗旨，就是对从高中到大学的数学教材中被认为是至关紧要的部分，学生学习时会感到困难的部分，以及对理解整个数学知识有益的部分，请经验丰富的老师作详尽的解说。

现在，我们的想法已结出了果实。我们衷心祝愿这部"数学点滴丛书"能成为同学们及数学爱好者们的良朋益友，为进一步提高数学教学质量作出贡献。

编委　矢野健太郎

田島一郎

序

笔者曾在《数学论坛》杂志1974年11月号至1976年2月号上，以“几何的有名定理”为题发表了一系列文章，本书就是在此基础上加工而成的。

对这里所说的“几何”一词，有必要作些解释。过去的初中生，从二年级开始学习一种“通过在纸上画了图后，直接研究其图形性质”的几何学。在这种几何学里，有不少由历史上有名的数学家发现的定理，这些定理大大地激发了当时的初中生的学习积极性。至于“使用坐标和方程来研究图形性质”的解析几何学，则是进入高中以后才开始学习的。

我们把“通过在纸上画了图后，直接研究由直线和圆构成的图形的性质”的几何学叫初等几何学。本书所说的“几何”，就是这个意义上的几何。过去的初中生，对这种初等几何是相当感兴趣的。但现在的初中生，由于学制从五年缩为三年，当他们刚开始对几何产生兴趣的时候，几何课却被中止了，一进入高中，则另学解析几何学，这样，就没有余地去领略初等几何的妙趣所在了。

我希望这本书对现在的初、高中学生，以及广大的数学爱好者在探索几何的妙趣方面有所裨益。

对本书里涉及到的数学家，就力所能及作了些查考，并加注说明。其疏漏之处希望读者指教。

最后，当本书出版之际，对曾给予种种帮助的小山透先生

和福村比佐史先生致以衷心的感谢。

矢野健太郎

1981年8月

目　　录

第一章

毕达哥拉斯定理

引　　言

第二次世界大战结束以前，我国的教育制度规定：小学六年，初中五年，高中或专科学校三年（也有四年的），大学三年。并且在高中实行文理分科.

当时的初中学生，无论是将来准备攻读文科的，还是准备攻读理科的，所学习的代数和几何的内容完全相同。当年的初中生中，有不少人活跃在当今的文科论坛上，他们对数学未必擅长，而唯独对几何感兴趣的却大有人在。

当年的初中生所学习的代数和几何知识，现在有一部分仍在初中里教，有一部分被移到高中。代数姑且不论，就几何来说，与过去相比，变得简单多了。现在，初中里只讲授几何初步知识，而几何的精彩部分，在高中里却又几乎不教。笔者认为，要领略过去初中学生所喜欢的那种几何妙趣，必须将现今初中的几何内容再加深一些。

在本书里，举出了大量几何中的有名定理，只要具有现行初中的几何基础，就可以从中充分地领略几何的妙趣。

首先，从最有名的毕达哥拉斯定理*开始谈起。

* 毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前572年～492年) 希腊数学家、哲学家．发现了著名的毕达哥拉斯定理，此外还通晓数论、音乐和天文．
译者注：毕达哥拉斯定理就是我国的勾股定理．

§1.1 毕达哥拉斯定理

毕达哥拉斯定理 在直角三角形中，直角边上所画的正方形面积的和，等于直角的对边，即斜边上所画的正方形面积，即如果设直角三角形的两条直角边的长分别为 a，b，斜边长为 c. 则

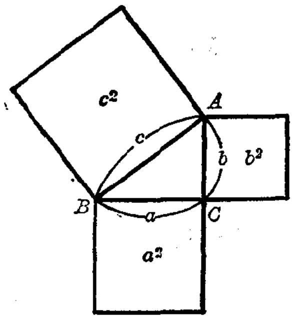


图 1

$$a^2+b^2=c^2. \quad (图\ 1)$$

(i) 对于这个定理，毕达哥拉斯是怎样证明的？可惜没有流传下来。现在的中学教科书里，几乎都采用下面的证明，这可能是毕达哥拉斯本人的证明。

首先，画边长为 $a+b$ 的正方形，如果把它象图 2 那样切开，得到一个边长为 a 的正方形，一个边长为 b 的正方形，以及四个和原直角三角形 ABC 全等的三角形。

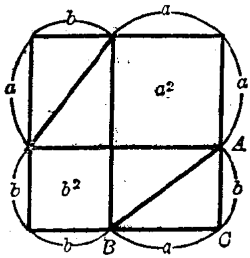


图 2

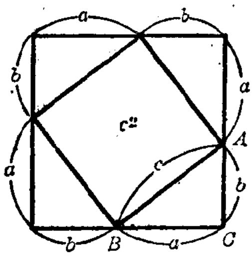


图 3

接着，如果把边长为 $a+b$ 的正方形象图 3 那样切开，得到一个以斜边 c 为边长的正方形，以及四个和原直角三角形 ABC 全等的三角形。因此，从面积相等的图 2 和图 3 中，分

别减去四个原直角三角形 ABC 的面积，就可得

$$a^2+b^2=c^2.$$

§1.2 欧几里德的证明

(ii) 笔者在中学时代，曾学习过毕达哥拉斯定理的如下的一种证法。后来知道，这就是欧几里德*所给出的证法。

首先，如图 4，设 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle C$ 为直角。在 $\triangle ABC$ 的形外，以直角边 BC 为一边作正方形 $BCDE$，以另一条直角边 AC 为一边作正方形 $ACFG$，以斜边 AB 为一边作正方形 $ABJK$，由 C 向斜边 AB 引垂线，与 AB 交于 H，与 KJ 交于 I。

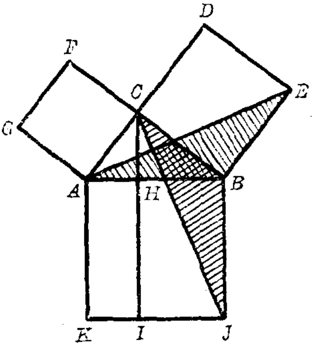


图 4

现在，连结 AE，把正方形 $BCDE$ 和 $\triangle BAE$ 作一比较，因为 BE 为公共底边，它们的高又相等，因此

$$S_{\square BCDE}=2S_{\triangle BAE}.$$

以 B 为中心，把 $\triangle BAE$ 旋转 $90°$，使 BA 与 BJ 重合，BE 与 BC 重合，于是 $\triangle BAE$ 与 $\triangle BJC$ 重合，所以

$$\triangle BAE \cong \triangle BJC.$$

如果把 $\triangle BJC$ 与长方形 $BJIH$ 作一比较，因为 BJ 为公共底边，它们的高又相等，因此

$$2S_{\triangle BJC}=S_{长方形BJIH}.$$

---

* 欧几里德 (Euclid，约公元前 330～275 年) 希腊数学家，是编著《几何原本》十三卷的几何学的鼻祖。

从上述三个式子可知

$$S_{\square BCDE}=S_{\text{长方形}BJIH}.$$

同理，有

$$S_{\square ACFG}=S_{\text{长方形}AKIH}.$$

把这两个式子相加，得

$$S_{\square BCDE}+S_{\square ACFG}=S_{\square ABIK}.$$

即

$$a^2+b^2=c^2.$$

毕达哥拉斯定理得证。

在上述证明中出现过的式子

$$S_{\square BCDE}=S_{\text{长方形}BJIH},$$

也可以写成 $BC^2=BH\cdot BJ$，因为 $BJ=BA$，所以它又可写成 $BC^2=BH\cdot BA$。

还有，

$$S_{\square ACFG}=S_{\text{长方形}AKIH}$$

也可以写成 $AC^2=AH\cdot AK$，因为 $AK=AB$，所以又可写成 $AC^2=AH\cdot AB$。

这两个事实被叫做欧几里德定理。即

欧几里德定理 设 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle C$ 为直角。从 C 向斜边 AB 引垂线，垂足为 H。则

$$BC^2=BH\cdot BA,\ AC^2=AH\cdot AB.$$

§1.3 欧几里德定理之别证

(iii) 欧几里德定理也可以用相似三角形的理论进行证明。在图5里的 $\triangle BCH$ 和 $\triangle BAC$ 中，$\angle B$ 为公共角，另有一角为直角，所以它们相似，从而

$$\frac{BC}{BA}=\frac{BH}{BC},$$

即

$$BC^2=BH\cdot BA.$$

同理，在 $\triangle ACH$ 和 $\triangle ABC$ 中，也有一个角 A 是公共角，另有一角为直角，所以它们也相似，从而

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AH}{AC},$$

即

$$AC^2=AH\cdot AB.$$

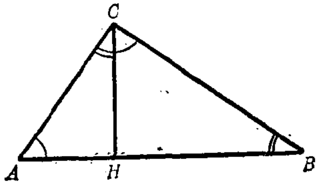


图 5

如果用这种方式来证明欧几里德定理，我们把所得的两个式子相加，得

$$\begin{aligned}BC^2+AC^2&=BH\cdot BA+AH\cdot AB\\&=(BH+AH)\cdot AB\\&=AB^2,\end{aligned}$$

即

$$a^2+b^2=c^2.$$

毕达哥拉斯定理得证。

(iv) 在中学时代学习毕达哥拉斯的欧几里德的证法(ii)时，感到它十分巧妙，但是，如果再进一步思考一下，可以发现，用 BE 边上的正方形和平行四边形来代替 BE 边上的正方形和三角形也是可行的。

首先，如图 6，过 E 点引 BA 的平行线，与 AD 交于 L，通过 J 引 BC 的平行线，与 CI 交于 M。这时，正方形 $BCDE$ 和 $\square BALE$ 有公共底边 BE，而且它们的高相等，所以它们的面积相等。即

$$S_{\square BCDE}=S_{\square BALE}.$$

现在，把 ▱$BALE$ 绕 B 点旋转 $90°$，它重合于 ▱$BJMC$。从而有

$$S_{\square BALE}=S_{\square BJMC}.$$

另外，▱$BJMC$ 和长方形$BJIH$有公共底边BJ，而且它们的高相等，所以它们的面积相等。

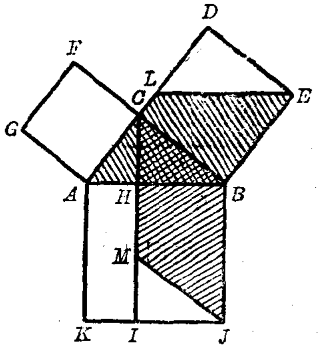


图 6

即 $S_{\square BJMC}=S_{长方形BJIH}$.

由以上三式，得

$S_{\square BCDE}=S_{长方形BJIH}$.

同理，得

$S_{\square ACFG}=S_{长方形AKIH}$.

将这两个式子相加，有

$S_{\square BCDE}+S_{\square ACFG}=S_{\square ABJK}$,

毕达哥拉斯定理得证。

(v) 在(iv)的证明里，利用了下面的事实：把正方形 $BCDE$ 的一边 BE 固定，把 BE 的对边 CD 沿着所在直线移动到 AL 的位置，则正方形 $BCDE$ 的面积和 ▱$BALE$ 的面积相等。

相应地，也可采用下列做法：把正方形 $BCDE$ 的另一边BC 固定，把 BC 的对边 DE 沿着所在直线移动，作出一个和正方形 $BCDE$ 面积相等的平行四边形。

为此，首先作 GF 的延长线和 ED 的延长线，两线交于 P(图7)。显然 P 点在 IHC 的延长线上，且 $CP=AB$。

接着，延长 JB，设与 EP 交

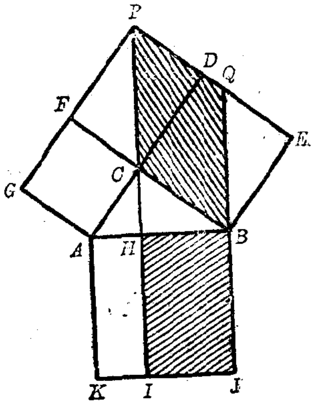


图 7

于 Q，可知 $BQ=AB$。

而如果把正方形 $BCDE$ 与 $\square BCPQ$ 作比较，它们有公共边 BC，而且 BC 上的高相等，因此，它们的面积相等，即

$$S_{\square BCDE}=S_{\square BCPQ}$$

再接下来，如果将 $\square BCPQ$ 与长方形 $BJIH$ 作一比较，因 $QB=BJ$，且高相等，因此它们的面积相等，即

$$S_{\square BCPQ}=S_{长方形BJIH},$$

于是

$$S_{\square BCDE}=S_{长方形BJIH}.$$

同理，得

$$S_{\square ACFG}=S_{长方形AHIK}.$$

将上述两式加起来，有

$$S_{\square BCDE}+S_{\square ACFG}=S_{\square ABJK}.$$

毕达哥拉斯定理得证。

§1.4 跋斯迦罗*的证明

(vi) 以上的证法(iii)、(iv)、(v)都是欧几里德证法(ii)的变形，印度的数学家跋斯迦罗对毕达哥拉斯定理给出了如下的证明。

这的确是一个奇妙的证明，让我们画图 8 和图 9 之后，然后一起看下去吧！

图 8 里的四个直角三角形和一个正方形构成了一个大的正方形。

现在，把其中一个直角三角形命名为 ABC(图 10)，并设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=C$。中间一个正方形的边长是 $a-b$，大

* 跋斯迦罗(Bhâskara II，1114 年～1185 年) 身为国王的印度数学家．他发现了平方根的正负，以及二次方程有两个根等．