医用高等数学

刘泗章　陈诤词　主编

中国医药科技出版社

医用高等数学

主　编：　刘泗章　　陈诤词

副主编：　安国斌　　刘尔红　　张喜林

编　者：　（按姓氏笔划排列）

于克倩　　王竹平　　王　颖

王慕杰　　吕淑娟　　辛　宁

肖万灵　　徐　晶　　张　勤

张瑞杰　　唐逸民　　夏　蔚

主　审：　张　仲

绘　图：　张宏怡

前　言

随着现代科学技术的发展和电子计算机的应用与普及，数学方法在医药学中的应用日益广泛和深入。医药学科逐步由传统的定性描述阶段向定性、定量分析相结合的新阶段发展。数学方法为医药科学研究的深入发展提供了强有力的工具。数学对医药学科的渗透与结合成为现代医药学领域的显著特征。由此而形成的生物医学工程学、药物代谢动力学、定量生理学、计量诊断学等边缘学科显示了强大的生命力，它们不仅拓宽了医药学的研究领域；也丰富了增进人类福祉的知识宝库。医学生物数学作为主要的基础工具，为每一个未来有志从事现代医学研究的学生和正在从事这方面研究的医学工作者，提供了开启这些新学科知识殿堂的钥匙。

本书由白求恩医科大学、南京铁道医学院、华北煤炭医学院、齐齐哈尔医学院、牡丹江医学院、西安医科大学、济宁医学院、哈尔滨科技大学、哈尔滨医科大学等院校共同编写。可以作为医学院校医疗、检验、影像、儿科、口腔、卫生、妇产等专业的 54 或 72 学时医用数学课教材，也可作为研究生和医务工作者的参考书。

全书共九章，包括了一元函数微积分、微分方程、多元函数微积分、线性代数、概率论。编写过程中力求少而精、结合医药学实际，介绍高等数学在医药学中的应用实例。

哈尔滨医科大学张仲教授担任本书的主审。他不仅在本书的形成过程中提出了许多宝贵建议，而且为本书的编写、出版和发行做了大量工作。在此表示衷心感谢。

尽管本书的每位编者在总体框架下尽力写好自己承担的部分，尽管我们为本书的系统、准确、简洁和实用做了努力，不过由于我们水平有限，经验不丰，加之时间紧迫，失误和不当之处一定很多，敬祈读者批评指教。

编　者

1994 年 3 月 3 日

目 录

第一章　函数与极限

函数是微积分学研究的最基本的对象。客观世界在永恒的变化之中，当我们从量的侧面来描述事物的变化以及它们之间的内在联系时，就形成了函数的概念。极限描述了函数在无限变化过程中的变化趋势，使人们从有限中认识无限，从近似中认识精确，从量变中认识质变。极限作为一种数学的理论和方法，它深化了人们对客观世界的认识。

第一节　函数

一、函数的概念

现实世界中各种不同的变化着的量不是孤立的，而是相互联系相互制约的。因此我们不但要研究事物的量变化，更重要的是要研究各个变量之间的相互依赖关系，这种关系反映了事物的内在联系和内部规律。函数概念正是这种变量间依赖关系的高度概括。先考察医药生物学中的几个例子。

例 1　外界环境温度对人体代谢率的影响可表达如下：

环境温度℃	…	4	10	20	30	38	…
代谢率（千卡/小时·米^2）	…	60	44	40	40.5	54	…

其中每一对数值可以在直角坐标系中找到相应的点，于是便得到 A、B、C、D、E 五点，见图 1－1。医学中常用折线把它们连接起来，这时环境温度和代谢率两个变量之间的相互影响关系从图中便一目了然了。环境温度太低或太高对代谢率的影响较大，只有温度在 20℃左右，代谢率最低且比较稳定。故临床做“基础代谢率”时，就要保持室温在 20℃左右进行。

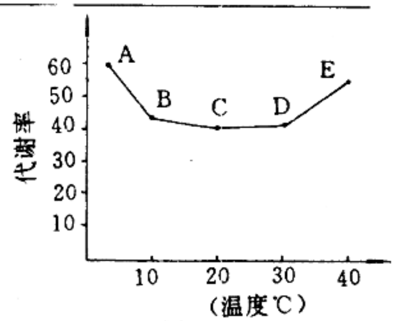


图 1—1

例 2　对某糖尿病患者作葡萄糖耐糖试验，每公斤体重口服葡萄糖 1.75 克后，测定血糖结果如下：

口服葡萄糖后时刻 t(小时)	0	0.5	1	2	3
患者血糖水平　y(mg)	200	230	250	255	260

由此可见，给定一个服药后的时间 t，患者血糖水平 y 就有相应的一个确定值。

例 3　设某种细菌的繁殖个数 N 与时间 t 呈指数生长规律

$$N = N_0 e^{\frac{t}{T_c}}$$

其中，N_0 为繁殖开始时细菌数，T_c 为生长周期，均为正的常数。

综合上面三个例子，我们得到这样一个共同点：每个问题都包含着两个变量和一个确定的对应关系，尽管这个对应关系的表达方式各有不同（如例 1 中由表格或图象表示，例 2 中由表格表示，例 3 中由公式表示），但都指明了两个变量间对应关系的具体内容，在每个具体问题中两个变量间的对应关系就是函数概念的实质。

定义 1 在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，若对于变量 x 在它的变化范围内所取的每一个值，依照某一对应规律 f，变量 y 都有确定的值与其对应，则称 y 与 x 有一元函数关系，或称 y 是 x 的**一元函数**，记为

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

其中，变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**，自变量 x 的取值范围，称为此函数的**定义域**。与自变量的值相对应的因变量的值称为**函数值**，函数值的全体称为函数的**值域**。

关于定义 1 的几点说明：

(1) 确定函数的要素有二条，一是对应规律；二是函数的定义域。要确定两个函数相同，必须保证这两个要素相同。例如 $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad x \in (-\infty, +\infty)$，对应规律是，不管 x 取何值 y 都恒等于 1，因此它们是相同的函数。又如：$y = x + 1$ 与 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$，虽然对应规律相同，但显然定义域不同，因此两个函数是不相同的。

(2) 关于函数的表示。在函数定义中，对函数的表示方式未加任何限制，它不一定要用解析式子表达，可以通过表格、图示或其它方式．

(3) 函数定义域的确定。当 x 取 x_0 时，函数有确定的对应值 $f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义。因此，函数的定义域就是使函数有定义的自变量取值的全体。

函数的定义域应由实际问题的意义或是在数学式子中使该式子有意义的自变量取值来决定。

例 4 求 $y = \lg(|x - 3| - 2)$ 的定义域。

解 要使函数有意义，必须有 $|x - 3| - 2 > 0$，即 $|x - 3| > 2$，得 $x > 5, x < 1$。也可用区间表示为 $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$。

例 5 求 $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin \pi x}$ 的定义域。

解 要使函数有意义，必须满足 $x + 1 \geqslant 0$ 且 $\sin \pi x \neq 0$，所以函数的定义域为：

$$x \geqslant -1 \text{ 且 } x \neq n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

或用区间表示为 $(n, n+1)$， $\quad n = -1, 0, 1, 2, \cdots$。

必须注意的是，并不是所有函数的定义域都是实数轴上的某个区间。

例如，$A_n = \dfrac{1}{6}(1 - \dfrac{1}{n})(2 - \dfrac{1}{n})$，即 A_n 是 n 的函数，它的定义域规定为所有的正整数。

我们一般将自变量为正整数的函数称为数列，并用记号 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 来表示。也可以简单记为 $\{u_n\}$。

因此，我们可以把 $A_n = \dfrac{1}{n}(1 - \dfrac{1}{n})(2 - \dfrac{1}{n})$， $n = 1, 2, \cdots$， 写成 $0, \dfrac{1}{8}, \dfrac{5}{27}, \cdots, \dfrac{1}{6}(1 - \dfrac{1}{n})(2 - \dfrac{1}{n}), \cdots$，也可简单记为 $\{\dfrac{1}{6}(1 - \dfrac{1}{n})(2 - \dfrac{1}{n})\}$。

二、分段函数

根据实际问题的需要，变量间的具体对应关系有时需用几个式子来表示。在不同的定义域内用不同的解析式表示的一个函数，称为**分段函数**。

例如符号函数 $y = \mathrm{sgn}(x)$，它定义为

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0; \\ 0 & x = 0; \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

$\mathrm{sgn}(-2) = -1$，$\mathrm{sgn}(4) = 1$，$\mathrm{sgn}(0) = 0$

又如，在生理学研究中，有人根据测得血液中胰岛素浓度 $C(t)$（单位 / 毫升）随时间 t（分钟）的变化数据，建立了如下的经验公式：

$$C(t) = \begin{cases} t(10 - t), & 0 \leqslant t \leqslant 5; \\ 25e^{-k(t-5)}, & t > 5. \end{cases}$$

其中 $k = \dfrac{\ln 2}{20}$.

这里，浓度 $C(t)$ 是时间 t 的函数，显然函数的定义域为 $[0, +\infty)$，但其函数关系是用两个解析式表示的。在求分段函数的函数值时，应将自变量的值代入它所在区间的解析式中计算。在本例中 $t = 2$ 时 $C(t) = 2(10 - 2) = 16$，当 $t = 10$ 时 $C(10) = 25e^{-k(10-5)} = 25e^{-5k}$.

在下面介绍极限和连续概念时，对分段函数尤其要在分段点上加以讨论．

三、复合函数

定义 2　设 $y = f(u)$，而 $u = \phi(x)$，且 $\phi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y = f[\phi(x)]$ 为由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \phi(x)$ 复合而成的**复合函数**，简称 y 是 x 的复合函数。其中 u 称为**中间变量**。

例如：$y = \sin u$，　$u = \sqrt{x}$ 经复合可以得到 y 关于 x 的复合函数 $y = \sin\sqrt{x}$.

以上是两个函数的“嵌套”关系构成的复合函数，不难将其推广到有限个函数的层层“嵌套”关系构成的复合函数。例如：由 $y = \lg u$，　$u = 1 + \sqrt{v}$，　$v = 1 + x^2$ 可以复合成 y 关于 x 的复合函数 $y = \lg(1 + \sqrt{1 + x^2})$.

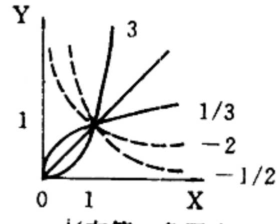
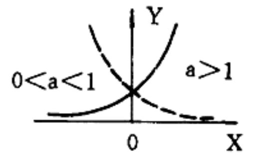
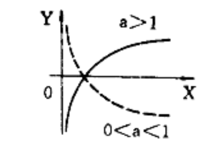
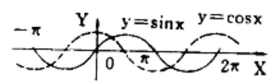
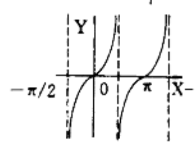
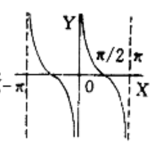
但须注意不是任意两个函数都可以复合的，例如：$y = \sqrt{1 - u^2}$，$u = x^2 + 2$ 就不能复合成 $y = \sqrt{1 - (x^2 + 2)^2}$．因为 $u = x^2 + 2$ 的值域为 $[2, +\infty]$ 与 $y = \sqrt{1 - u^2}$ 的定义域 $[-1, 1]$ 构成空集，因此不能复合。

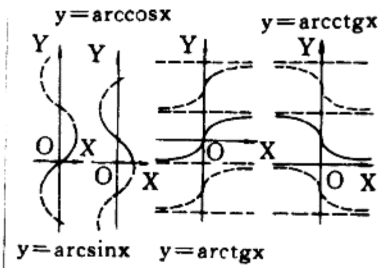
将若干个简单函数“复合”只是一种简单的层层“代入”的运算。我们还需要把一个复杂的复合函数“分解”为若干个简单的函数。例如：$y = (\mathrm{arctg}\, e^x)^2$ 是由 $y = u^2$，$u = \mathrm{arctg}\, v$，$v = e^x$ 复合而成。必须注意从外到里层层分解，分解到基本初等函数或者是基本初等函数的和、差、积、商的形式。这种分解在下面的微分运算中经常用到。

四、初等函数

在中学已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**。归纳为表 1.1.

表 1.1　基本初等函数表

类别及解析式		定义域	值域	图形
幂函数 $y=x^{\mu}$	$\mu>0$ μ 次抛物线	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共值域	 $y=x^{\mu}$（在第一象限内）
	$\mu<0$ 令 $\mu=-m\quad(m>0)$ $y=x^{-m}=\dfrac{1}{x^{m}}$， m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^{x}\quad(a>0,a\neq 1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	 $y=a^{x}\quad(a>0,a\neq 1)$
对数函数 $y=\log_{a}x\quad(a>0,a\neq 1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	 $y=\log_{a}x\ (a>0,\ a\neq 1)$
三角函数 正弦函数 $y=\sin x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
余弦函数 $y=\cos x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
正切函数 $y=\mathrm{tg}x$		$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	 $y=\mathrm{tg}x$
余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$		$x\neq n\pi$ $(n=0,\pm 1,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$	 $y=\mathrm{ctg}x$

类别及解析式	定义域	值　域	图　形
反三角函数			
反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	
反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	
反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的由一个解析式子表达的函数，称为**初等函数**。例如：

多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_0$，有理分式函数 $y=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$，无理函数 $y=\sqrt{\mathrm{ctg}3x}+e^{1+x}$，等都是初等函数。但须注意分段函数不是初等函数。

第二节　函数的极限

极限是描述在自变量的某个变化过程中，对应的函数值的变化趋势。

一、数列极限

因为数列是以自然数为自变量的一种特殊函数，它的自变量 n 是离散取值的，$n=1,2,\cdots$。因此对数列 $\{u_n\}$，只需讨论当自变量 n 无限增大时，因变量 u_n 的变化趋势。

观察如下三个数列：

例 1　(1)　$\{u_n\}=\{1+\frac{1}{n}\}=2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\cdots.$

(2)　$\{u_n\}=\{1-\frac{1}{n}\}=0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots.$

(3)　$\{u_n\}=\{1+(-1)^n\frac{1}{n}\}=0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots.$

直观地可以看到，当 n 无限增大时，(1) 中的 u_n 从 1 的上方无限趋近于 1，(2) 中的 u_n 从 1 的下方无限趋近于 1，而(3) 中的 u_n 从上、下方跳跃着无限趋近于 1。三个数列都是以 1 为极限，即随着 n 的无限增大，$|u_n-1|$ 趋近于零。

定义 1　对于数列 $\{u_n\}$，如果存在一个常数 A，当 n 无限增大时，数列 $\{u_n\}$ 中的项 u_n 无限趋近于 A，则把常数 A 称为数列 $\{u_n\}$ 的**极限**，记为

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=A \text{ 或 } u_n\to A \quad (n\to+\infty), \tag{1.2}$$

或者叙述为：无论预先给定多么小的正数 ε，都能在数列中找到一项 u_N，使得这一项后面的所

有项与 A 的差的绝对值都小于 ε(即当 $n > N$ 时,$|u_n - A| < \varepsilon$ 恒成立),就将常数 A 称为**数列的极限**。

定义中任意小的正数 ε 是用来精确地刻划 u_n 与常数 A 的无限接近。

观察当 $n \to +\infty$ 时,$\{u_n\} = \{2n\} \to +\infty$,无极限;$\{u_n\} = \{\frac{1+(-1)^n}{2}\} = 0,1,0,1,\cdots$,不断地取 0 与 1 两个值,不趋近于某一常数 A,因此无极限。

二、函数的极限

对于函数 $y = f(x)$,其自变量 x 是连续变化的,x 的变化趋势通常有两种情况:一种是 $|x| \to +\infty$;另一种是 $x \to x_0$(x_0 是常数)。下面就这两种情况给出函数极限的定义。

定义 2 如果自变量 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,则称 A 为当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的**极限**,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty) \tag{1.3}$$

这里 $x \to \infty$ 表示 $|x|$ 无限增大,它包含 x 总取正值无限增大 $x \to +\infty$ 和 x 总取负值而 $|x|$ 无限增大 $x \to -\infty$ 的情况。

或者可以叙述为:对于预先给定的任意小的正数 ε,总存在正数 M,当 $|x| > M$ 时,就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称 A 为当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的极限。

从几何上看,对任意的 $\varepsilon > 0$,$y = A - \varepsilon$,$y = A + \varepsilon$ 的带形区域,不论 ε 多么小(带形区域多窄),总存在 $M > 0$,当 x 进入 $(-\infty, M) \cup (M, +\infty)$ 时,$f(x)$ 的值全部落入区间 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 内,即 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立,见图 1-2。

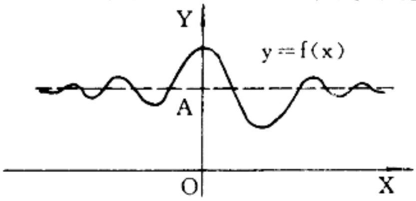


图 1-2

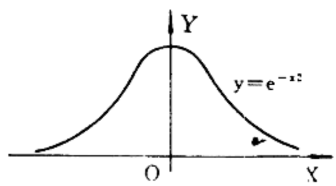


图 1-3

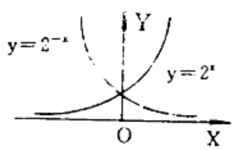


图 1-4

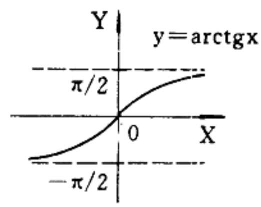


图 1-5

如果仅考虑 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$,那么类似地有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 的定义。

结合几何图形观察下面几个函数的极限。

例 2 (1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$;$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0$. (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{arctg}x = \frac{\pi}{2}$.

例 3 设 $y = \sin x$,当 $x \to \infty$ 时,$\sin x$ 的取值在 $+1$ 与 -1 之间不停地摆动,不趋近任何常数,故 $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ 不存在。

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义(在 x_0 点可无定义),如果当 x 无论以怎样的方

式趋近于 x_0 时($x \neq x_0$)，函数 $f(x)$ 都趋近于常数 A，则称 A 为当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的**极限**，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0) \tag{1.4}$$

对定义 3 的两点说明：

(1) 当 $x \to x_0$ 的方式是任意的，x 可以从 x_0 的左侧趋近于 x_0，记作 $x \to x_0^-$；也可以从 x_0 的右侧趋近于 x_0，记作 $x \to x_0^+$；还可以左右跳跃趋近于 x_0。如果 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限 A，是指 x 无论以哪种方式趋近于 x_0，$f(x)$ 都无限趋近于 A。

(2) 当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义，以及 x_0 点的函数值 $f(x_0)$ 无关。因为我们关心的是函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近的变化趋势，而不是 $f(x)$ 在 x_0 这一孤立点的情况。

极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 在几何上表示当 x 无限趋近 x_0(但 $x \neq x_0$)时，$f(x)$ 与直线 $y = A$ 的距离无限变小，即 $|f(x) - A| \to 0$.

例 4 考虑函数 $f(x) = 2x + 1$，当 $x \to 3$ 时的极限。

因为 $|(2x+1) - 7| = 2|x - 3| \to 0$ (当 $x \to 3$ 时)，所以 $\lim\limits_{x \to 3}(2x + 1) = 7$.

例 5 考虑函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$，当 $x \to 3$ 时的极限。

虽然在 $x = 3$ 处函数无定义，但 $x \to 3(x \neq 3)$ 时，可以约去不为零的因子 $(x - 3)$。这样，在 $x = 3$ 处函数虽然没有定义，但 $x \to 3$ 时极限却存在：

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 3) = 6.$$

例 6 考虑函数 $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x \to 0$ 时的极限。

因为 $\left|x\sin\dfrac{1}{x} - 0\right| = \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x| \to 0$ (当 $x \to 0$ 时)，所以 $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

注意：$x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处无定义。

如果只考虑 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限，则称为**单侧极限**。

当 x 从 x_0 的左侧($x < x_0$)趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于定数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A$$

类似地有

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A$$

称为当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 时的**右极限**。

可以证明，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **存在的充分必要条件为，当 $x \to x_0$ 时，左右极限都存在且相等，即**

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$$

例 7 讨论分段函数
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & x \geqslant 0, \end{cases}$$
当 $x \to 0$ 时的极限。

因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$，即左右极限存在且相等，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

例 8 讨论函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的极限。

由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=+1,$$

即左右极限存在，但不相等，所以当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{|\sin x|}{x}$ 的极限不存在。

当 $x\to x_0$ （或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 趋于无穷大，则称函数 $f(x)$ 的极限不存在。为叙述上的方便，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$ 或 $f(x)\to\infty$ （$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时）.

三、极限的运算法则

为了求比较复杂的函数的极限，需要掌握极限的四则运算法则。

定理 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在自变量 x 的同一变化过程中极限分别为 A 和 B，即

$$\lim f(x)=A,\qquad \lim g(x)=B,$$

则 (1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$; (1.5)

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$; (1.6)

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$。 (1.7)

显然常数 C 的极限就是本身，即 $\lim C=C$。还有 $\lim Cf(x)=C\lim f(x)=CA$。

应注意，定理中的“同一个变化过程”是指 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$，此外结论(1)，(2)可以推广到有限个具有极限的函数的情况。

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{x^2-1}$.

解 $$\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-1}=\frac{2\times 0}{4-1}=0.$$

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-5x+4}$。

解 因为分母的极限是零，故不能直接应用法则 3。注意到分子分母有公因式 $(x-1)$，而 $x\to 1$ 时 $x\neq 1$，故分式可以约去不为零的因式 $(x-1)$，于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x+4}{\lim\limits_{x\to 1}x-4}=-\frac{5}{3}.$$

例 11 设 $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$,

试证：

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & n>m;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

证 分子分母同除以 x^m，得

$$R(x)=\frac{a_0x^{n-m}+a_1x^{n-m-1}+\cdots+a_nx^{-m}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots+b_mx^{-m}}.$$

当 $n>m$ 时，分子趋于 ∞，分母趋于 b_0， 故 $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\infty$;

当 $n=m$ 时，分子趋于 a_0，分母趋于 b_0，　　故　$\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\dfrac{a_0}{b_0}$；

当 $n<m$ 时，分子趋于 0，分母趋于 b_0，　　故　$\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=0$.

上面的结果，在具体计算时可直接使用。

例 12　求　$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

解　由于当 $x\to -1$ 时，$\dfrac{1}{x+1}$ 和 $\dfrac{3}{x^3+1}$ 的极限都不存在，应考虑变形后再求极限。

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1.$$

四、两个重要极限

在函数极限的计算中，下面两个极限有着重要的作用（证明从略）：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　　(1.9)

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$　　或　　$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$.　　(1.10)

其中 e 是一个无理数，$e\approx 2.71828$. 以 e 为底的对数记为 $\ln x$，称为自然对数。在许多自然规律的研究中，如镭的分解，细菌的繁殖以及医学领域的各动力学等都会遇到这个无理数。

例 13　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$　　$(m\cdot n\neq 0)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}}\cdot\dfrac{m}{n}=\dfrac{m}{n}$.

例 14　求　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}\cdot\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$.

例 15　求　$\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$.

解　$\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{\alpha}{\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{2}$.

例 16　求　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}$。

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=e^2\cdot 1=e^2.$$

例 17　求　$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right]^{-2}=e^{-2}$.

例 18　求　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-3}$.

解 令 $y = x - 1$，则 $x = y + 1$；当 $x \to \infty$ 时 $y \to \infty$，于是有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x-1+4} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4} = e^{4}.$$

五、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量及其比较

定义 4 极限为零的变量称为**无穷小量**。显然，无穷小量不是任何一个很小的常数，它是一个以零为极限的变量。但零的极限为零，故零可以作为无穷小量的唯一常数。

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$；$\lim\limits_{x\to 1}(1-x) = 0$；$\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x} = 0$，故 $\sin x$，$1-x$，e^{x} 在各自相应的自变量变化趋势下为无穷小量。

无穷小量与极限的概念有着密切的联系：**若函数 $f(x)$ 以 A 为极限，则 $f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为一个无穷小量，反之亦然。**

因为函数 $f(x)$ 以 A 为极限相当于 $[f(x) - A]$ 的极限为零，即 $[f(x) - A]$ 为无穷小量，记为 $\alpha(x)$，即 $\alpha(x) = f(x) - A$，则有 $f(x) = A + \alpha(x)$；反之，如果 $\lim[f(x) - A] = 0$，则 $\lim[f(x) - A + A] = \lim[f(x) - A] + A = A$，即 $\lim f(x) = A$。

无穷小量的性质

(1) 有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

设函数 $f(x)$ 为无穷小量，$\lim f(x) = 0$，函数 $g(x)$ 为有界变量(即存在一个正数 M，使 $|g(x)| \leqslant M$)。

由于

$$|f(x)\cdot g(x) - 0| = |f(x)|\cdot|g(x)| \leqslant M|f(x)| \to 0,$$

所以 $f(x)\cdot g(x)$ 为无穷小量。

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$. 因为 $|\sin x| \leqslant 1$，$\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷小量。

(2) 有限个无穷小量的和、差、积以及常数与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

这个性质可利用极限运算法则并根据无穷小量的定义来证明。

下面我们引入无穷小量阶的定义。首先看表：

n	1	10	100	1000	10000	…
$\frac{1}{n}$	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	…
$\frac{100}{n^2}$	100	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	…

当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}$ 与 $\dfrac{100}{n^2}$ 都是无穷小量，但随着 n 的增大，$\dfrac{100}{n^2}$ 比 $\dfrac{1}{n}$ 趋近于零的速度快得多，导致两者之比的极限等于零。

定义 5 设 α、β 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小量，如果在此过程中

(1) $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = 0$，则称 α 是比 β **高阶的无穷小量**，记为 $\alpha = o(\beta)$；

(2) $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$，则称 α 与 β 是**同阶无穷小量**；

(3) $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 与 β 是**等价无穷小量**，记作 $\alpha \sim \beta$。

2. 无穷大量

定义 6　绝对值无限增大的变量称为**无穷大量**。

例如，变量 $f_1(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，　$f_2(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$，　$f_3(x)=\dfrac{1}{x-1}$，当 $x\to 1$ 时，它们的绝对值都无限增大，因而都是无穷大量。但我们可以看到，当 $x\to 1$ 时，$f_1(x)$ 一直保持正值而无限增大，记为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$，$f_2(x)$ 一直保持负值而无限减小，记为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$，而 $f_3(x)$，则当 $x\to 1^+$ 时类似 $f_1(x)$，当 $x\to 1^-$ 时类似 $f_2(x)$，记为 $\lim\limits_{x\to 1}f_3(x)=\infty$。

最后指出，无穷大量与无穷小量互成倒数关系。如果 $f(x)$ 是无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小量；反之，如果 $f(x)$ $(\neq 0)$ 是无穷小量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量。

第三节　函数的连续性

一、函数连续性的概念

在客观世界中许多量的变化都是连续的。例如，生物体的连续生长，人体体温的连续变化，血液的连续流动等。其特点是时间变化很小时，这些量的变化也很小。从图形上看，这些变量表现为连续不断的曲线。我们将这种直观的客观现象加以科学的抽象，便可建立函数连续性的概念。

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其附近有定义，当自变量 x 有一增量 Δx，从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，则函数值 $f(x_0+\Delta x)$ 与 $f(x_0)$ 之差就是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的对应增量，记作 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如图 1－6。

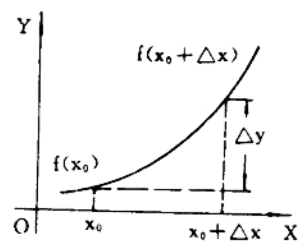


图 1－6

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其附近有定义，当自变量 x 在 x_0 点的增量 Δx 趋于零时，对应的函数增量　$\Delta y=f(x_0+x)-f(x_0)$ 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+\Delta x)-f(x_0)]=0 \qquad (1.11)$$

则称**函数** $y=f(x)$ **在** x_0 **点连续**。

为了应用方便，我们将(1.11)式改变一下表示形式。设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$，且 $f(x_0+\Delta x)=f(x)$。于是，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \qquad (1.12)$$

根据(1.12)式，函数在一点连续的定义又可叙述如下：

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其附近有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在 x_0 点的函数值 $f(x_0)$，即