高考改革丛书

主编　王大赫　胡江浩

"3+X"

数学卷

执行主编　储瑞年

上海远东出版社
SHANGHAI FAR EAST PUBLISHERS

高考改革丛书

“3+X”数学卷

主　　编　王大赫　胡江浩
执行主编　储瑞年
编　　者　储瑞年　蒋佩锦　张继林
　　　　　张鸿菊　周　华　卫　杰
　　　　　高　伟　何　红　孙大庆
　　　　　吴旭勃　汤学平　林惟洁
　　　　　俞　恺　张奔斗　赵允芳
　　　　　李光化　叶建华　周建明
　　　　　李自庆　郑　义　秋　浦
　　　　　瑞　亿

上海远东出版社

前　言

江泽民同志指出:“最重要的是坚持创新。创新是一个民族的灵魂,是一个国家兴旺发达的不竭的动力,创新的关键是人才,人才的成长靠教育。”

面对着科学技术突飞猛进和知识经济迅速兴起的新世纪的挑战,我国的教育要改革,考试也要改革,为此,教育部发布了教学[1999]3号文件,对于高校招生考试制度改革,提出了新的意见。“3+X”考试便是这一轮高考改革的方案。这一方案在考试内容上最突出的就是“综合能力考查”。2000年高考广东省实行“3+六科综合+1”方案,吉林、山东、江苏、浙江四省实行“3+理综/文综”方案,“3+2”考试,也将会在命题内容上体现“3+X”新一轮高考改革的精神,坚持“稳中求进,稳中求改”的原则。

“综合能力考查”包括两个方面的内容:一是学科的综合能力考查(运用本学科知识,综合解决问题的能力);二是学科间的综合能力考查(运用多学科的知识分析和解决问题的能力)。本书是为了适应新一轮高考内容改革的综合能力考查而编写的,对大家最关心的几个问题(综合能力要求、考查的内容和题型及解题思路、综合能力的培养等方面)作了阐释和探讨。为了培养学生的这种能力,还以新的“能力立意”编拟和精选了一些有价值的训练题,是当前最新、最具针对性的综

合能力训练参考读物。

本丛书的编写工作得到了全国各地高考命题专家、学科专家和教研人员的热心关怀,在此向他们表示衷心感谢。编写工作因时间仓促,难免有不当之处,请广大读者批评指正,以便进一步改进。

第一部分　数学科目综合能力概述

教育部考试中心颁发的《普通高等学校招生全国统一考试数学科考试说明》明确规定:"普通高等学校招生全国统一考试是为普通高校录取新生而举行的选拔性考试,其目的是为普通高等学校择优录取新生提供依据。""数学科考试,要发挥数学作为基础学科的作用,既重视考查中学数学知识掌握程度,又注意考查进入高校继续学习的潜能。"

普通高等学校希望选拔能力比较强而不是仅会死记硬背的新生。因此,近几年的高考,在考查知识的同时,逐步加强了对能力的考查。要求考生在理解的基础上牢固掌握必要的基本知识、技能,对所学课程内容能够融会贯通,理论联系实际,防止单纯机械记忆。把重点放在系统地掌握课程内容的内在联系上,放在掌握分析问题的方法和解决问题的能力上。

纵观近几年的高考数学试题,在由知识测量型向能力测量型的转变,由经验型的命题方式向科研型的命题方式的转变等方面,加大了改革的力度,在考查能力上进行了创新性的探索,考查创新意识,应用意识;强调综合能力。

1999 年教育部考试中心又进一步提出:考试只依据"教学大纲"是不够的。考试与教学内容涉及的范围必须一致,考试内容应体现源于"教学大纲",但又不拘泥于"教学大纲",有利于促进素质教育的原则。据此,1999 年的高考数学试题又

贯彻了在知识网络交汇点设计试题，重视数学思想和方法的考查。强调全面考查能力，注重应用性和综合性等命题原则。在高考数学命题的改革上又迈出了重要的步伐。

为此，进一步研究数学的综合能力，研究数学高考命题的原则、意图、特点、方法；进一步明确数学教学和总复习的方向和层次，提高教学和复习的实效性，具有十分重要的意义。

一、全面考查，突出重点

教育部考试中心在《数学科考试说明（广东卷）》中明确提出：对数学基础知识的考查，要求全面又突出重点，注重学科的内在联系和知识的综合，重点知识是支撑学科知识体系的主要内容，考查时要保持较高的比例，并达到必要的深度，构成数学试题的主体。学科的内在联系，包括代数、立体几何、平面解析几何三个分科之间的相互联系及在各自发展过程中，各部分知识间的纵向联系，知识的综合性，则是从学科的整体高度考虑问题，在知识网络交汇点设计试题。

（一）正确理解和应用数学概念

中学数学是一个各部分内容紧密联系的逻辑体系。由概念组成命题，由命题组成判断，由判断组成证明。数学概念用以反映各个数学对象的本质属性，是构成各个数学知识系统的基本元素，是分析各类数学问题，进行数学思维，进而解决各类数学问题的基础，正确理解和应用数学概念是揭示联系构建知识网络的基础，自然成为数学高考试题的考查重点之一。

例 1 已知映射 $f: A \to B$，其中，集合 $A=\{-3,-2,$

$-1,1,2,3,4\}$，集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象，且对任意的 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$，则集合 B 中元素的个数是（　　）。

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

分析　在映射 f 下，$\pm3\to|\pm3|=3$，$\pm2\to|\pm2|=2$，$\pm1\to|\pm1|=1$，$4\to|4|=4$；且集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象，故 $B=\{1,2,3,4\}$，共 4 个元素，选 A。

评述　这是一道考查映射的概念的试题。对应法则 $f:a\to|a|$ 符合映射的定义——对于集合 A 中的每一个元素 a，在集合 B 中都有唯一确定的元素与之相对应。这一映射 $f:A\to B$ 满足：对于集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象，即集合 B 中的每一个元素在集合 A 中都有原象，因此 $f:A\to B$ 是“满射”；但 $f:A\to B$ 不是“单射”——对于集合 B 中的每一个元素，在集合 A 中的原象不唯一，因此 $f:A\to B$ 不是“一一映射”。

对于映射这一知识点，《考试说明》中规定的考试要求是：“了解映射的概念，在映射概念基础上理解函数及其有关的概念。”这一试题较好地体现了这一要求，只需对映射这一概念有所了解，就能得出正确的结论。但是，集合与映射作为函数理论中两个最基本的概念，是理解函数及反函数的概念不可缺少的基础，既要认识其本质属性——象存在且唯一（单值对应），也要认识其分类——单射和满射。

例 2　设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f(x^2)$ 的定义域是________。

错解　$\because$ $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，即 $0\leqslant x\leqslant1$，

$\therefore$ $0\leqslant x^2\leqslant1$，函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$。

正解 $\because f(x)$的定义域是$[0,1]$，

$\therefore$ 在函数 $f(x^2)$中，$0\leqslant x^2\leqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$。故 $f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$。

评述 本题主要考查函数的概念的三个要素(对应法则、定义域、值域)中两个要素的相互联系与相互制约，求解的关键在于正确理解函数的记号，对题设的已知条件——函数 $f(x)$的定义域是$[0,1]$的正确理解应是：由对应法则 f 所确定的函数$f(x)$中，受 f 直接制约的变量的取值范围是$[0,1]$。因此，在函数 $f(x^2)$中，直接受 f 制约的是中间变量 x^2，应满足 $0\leqslant x^2\leqslant 1$；而 $f(x^2)$的定义域应是自变量 x 的取值范围。据此，通过解不等式 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，求得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，方可判断所求函数 $f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$，造成错解的原因就在于未能正确理解函数的记号与定义域的关系，也就不能得出正确的求解过程与结论。

造成解答本题出错的另一原因是题目未给出函数 $f(x)$的解析表达式，而只是用一个抽象的函数的记号给出对应法则 f 对变量的取值范围的制约要求。为此，将此函数具体化是一个有助于理解题意和正确求解：依题意，设 $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$，它的定义域是$[0,1]$，这时，函数 $f(x^2)=\sqrt{x^2(1-x^2)}$，解不等式 $x^2(1-x^2)\geqslant 0$，不难求得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，从而判定函数 $f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$。

设计这一试题时，不给出函数 $f(x)$的解析表达式，正是基于对函数概念的基本特征——抽象性的考查要求。

例 3 设 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$。当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$等于 (　　)。

A. 0.5　　B. -0.5　　C. 1.5　　D. -1.5

分析　思路一　$\because f(x+2)=-f(x)$，

$\therefore f(7.5)=-f(5.5)=f(3.5)=-f(1.5)=f(-0.5)$。

$\because f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，

$\therefore f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$，故选B。

思路二　$\because f(x+2)=-f(x)$，

$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，可知$f(x)$是以4为周期的周期函数。

$\therefore f(7.5)=f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$。

思路三　$\because f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，

$\therefore$ 当$-1\leqslant x\leqslant 0$时，$0<-x\leqslant 1$，$f(x)=-f(-x)=-(-x)=x$，可知当$x\in[-1,1]$时，$f(x)=x$，图象是线段AB。

$\because f(x+2)=-f(x)=f(-x)$，

$\therefore f(1+x)=f[(x-1)+2]=f[-(x-1)]=f(1-x)$，可知$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称。由此可得$x\in[1,3]$时的图象是线段$BC$（如图1-1-1）。

又由$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$知$f(x)$是以4为周期的周期函数，可依次作出区间[3,7]，[7,11]上的图象（如图1-1-2），观察图象可得$f(7.5)=-0.5$。

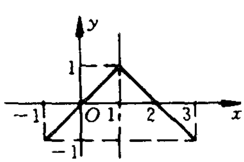

图1-1-1

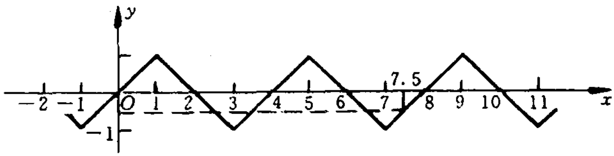

图 1-1-2

评述 这是一道与函数的奇偶性、周期性、分段性等概念及函数图象等密切相关的综合性试题。三种思路从不同的角度进行分析,在不同的层次,不同的深度上揭示出函数 $f(x)$ 的性质,内涵十分丰富,显示出函数 $f(x)$ 的各种属性的内在联系,体现了从整体上把握一个函数特征的思想,对函数的有关概念的考查达到了一定的深度和广度。

例 4 已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点,P 是双曲线上一点,且 $\angle F_1PF_2=90°$,则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 ( )。

A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

分析 思路一 双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点坐标是 $F_1(-\sqrt{5},0)$,$F_2(\sqrt{5},0)$,焦距 $|F_1F_2|=2\sqrt{5}$。

设点 P 坐标为 (x,y),则由 $\angle F_1PF_2=90°$ 可得

$$\frac{y}{x+\sqrt{5}}\cdot\frac{y}{x-\sqrt{5}}=-1,$$

整理,得 $$x^2+y^2=5。$$

由方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-y^2=1,\\ x^2+y^2=5\end{cases}$ 解得 $y^2=\dfrac{1}{5}, |y|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$。

故$\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y|=1$,选 A。

思路二 由平面几何的知识可知:当$\angle F_1PF_2=90^\circ$时,点 P 的轨迹是以线段 F_1F_2 为直径的圆(F_1,F_2 两点除外),其方程是 $x^2+y^2=5\quad(y\neq0)$。

(以下同思路一)

思路三 设$|PF_1|=r_1,|PF_2|=r_2$,则由双曲线的定义可知 $|r_1-r_2|=2a$。 ①

又由$\angle F_1PF_2=90^\circ$可知 $r_1{}^2+r_2{}^2=(2c)^2$。 ②

②-①的平方,得

$$2r_1r_2=4(c^2-a^2)=4b^2=4。$$

$\therefore\ S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}r_1r_2=1$,选 A。

评述 此题在不同层次上考查了垂直及双曲线的概念。三种思路中,应用思路三求解的运算量最小,其原因在于利用双曲线的定义导出了直角三角形 F_1PF_2 中两直角边的数量关系,配合勾股定理,运用合理的变形,简化了直角三角形的面积计算。由此可见,深刻理解、灵活应用概念,不仅保证运算和推理的正确,而且提供合理简捷的求解方法,这也是高考数学试题考查概念的意图之一。

例 5 设 a,b 是两条异面直线,在下列命题中正确的是 ( )。

A. 有且仅有一条直线与 a,b 都垂直

B. 有一平面与 a,b 都垂直

C. 过直线 a 有且仅有一平面与 b 平行

D. 过空间中任一点必可作一条直线与 a,b 都相交

分析 如图 1-1-3, a,b 是异面直线, $a\in\alpha,b\in\beta,\alpha//\beta$,凡与平行平面 α,β 都垂直的直线 l,必与 a,b 都垂直,A 为假命题。

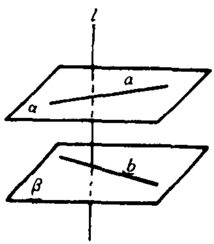

图 1-1-3

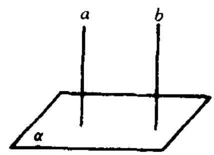

图 1-1-4

如图 1-1-4,若平面 α 与 a,b 都垂直,则 $a//b$,与 a,b 为异面直线矛盾,B 为假命题。

如图 1-1-5,过直线 a 上一点 A,作直线 c,使 $c//b$,则由两相交直线 a,c 可确定一个平面 α,由 $b//c,c\subset\alpha$ 可知 $b//\alpha$。若过 a 有另一平面 β,也使 $b//\beta$,则过 b,A 的平面与 β 的交线也与 b 平行,与平行公理矛盾。综上可知:过直线 a 有且仅有一个平面与 b 平行,C 为真命题。

如图 1-1-6,平面 α 过直线 a,且与直线 b 平行。在平面 α 内任取直线 a 外一点 P,凡过点 P 且与 a 相交的直线必在平面 α 内,与直线 b 无公共点,D 为假命题。

评述 这是一道考查异面直线的概念的试题。从不同的侧面审视异面直线的特征,要求考生在异面直线与相关平面的各种关系中,牢牢把握异面直线的本质属性,体现出对异面

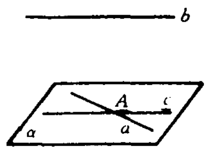

图 1－1－5

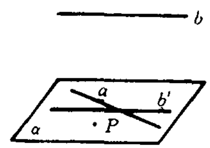

图 1－1－6

直线的概念的考查是与空间观念、逻辑推理紧密结合的。

例 6　函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}+\frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$ 的值域是　　(　　)。

A. $\{-2,4\}$　　B. $\{-2,0,4\}$

C. $\{-2,0,2,4\}$　　D. $\{-4,-2,0,4\}$

分析　此函数的定义域是 $\left\{x \mid x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$，当 $2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 x 是第一象限角时，$y=4$；当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 x 是第二象限角时，$y=-2$；当 $2k\pi+\pi<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 x 是第三象限角时，$y=0$；当 $2k\pi+\frac{3\pi}{2}<x<2k\pi+2\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 x 是第四象限角时，$y=-2$。综上可知，此函数的值域是 $\{-2,0,4\}$，选 B。

评述　这是一道考查三角函数及绝对值的概念的试题。根据任意角三角函数的定义，导出三角函数在各象限的符号，是三角函数的基本属性，应用十分广泛，汇总四种基本三角函数和绝对值构成一个新的函数，并采用判定函数的值域的设

问方式，体现了对函数的有关概念的综合性考查的要求。

例 7 已知等差数列 a,b,c 中的三个数都是正数，且公差不为零。求证它们的倒数所组成的数列 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 不可能成等差数列。

证法一 $\because$ 正数 a,b,c 成等差数列且公差不为零，

$\therefore a-b=b-c\neq 0$，且 $a\neq c$。

由此可得 $\frac{a-b}{b}=\frac{b-c}{b}$，$\frac{a-b}{ab}\neq\frac{b-c}{bc}$，

即 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\neq\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$，故 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 不能成等差数列。

证法二 假设 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列，则

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b},$$

即
$$\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}。$$

两边同乘以 b，得 $\frac{a-b}{a}=\frac{b-c}{c}$。 ①

$\because a,b,c$ 成等差数列，且公差不为零，

$\therefore a-b=b-c\neq 0$。

由①可得 $\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$，即 $a=c$，与等差数列 a,b,c 的公差不为零矛盾。因此，$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 不能成等差数列。

证法三 假设 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列，则

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}。 \quad ②$$

$\because a,b,c$ 成等差数列。

$\therefore 2b=a+c$。　③

将②,③两边分别相乘,得

$$(a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=4,$$

即

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=2。$$

两边同乘以 ac,得

$$a^2+c^2=2ac,$$

即 $(a-c)^2=0$,可得 $a=c$,与等差数列 a,b,c 的公差不为零矛盾。因此,$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$不能成等差数列。

评述　证法一是直接证法,证法二与证法三是反证法。无论是直接证法还是反证法,证明的根据都是由等差数列的定义导出的两组等价关系:

a,b,c 成等差数列 $\Leftrightarrow b-a=c-b \Leftrightarrow 2b=a+c$。

$$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\text{不成等差数列} \Leftrightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{a}\neq\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{b}\neq\frac{1}{a}+\frac{1}{c}。$$

这两组等价关系就是等差数列这一概念的本质属性。用证明题的形式考查概念,更突出了概念作为逻辑推理的基础的地位和作用。

(二)知识的系统性和结构的网络化

知识的系统性和结构的网络化是高中数学的基本特征,为了更有效地测试考生的能力水平,近几年的数学高考试题,特别重视突出重点内容的主体地位,以充分体现数学的学科特点。代数中的函数,不等式,数列;平面三角中的三角函数

与三角变换;立体几何中的空间直线与平面的关系;解析几何中的直线与圆锥曲线等都是高中数学的重点内容,构成了代数,平面三角,立体几何,解析几何各学科的主体,体现了这些学科的特点、思想、方法,对这些重点内容的考查既全面又深入,保持了较高的比例,并达到了必要的深度。函数是高考试题中最突出的重点,体现了高考命题改革的方向。

中学数学的函数部分是中学数学学习的基本内容之一,这些内容中包括的基本概念和基本方法,与中学数学,特别是高中数学的各部分内容都有着广泛而且密切的联系,又是大学学习数学必备的基础。高考的函数试题内涵丰富,可考查的知识面宽,而且具有一定的深度。选择题和填空题考查的内容覆盖了函数的大部分内容,例如函数的定义、函数的记号、函数的定义域和值域、反函数;函数的单调性、函数的奇偶性、函数的周期性;函数的图象等,突出了基础理论的考查。而解答题则更注重考查函数的思想方法和综合应用函数知识解决问题的能力,所以对考生能力的考查,特别是综合和灵活运用基本知识和方法解决问题能力的考查具有良好的效果,发挥了选拔的功能。

1. 函数、方程、不等式

函数用以描述自然界中量之间的依存关系,是对各类数学问题和实际问题中数量本质特征和制约关系的一种刻画。相等关系和大小关系是数量特征的两种主要形式,方程和不等式则是研究数量的相等关系和大小关系的数学理论和数学工具。因此,函数与方程、不等式相互联系,又相互为用。

解方程 $f(x)=0$,就是求函数 $y=f(x)$ 的零点(即函数

$y=f(x)$的图象与 x 轴的交点横坐标);解不等式 $f(x)>0$ 或$f(x)<0$,就是求函数的正区间或负区间(即函数 $y=f(x)$ 的图象位于 x 轴上方或下方部分各点横坐标的集合)。因此,解方程与不等式,常常需要应用函数的知识和方法。

反之,确定一个函数的解析式,通常采用待定系数法——依据题设条件,通过布列方程(组)和解方程(组),求得解析式中各系数的值。确定一个函数的定义域,通常归结为解不等式(组);确定一个函数 $y=f(x)$的值域的基本方法是通过不等式的变换,由 x 的取值范围推求 y 的取值范围;判定函数 $f(x)$的单调性,就是由不等式 $x_1<x_x$,推证不等式 $f(x_1)<f(x_2)$,或 $f(x_1)>f(x_2)$。

熟练应用函数与方程、不等式的相互联系和相互为用,分析和解决有关的数学问题,有助于揭示和认识知识之间的内在联系,构建知识网络,有助于认识和把握高中代数的学科特点,有助于提高思维能力和综合能力。

例 8 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}(x\geqslant0)$,则 $f^{-1}(0)=$ ________。

分析 令 $f(x)=0$,即 $4^x-2^{x+1}=0$,解得 $x=1$,故 $f^{-1}(0)=1$。

评述 这是一道有关反函数的综合题,题目是求函数 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$在 $x=0$ 时的函数值。根据反函数的概念,转化为求使 $f(x)=0$ 的 x 的值,问题就归结为解简单指数方程。

例 9 (1) 函数 $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}x}+\sqrt{\operatorname{tg}x}$ 的定义域是 ________;