二次泛函的极小问题

С. Г. 米赫林

科学出版社

二次泛函的极小问题

C. Γ. 米赫林 著

王 維 新譯

科 學 出 版 社

С. Г. МИХЛИН

ПРОБЛЕМА МИНИМУМА
КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Государственное издательство
тихнико-теоретической литературы
1952

內 容 簡 介

本书共分四章，主要講述希尔伯特空間中二次泛函的极小問題的提出和解法，然后把一般研究的結果应用到椭圓型方程（多半是二阶）及弹性理論方程中去．书里所論及的問題多半是作者自己在有关范围內所研究的問題，但为了尽可能完滿地說明問題，作者也介紹了对变分方法具有重要意义的 С. Л. 索伯列夫的工作，以及其他苏联数学家——М. И. 維希克和 Д. М. 埃杜斯的工作．

本书可供有关科学研究工作者，研究生及綜合大学数学系高年級学生参考之用．

二次泛函的极小問題

С. Г. 米赫林 著
王 維 新譯

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街 117 号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1964年 6 月第一版　书号：2889　字数：144 000
1964年 6 月第一次印刷　开本：850×1168 1/32
（京）0001—5,400　印张：5 9/16

定价：[科七] 0.95 元

序　言

本书講述希尔伯特空間中二次泛函的极小問題的提出与解法；然后把一般研究的結果应用到椭圓型方程（多半是二阶的）及弹性理論方程的积分上去．我所論及的問題多半是自己在某种程度上研究过的問題；但为了尽可能完满的說明所提出的問題，就迫使我拨出足够的篇幅給指出其他一些作者的工作．这首先要提到对于变分方法的应用具有重要意义的 С. Л. 索伯列夫的工作以及較年輕的苏联数学家 М. И. 維希克及 Д. М. 埃杜斯的工作．

本书的內容由目录中可以一目了然，因此这里不需再講了．对本书讀者要求具有希尔伯特空間算子理論的基本知識，其范围例如，Н. И. 阿赫叶泽尔及 И. М. 格拉兹曼的"綫性算子理論"一书中的一至四章，或 В. И. 斯米尔諾夫的"高等数学教程"第五卷第四章，但其中講解算子的譜理論的那几节应除外，因为除了个别地方要用到正算子的平方根外[1)]，我一概不利用算子的譜理論．这样的地方是不多的，因此讀者将它略去也不致影响对全书基本內容的理解．

我在自己的专著[4]中所講的变分方法适用于技术上的要求，因此在那里有很多理論上的問題未加說明，这类問題有如，与变分問題的解在何种程度上满足于相应微分方程的問題有密切关系的、数学物理算子开拓的特征問題，关于变分方法对于确定算子的譜的适用性問題以及許多其他問題．对所有这些問題，我企图在本书中都給以尽可能完满的說明．在研究数学物理算子开拓的特征問題时，我主要是利用自己过去一向所建立的多維奇异积分理論．

---

1) 不用譜理論来建立正算子的平方根，在不久前出版的 Л. А. 刘斯鉄尔尼克及 В. И. 索伯列夫所著的一书"泛函数分析概要"中曾引出．

本书的部分材料在我的論文[5]中有簡要的叙述.

З. Я. 沙皮罗及 И. М. 盖尔凡德曾閲讀了全书的原稿，且提供了一系列十分宝貴的意見. 借此机会，謹向他們致以衷心的感謝.

С. Г. 米赫林

1951年9月

目　录

第一章　变分問題的提出及解法

§1. 引　　言

泛函的极小問題在很多情形下都可归結为伴有相应边值条件的微分方程或微分方程組的积分問題. 如所周知，这是古典变分学中的基本情况.

同样的，伴有給定的边值条件的微分方程（或微分方程組）的积分問題，在某些情形下也可归結为寻求某泛函的极小問題. 大家知道，黎曼就曾企图用这一观念来証明狄里克萊問題的解的存在；在黎慈指出解变分問題的直接法以后，人們对这观念的兴趣就特别增強了.

如果給定的微分方程是綫性的，那末对应于它的泛函是二次的. 由此显見，数学物理中的綫性問題自然归結为二次泛函的极小問題. 这个問題在对应的希尔伯特空間中将得到最全面而且最簡单的提出与研究. 本书第一章就是講述复希尔伯特空間中的二次泛函的极小問題.

由变分問題轉到微分方程的积分問題会遇到一个重大的困难，我們以例子說明这一点；为簡单起見，我們認为問題中所涉及的一切函数都是实的.

在平面(x, y)的某一有限区域Ω內，求波阿松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x, y) \tag{1}$$

的解，使得它在区域Ω的边界S上满足

$$u|_S=0. \tag{2}$$

如所周知，这样的問題可归結为在同一边值条件下积分

$$\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2f(x, y)u\right]dxdy \tag{3}$$

的极小問題；只要注意到泛函(3)的欧拉方程与方程(1)一致，就容易相信这一点了．在着手解积分(3)的极小問題之前，我們首先应明确一个极为重要的問題，即在怎样的函数类中寻求这个极小．为了使我們的泛函在函数类中达到它的下确界，这个函数类应当足够广．这样一来，我們面临的問題首先是泛函的这样开拓的問題，使得在这开拓之下，泛函达到它的下确界．在第一章中对于十分重要的函数类，我們借助于引进新的希尔伯特空間来实現这种开拓，这个新的希尔伯特空間与原先的空間以及与寻求其极小的泛函均以某种方式相联系（参看§3）．在泛函适当开拓以后，“极小”元的存在性被証明了，且对它的作法可以指出一些十分有效的方法来，剩下还要解决一个重要問題：在怎样的情形下，所求出的“极小”元满足微分方程及問題中的边值条件．事实上，例如，求解方程(1)——这意味着，首先要寻求具有二阶导数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的函数．但是，积分(3)并不包含未知函数的二阶导数；譬如說，只要 $u(x, y)$ 在閉区域 $\Omega+S$ 上連續可微，它就有意义了，并且显然，对于积分(3)的存在，这个条件决不是必要的．自然，开拓了的泛函(3)对于有些不具有二阶导数的函数也是有意义的．但此时，使我們的泛函取极小的函数是否有二阶导数，事前是不知道的，所以解决所指出的函数是否满足微分方程(1)的問題，需要专門研究．我們指出，类似的問題在所謂“变分学的最簡問題”中也会出現，但是根据著名的德-布-雷孟輔助定理，它是容易解决的；在多个自变量的情形这問題就困难得多了．

以后我們会看到，开拓了的泛函的定义域也包含这样一些函数，这些函数在满足的通常意义下，不满足給定的边值条件；所以也必須弄清楚，在怎样的情形下，“极小”函数满足边值条件．

在第一章里，我們研究一般形式的二次泛函的极小問題；而在第三章及第四章里講述这个問題对于椭圓型方程及弹性理論方程的具体化；第二章包括一些必要的輔助知識，但是它們也有独立的意义．

現在我們来簡单説明本书所采用的某些术語. 因为在算子理論的术語中存在一定的差别，所以这是更为必要的. 我們用术語"綫性集"来代替較为冗长的"綫性流形". 我們总設希尔伯特空間是复的. 对于所說到的算子，如果沒有預先說明，总設它是綫性的. 其次，当算子为其共軛算子的部分时，我們就称它为对称算子，而当与其共軛算子重合时，我們就称它为自共軛算子.

我們用通常的方式来定义双綫性泛函；如果 $\Phi(u, v)$ 是这样的泛函，那末我們就把 $\Phi(u, u)$ 叫做齐次二次泛函且記之为 $\Phi(u)$. 如果 u, v 是希尔伯特空間的元素，而 a, b 是复数，那末，显然
$\Phi(au + bv) = |a|^2\Phi(u) + a\bar{b}\Phi(u, v) + \bar{a}b\Phi(u,v) + |b|^2\Phi(v)$.
同时我們把形如

$$\Phi(u) + l_1u + \overline{l_2u} + C$$

的任一泛函叫做二次泛函，其中 $\Phi(u)$ 是齐次二次泛函，l_1u 及 l_2u 是綫性泛函，C 是常数.

§2. 基本变分問題

設算子 A 定义在希尔伯特空間中的稠密集上，如果对于其定义域中的任何异于零的元素，不等式 $(Au, u) > 0$ 成立，那末 A 叫做正算子；如果对于其定义域中任何元素有更強的不等式

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2$$

成立，这里 γ 是正的常数，那末 A 叫做正定算子. 显然，任一正算子都是对称的.

如果算子 A 是正的，那末方程

$$Au = f \tag{1}$$

至多有一个解. 事实上，如果 $Au_1 = Au_2 = f$，那末 $A(u_1 - u_2) = 0$；由此得 $(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0$，从而 $u_1 - u_2 = 0$.

定理 1. 設 A 是正算子，如果方程(1)有解，那末这个解必使泛函

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u) \tag{2}$$

取最小值. 反之，使泛函(2)取极小值的元素必满足方程(1).

显然

$$F(u)=(Au,u)-2\mathrm{Re}(f,u);$$

因为 A 是正算子,所以 $F(u)$只取实値, $F(u)$的极小間題有意义.

設 u_0 滿足方程(1), 于是

$$Au_0=f.$$

我們有

$$F(u)=(Au,u)-(u,Au_0)-(Au_0,u).$$

由于算子 A 是对称的,所以$(u,Au_0)=(Au,u_0)$,且

$$F(u)=(Au,u)-(Au,u_0)-(Au_0,u)=$$
$$=(A(u-u_0),u-u_0)-(Au_0,u_0).$$

由此看出,当 $u=u_0$ 时 $F(u)$ 达到极小値;我們还可指出

$$\min F(u)=-(Au_0,u_0)=-(f,u_0)=-(u_0,f).$$

反之,設 u_0 使泛函 $F(u)$ 取极小値;其次,設 η 是算子 A 的定义域 D_A 中的任意元素且 t 是任意实数,于是 $F(u_0+t\eta)$ 是 t 的函数,当 $t=0$ 时,它取极小値,因此

$$\frac{d}{dt}F(u_0+t\eta)\big|_{t=0}=0.$$

容易把上面的等式化为下形:

$$\mathrm{Re}(Au_0-f,\eta)=0.$$

若用 $i\eta$ 代替这里的 η, 便得

$$\mathrm{Im}(Au_0-f,\eta)=0,$$

从而

$$(Au_0-f,\eta)=0.$$

元素 Au_0-f 与稠密集 D_A 的所有元素都正交, 因此它等于零,亦即 u_0 滿足方程(1). 定理証毕.

我們把型(2)的泛函的极小間題叫做**基本变分間題**.

为了用例子来說明,我們研究在平面 (x,y) 的某一有限区域 Ω 內方程

$$-\Delta u=-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=f(x,y) \tag{3}$$

的积分間題;設这方程伴有边値条件

$$u|_S=0, \tag{4}$$

这里 S 是区域 Ω 的边界. 为简单起見，設函数 $f(x,y)$ 在閉区域 $\Omega+S$ 上是連續的.

我們取 Ω 上平方可和函数的空間 $L_2(\Omega)$ 作为希尔伯特空間 H. 注意，在这个空間中，內积及范数分别由下式定义:

$$(u,\ v)=\iint_\Omega u(x,\ y)\overline{v(x,\ y)}dxdy;\ \|u\|^2=\iint_\Omega |u^2(x,\ y)|\,dxdy.$$

在 $L_2(\Omega)$ 中我們考虑在 $\Omega+S$ 上二次連續可微且在 S 上等于零的函数的集合；并把它記为 M. 可以証明，M 在 $L_2(\Omega)$ 中稠密——这至少可由 §16 的結果推出(参看下面). 若取 M 作为拉普拉斯算子 Δ 的定义域，則算子 $-\Delta$ 将是正的. 事实上，我們有

$$(-\Delta u,\ u)=-\iint_\Omega \bar{u}\Delta u dxdy.$$

依格林公式

$$-\iint_\Omega \bar{u}\Delta u dxdy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy-\int_S\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}dS=$$
$$=\iint_\Omega\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)dxdy+\int_S\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}dS,$$

这里 ν 是 S 的外法綫，而 dS 表示弧的微分. 由于边值条件(4)围道积分消去了，因此我們得

$$(-\Delta u,\ u)=\iint_\Omega\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)dxdy. \tag{5}$$

由此推出，$(-\Delta u,u)\geqslant 0$. 其次，如果 $(-\Delta u,u)=0$，那末由(5)推出，$u(x,\ y)$ 的导数为零，因此 $u(x,\ y)$ 是常数. 但在 S 上它等于零[条件(4)!]，所以 $u(x,\ y)$ 恆等于零. 如此，我們已証明了，只要 $u(x,\ y)\in M$ 及 $u(x,\ y)\neq 0$，就必有 $(-\Delta u,\ u)>0$，亦即算子 $-\Delta$ 在集合 M 上是正的. 由定理 1 推出，寻求滿足方程(3)及条件(4)且在 $\Omega+S$ 上二次連續可微的函数的問題等价于在集合 M 的元素中寻求使泛函

$$(-\Delta u,u)-(u,f)-(f,u)=$$
$$=\iint_\Omega\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2-2\mathrm{Re}(uf)\right\}dxdy \tag{6}$$

取极小値的函数的問題．这样的函数是否存在——这問題暂时留作悬案，而到第三章我們对較一般形式的問題来解决它．

§3. 基本变分問題的解．正定算子的情形

在这一节，我們将在算子为正定的假定下給出基本变分問題的解．

我們在这里所引进的这个問題的解，在我的論文[1]及[5]中已給出过了；讀者也可参看[4]．

設算子 A 定义在完备的[1] 希尔伯特空間 H 中的稠密綫性集 M 上，且設在这綫性集上它是正定的，亦卽存在这样的常数 $\gamma>0$，使

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2,\ v\in M. \tag{1}$$

利用下面的属于弗立得立克斯 (K. Fridrichs)[1] 的方法：在綫性集 M 上，我們用

$$[u, v]=(Au, v);\ u\in M,\ v\in M \tag{2}$$

来定义新的內积．

不难驗明，根据这样的定义，M 变成一个新的希尔伯特空間，我們記之为 H_A，且用符号 $|u|$ 来表示 H_A 中的范数，于是

$$|u|^2=(Au, u);\ \ u\in M. \tag{3}$$

有时我們也用符号 $[u,v]_A$ 及 $|u|_A$ 来表示 H_A 中的內积及范数．

由算子 A 的正定性[不等式(1)]，可推出 H 中的范数与 H_A 中的范数之間有如下的重要关系：

$$\|u\|\leqslant\frac{1}{\gamma}|u|,\ u\in M. \tag{4}$$

空間 H_A 可能是不完备的——在这种情形我們用通常的方法把它完备化．显然，此时 M 在 H_A 中是稠密的．下面的重要定理是属于弗立得立克斯的．

定理 1. 空間 H_A 中的所有元素都属于空間 H．

更确切些說，完备化 H_A 可由空間 H 的元素构成．

---

1) 在流行的入門书中，希尔伯特空間的完备性包含在它的定义之內，然而，以后我們把希尔伯特空間分为完备的与不完备的两种較为方便．

为了証明定理 1，只須証明，对于每个元素 $u \in H_A$，H 中有一个唯一的元素与之对应，并且 H_A 中不同的元素对应 H 中不同的元素。如果 $u \in M$，这是显然的——此时只需令 u 与它自己对应。現設 u 是 H_A 中的极限元（理想元），于是依定义，有这样的序列 $u_n \in M$ 存在，使 $|u - u_n| \to 0$. 在这种情形下

$$\lim_{n, m \to \infty} |u_n - u_m| = 0.$$

因为差 $u_n - u_m \in M$，所以对它可利用不等式(4)，由此推出

$$\lim_{n, m \to \infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

这等式表明，序列 $\{u_n\}$ 在空間中收斂于某个极限 u'，我們就令元素 u' 与元素 $u \in H_A$ 对应. 不难看出，我們所建立的对应关系是綫性的.

剩下还要証明，H_A 中不同的元素对应于 H 中不同的元素. 設元素 $u^{(1)} \in H_A$ 及 $u^{(2)} \in H_A$ 对应于 H 中同一元素，则差 $u = u^{(1)} - u^{(2)}$ 对应于空間 H 中的零元素. 我們来証明 u 也是 H_A 中的零元素，从而 $u^{(1)} = u^{(2)}$. 設 u 是序列 $u_n \in M$ 在空間 H_A 中的收斂意义下的极限. 因为 u 对应于 H 中的零元素，所以按照上面所建立的对应規則，$\|u_n\| \to 0$. 特别是，在 H 中 $u_n \xrightarrow{\text{弱}} 0$[1]. 我們在 M 中取任意元素 v，于是 $(u_n, Av) \to 0$. 但依式(2)$(u_n, Av) = [u_n, v]$；在此令 $n \to \infty$，便得 $[u, v] = 0$. 如此，u 与 H_A 中的稠密集 M 正交；这就是說 u 是 H_A 中的零元素.

不难看出，不等式(4)不仅在 M 中成立，而且在整个空間 H_A 中也成立.

基本变分問題在于寻求綫性集 M 中的这样的元素，它使这个綫性集上的泛函

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u) \tag{5}$$

取极小值. 一般說来，这問題沒有解；为了使問題成为可解，我們把它的提法稍微改变一下. 首先，如果 $u \in M$，那末 $(Au, u) = [u, u]$. 其次，若 f 是 H 中的固定元素，而 u 是 H_A 中的任意元素，

1) 我們用符号 $\xrightarrow{\text{弱}}$ 表示弱收斂.

则(u, f)是H_A中的有界泛函．事实上，

$$|(u,f)| \leqslant \|f\| \cdot \|u\| \leqslant \frac{\|f\|}{\gamma}|u|.$$

但此时，按照著名的黎斯(F. Riesz)定理，有这样一个唯一的元素$u_0 \in H_A$存在，使

$$(u, f) = [u, u_0], \quad u \in H_A. \tag{6}$$

現在我們有

$$F(u) = [u, u] - [u, u_0] - [u_0, u]. \tag{7}$$

式(7)对一切元素$u \in M$都是确定的，但其右端在整个空間H_A上有意义；于是可利用式(7)把泛函$F(u)$开拓到整个空間H_A上且寻求$F(u)$在H_A中的极小值．上面的問題可十分簡单地解决，事实上，容易把式(7)化成下形：

$$F(u) = [u - u_0, u - u_0] - [u_0, u_0] = |u - u_0|^2 - |u_0|^2. \tag{8}$$

由式(8)显然可知，当$u = u_0$时泛函$F(u)$达到极小值，并且$\min F(u) = -|u_0|^2$.

作为例子，我們研究于§2中所提出的，在有限平面区域Ω內，波阿松方程

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y) \tag{9}$$

的积分問題，这方程伴有边値条件

$$u|_S = 0, \tag{10}$$

这里S是区域Ω的边界．仍然引进在$\Omega + S$上二次連續可微且在S上等于零的函数集合M．在§2中已証明，如果取集合M作为$-\Delta$的定义域，那末算子$-\Delta$是正的．我們把这一事实更簡单地表述为算子$-\Delta$在集合M上是正的．还可証明它在集合M上是正定的．这个論断可由§26的結果立即推出（参看下面），但也可用完全初等的方法証明[1]．設$u(x, y)$在$\Omega + S$上連續可微且在S上等于零，可以把有限区域Ω放在正方形K之內．設坐标軸与正方形的两个边相合，在$K - \Omega$上我們补充定义函数$u(x, y)$为零，如此补充定义的函数$u(x, y)$在K上連續且逐段連續可微．因为在

1) 参見 R. Courant and D. Hilbert [1].

正方形K的边界上$u=0$，所以对K中任何一点(x, y)，显然有

$$u(x, y)=\int_0^x \frac{\partial u(\xi, y)}{\partial \xi} d\xi.$$

由此，按照布湼科夫斯基不等式

$$|u(x, y)|^2 \leqslant x \int_0^x \left|\frac{\partial u(\xi, y)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi \leqslant a \int_0^a \left|\frac{\partial u(\xi, y)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi,$$

这里a是正方形K的边长，在矩形$0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant b$上积分上面的不等式：

$$\iint_K |u^2(x, y)| dxdy \leqslant a^2 \int_0^a \int_0^a \left|\frac{\partial u(\xi, y)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi dy =$$

$$=a^2 \iint_K \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdy \leqslant a^2 \iint_K \left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right\} dxdy.$$

最后，若抛去等于零的沿$K-\Omega$上的积分，便得

$$\iint_\Omega |u^2(x, y)| dxdy \leqslant a^2 \iint_\Omega \left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right\} dxdy. \quad (11)$$

不等式(11)是根据u在$\Omega+S$上連續可微且在S上等于零的假定导出的．特别是，它在集合M上成立．比較不等式(11)与§2的式(5)，我們得

$$(-\Delta u, u) \geqslant \frac{1}{a^2}\|u\|^2.$$

从而就証明了，算子$-\Delta$在集M上是正定的，并且常数值γ可取为$\frac{1}{a}$．在§2已証明，在边值条件(10)下波阿松方程(9)的积分問題可归結为在同一边值条件下积分

$$\iint_\Omega \left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2-2\mathrm{Re}(u, f)\right\} dxdy \quad (12)$$

的极小問題．由本节的結果推出，上面的問題有解．对于这个解，目前我們只能断言，它属于希尔伯特空間$H_{-\Delta}$，这个空間中的范数定义为

$$|u|^2=\iint_\Omega \left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right\} dxdy;$$

在这空間中的收斂意味着函数本身以及它們的一阶导数在区域 Ω 上的平均收斂. 在引进广义导数的概念以后, 我們就能对 $H_{-\Delta}$ 中的函数作更精确地描述 (参看 §17).

§4. 可分空間中解的形式

如果空間 H_A 是可分的[1], 則基本变分問題的解 u_0 可以十分簡单地作出来. 这就是, 設 $\varphi_n (n=1,2,\cdots)$ 是 H_A 中的完全正交規格化序列, 于是使泛函

$$[u, u]-(u, f)-(f, u)$$

取极小值的元素 u_0 可以展开成在空間 H_A 的度量下收斂的正交級数

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}[u_0, \varphi_n]\varphi_n. \tag{1}$$

注意 §3 式(6), 其中令 $u=\varphi_n$ 且在两項中变更因子的順序, 我們得

$$[u_0, \varphi_n]=(f, \varphi_n). \tag{2}$$

把这式代入(1), 我們引出确定基本变分問題的解的公式

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}(f, \varphi_n)\varphi_n. \tag{3}$$

級数(3)在空間 H_A 的度量下, 因而特別是在空間 H 的度量下是收斂的.

§5. 正定算子的开拓

現在我們回到一般情形. §3 式(6)对于每个元素 $f\in H$, 都有一个使泛函取极小值的元素 $u_0\in H$ 与之对应. 因此这公式在 H 中定义了某个算子

$$u_0=Gf, \tag{1}$$

其定义域与 H 一致, 而值域是构成空間 H_A 的元素的集合的子集. 我們即将研究这个算子. 为了研究起来比較方便, §3 式(6)可以写成

$$(u, f)=[u, Gf], \ u\in H_A. \tag{2}$$

---

1) 下面(§8)将要証明, 为此只需空間 H 是可分的.