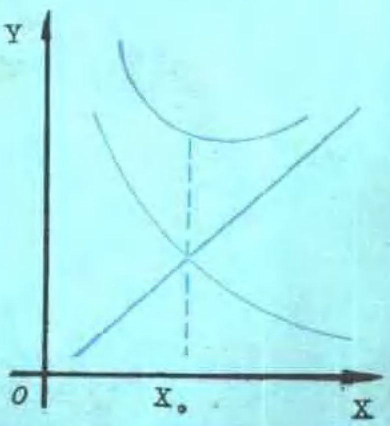
●财经类●

上海财经大学
高等数学教研室编

高等数学

GAO DENG
SHU XUE



海科学技术文献出版社

高 等 数 学

（财 经 类）

上海财经大学经济信息管理系
《高等数学》教研室编

上海科学技术文献出版社

高 等 数 学

（财 经 类）

上海财经大学经济信息管理系

《高 等 数 学》教 研 室 编

*

上海科学技术文献出版社出版发行

（上海市武康路 2 号）

新 华 书 店 经 销

昆 山 亭 林 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 13.5　字数 332,000

1988 年 9 月第 1 版　1988 年 9 月第 1 次印刷

印 数：1—9,300

ISBN 7-80513-278-X/O·23

定 价：4.20 元

《科技新书目》179-259

前言

为适应我校各财经专业高等数学课程教学的需要，我室于1981年由陈和本、肖福铨、贝时春和凌明娟四位同志编写了《高等数学》教材，在本校和夜大学内经过四年教学实践，现在，我们根据试用的情况，在原有的基础上加以修改、补充. 在本书编写过程中，我们参考了国内有关高等数学教材，并参考了一些西方经济学和数量经济学的有关内容，力求深入浅出地介绍从事经济管理和经济理论研究所需要的微积分基础知识及其经济应用实例. 本书可作为财经院校及经济管理类学生高等数学课程的试用教材或教学参考书，也可作为夜大学、函授大学、干部专修班的教材和自学用书.

因本科、专修科和成人教育的学时不一致，要求也不同，书中有些内容加注了"*"号，可以根据情况适当选用.

为了帮助学生加深理解有关概念，我们试编了一批选择题，附在书末，供学习参考.

参加这次教材编写和修改的成员是：

贝时春(第一章)；

朱快蕾(第二、三章)；

凌明娟(第四、五章和附录)；

吴宏建(第六章)；

王雅芬(第七章)；

赵可培(第八章).

最后由赵可培、凌明娟两位同志负责修改定稿.

肖福铨、裘汉宗和陈慧玉等同志曾阅读过部分原稿并提出不少意见和建议。

陈和本同志为本教材搜集、编写并提供了许多经济应用实例。

由于编写水平有限，教材中的缺点和错误在所难免，希望能得到读者的批评指正。

高等数学教研室

1987年12月

目　录

第一章 函数与极限

初等数学是研究常量的数学，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学．变量之间的依赖关系以及变量的变化趋势是高等数学首先要讨论的对象，它构成了本章中函数与极限两部分的内容．

第一节 函 数

一、函数概念及其表示法

一切客观事物本来是互相联系和具有内部规律的．在周围世界中的任何一种现象或任何一个经济活动中的量都是互相联系、互相制约着的；因而其中一些量的变化必然引起另一些量的变化．这反映在数量上，即是变量之间的依赖关系，也就是数学上要讨论的函数关系，科学研究的任务就是揭示变量之间的联系和规律．在给出函数的确切定义之前，先看几个例子．

例 1 考察某商店电视机的销售情况．设电视机的单价为 k 元/台，则电视机销售量 x 台和销售额 y 元都是变量．这两个变量之间的依赖关系，显然可用下式表示：

$$y=kx$$

例 2 某地区腊肉价格 x 元/斤与销售量 y 万斤的统计数据为：

x (元/斤)	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
y (万斤)	6.01	5.98	5.32	5.24	4.76	3.95	3.52	3.37	2.95	2.[illegible]

它反映了销售量对价格的依赖关系.

例 3 企业在生产某种新产品时必须同时考虑到该产品的产量,生产成本和销售收益. 金额与产量都是变量,它们之间的关系可用图 1-1 来表示.

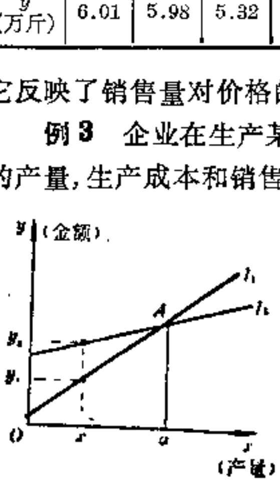


图 1-1

两条斜线 l_1, l_2 分别代表销售收益曲线和生产成本曲线, x 轴表示产量, y 轴表示金额. 则对于一定产量 x 必有唯一确定的销售收益 y_1 和生产成本 y_2 与它对应. l_1 与 l_2 的交点 A 称为盈亏平衡点, 只有产品的产量 x 超过点 A 的横坐标 a 时企业才能盈利.

我们还可以举出其他变量之间依赖关系的例子, 这些例子所包含的具体意义虽然各不相同,但都具有相同的本质,即在某一经济活动中的变量是互相联系的, 且当其中一个变量在某范围内取某一数值时, 另一变量按一定的规律总有确定的值与它对应. 这种变量之间的依赖关系,用数学语言来概括,就是以下给出的函数关系.

1. 函数概念

定义 设有两个变量 x、y, 若对于变量 x 在某范围 D 中任取一数值时, 变量 y 按一定的对应规律都有一个确定数值与它对应, 则称变量 y 为确定在 D 上的 x 的函数. 记作 $y=f(x)$, 变量 x 称为自变量, 自变量 x 的取值范围 D 称为函数的

定义域．变量 y 也称为因变量．

从函数的定义中不难看出；变量 x 和 y 之间的关系是由两个因素决定的，即函数的定义域和函数的对应规律．

函数定义中只要求每一个 x 值对应着一个确定的 y 值，并不要求一个确定的 y 值只对应一个 x 值，因此所有 x 值都对应于一个 y 值也是允许的，这个函数就是常数函数 $y=C$（常数）．

函数的定义域一般由函数关系中所反映事物的实际意义来确定的．例 1 中的电视机销售量 x 不能为负数而且应该是不超过库存量 M 的整数，所以它的定义域应是满足不等式 $0\leqslant x\leqslant M$ 的全体整数．在数学中，有时抽象地研究函数关系，我们约定函数定义域是由使函数式本身的式子在实数范围内有运算意义的所有自变量 x 的数值所组成．例如函数

$$y=\frac{2x}{x^2-5x+6}+\lg(x-1)$$

函数的定义域为：$x>1$ 并且 $x\neq2$ 和 $x\neq3$ 的一切实数．

为了表示函数的定义域，通常用"区间"这一术语来说明．什么是区间呢？设 a、b 为两个实数，且 $a<b$，

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x，称为以 a，b 为端点的开区间．记作 (a, b)，见图 1-2．

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 称为以 a，b 为端点的闭区间．记作 $[a, b]$，见图 1-3．

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 称为

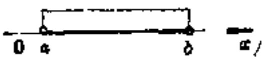


图 1-2

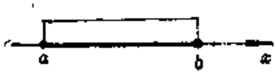


图 1-3

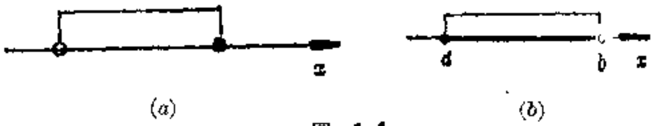


图 1-4

以 a, b 为端点的半开半闭区间. 记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$. 见图 1-4.

除了上述那些有限区间外，还有无限区间. 我们规定下列符号的意义：

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数；

$(a, +\infty)$ 或 $[a, +\infty)$ 表示大于 a 或大于等于 a 的实数全体；

$(-\infty, b)$ 或 $(-\infty, b]$ 表示小于 b 或小于等于 b 的实数全体.

以后，我们还要用到与区间有关的邻域的概念.

设 a、δ 为两个实数，且 $\delta>0$，我们把满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域. a 是邻域的中心，δ 是邻域的半径. 上述不等式与不等式

$$a-\delta<x<a+\delta$$

等价. 所以点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心，δ 为半径的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$（图 1-5）.

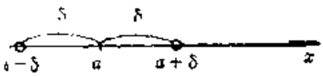


图 1-5

2. 函数的表示法

函数的定义中只讲了变量之间对应关系的存在性，而并未指明这种关系以何种形式给出，换句话说，记号 $y=f(x)$ 中的对应规律 f 既可以是由一条曲线所确定的那种对应关系，

也可以用公式或表格形式来确定那种对应关系，所以函数的表示法通常有三种形式，即公式法、表格法、图示法，以上的三个例子就是函数表示法的三种形式，除此而外，常用语言反映一个函数关系称为函数的叙述表示法.

例 4 y 是不超过 x 的最大整数. 它同样给出了一个函数，记作 $y=[x]$. 其定义域为一切实数，有

$$y=\left[4\frac{1}{2}\right]=4 \qquad y=[11]=11$$

$$y=[-5.2]=-6 \qquad y=[-7]=-7$$

$$y=[-\pi]=-4$$

等等(图 1-6).

另外对于用公式法表示函数时，有时会遇到这样的函数，对于其定义域内不同的 x 值，不能用一个统一的公式表示，而要用二个或二个以上的公式来表示，这种函数称为“分段函数”.

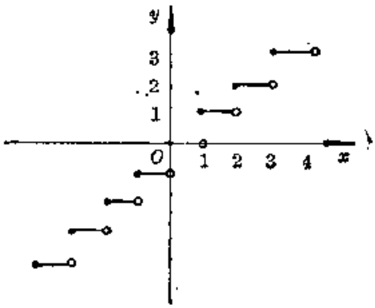


图 1-6

例 5 某轮船公司规定：在 A、B 两港之间，旅客托运行李的运价在 50 公斤以内，每公斤 k 元，超过 50 公斤，超过部分每公斤行李的运价增加 $\frac{4}{5}k$ 元. 写出运价 y 与行李重量 x 之间的函数关系，即为：

$$y=\begin{cases} kx & 0\leqslant x\leqslant 50 \\ 50k+\dfrac{9}{5}k(x-50) & x>50 \end{cases}$$

它是定义域为$x\in[0, +\infty)$的一个函数. 当$x=30$（公斤），$y=30k$（元）；当$x=100$（公斤），$y=140k$（元）。

例 6 设
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ 2x & x>0 \end{cases}$$
则其定义域为：$(-\infty, +\infty)$（图 1-7）.

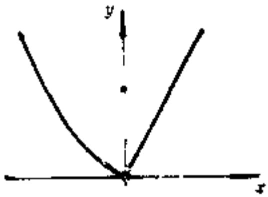


图 1-7

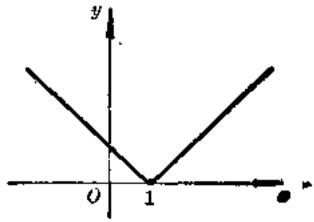


图 1-8

例 7 设
$$y=|x-1|=\begin{cases} x-1 & x\geqslant 1 \\ 1-x & x<1 \end{cases}$$
定义域为$(-\infty, +\infty)$（图 1-8）.

当自变量x取某一定值x_0时，对应函数值y_0，记作$y_0=f(x_0)$或$y|_{x=x_0}=y_0$.

例 8 设$y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$，求$f(0)$，$f(-1)$，$y|_{x=\frac{1}{a}}$.

解 $f(0)=\sqrt{4-0}=2$；$f(-1)=\sqrt{4-(-1)^2}=\sqrt{3}$，
$$y|_{x=\frac{1}{a}}=\sqrt{4-\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{1}{|a|}\sqrt{4a^2-1}.$$

例 9 设$f(x)=e^x$，求证：$f(a+b)=f(a)f(b)$.

解 $f(a+b)=e^{a+b}$，而$f(a)f(b)=e^a\cdot e^b=e^{a+b}$，所以
$$f(a+b)=f(a)f(b).$$

例 10 设$f(x)=x^2+3$，$\phi(x)=\sin x$，求$f[\phi(x)]$，$\phi[f(x)]$，$f[f(x)]$，$\phi[\phi(x)]$.