高等数学习题错解分析

（二） 孙翁娟　施明光　编著

科学技术文献出版社

前　言

本书是《高等数学习题错解分析（一）》的续集．错解分析（一）主要讨论一元函数微积分；错解分析（二）将进入多元分析的范畴，内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微积分和常微分方程．

众所周知，在高等数学的学习过程中，做习题是一个十分重要的环节，它既能帮助深入理解概念、牢固掌握基本理论，又能培养独立思考能力．然而，在教学实践中，经常出现这样的现象：有些学生在学习高等数学时，能看懂定理的形式逻辑论证，也能熟记一些定义和公式，但是轮到自己独立解题时，往往会有困惑、疑虑之感．于是他们就去套题目类型，按例题的模式做，甚至边做边凑答案，其结果势必是题解错了，判别不出错在哪里，题解对了，说不出对的道理，当问题稍有变化时，更感到无从着手，这种现象似乎在初学者和自学者中较为多见．

一般说，初学者和自学者由于刚刚入门或缺少教师的指点、引导，因而对问题缺乏综合、分析和判断能力．有些学生翻阅习题题解书籍，希望从中得到启示，但在浩瀚的题海面前，若没有正确的指导，仍得不到要领，对错解难以否定．根据多年来教学中的体会，我们认为通过对典型习题的错解分析，往往能收到举一反三的效果，对读者起到答疑和辅导作用．

在本书中，我们选择了120个富于启发性的典型问题进

行分析和讨论．写作的格式是：先对每个问题列出容易出现的各种错误解法，继而对错误进行分析和讨论，指出产生错误的原因和正确解题的关键，最后给出正确的求解过程和答案．我们希望读者先看题目与〔某解〕的错误解法，然后思索一下错在哪里？自己如何求解，最后再看书中的分析和正确求解过程．我们相信通过这样一种正反两方面的认真探索和思考，读者定能从中得到启迪，使解题能力得到提高．

上海科技大学龚天亮副教授对本书初稿进行了认真的审阅，并提出宝贵的意见，在此表示衷心的感谢．

由于我们水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正．

编　　者

1986年8月

目　录

第一章　空间解析几何与向量代数

1.1　向量代数

【例1.1】 下列命题是否成立

1）$|\vec{a}|\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{a}$；

2）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则$\vec{b}=\vec{c}$；

3）$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$；

4）若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则$\vec{a}=\vec{b}$；

5）$[(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}]\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$.

某解　1）左端$|\vec{a}|\vec{a}$是向量，右端$\vec{a}\cdot\vec{a}$是数量，命题显然不成立.

2）由$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$两边消去$\vec{a}$，便得$\vec{b}=\vec{c}$，故命题成立.

3）对于非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Longleftrightarrow\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，故命题不成立.

4）成立.

5）不一定成立．仅当$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$与$\vec{a}\times\vec{b}$垂直时才成立.

分析　上述解对命题1）、3）的判断是正确的，不再复述．对命题2）、4）、5）的判断是错误的，下面分别说明之.

2）当$\vec{a}$为零向量时，显然，对于任意向量$\vec{b}$、$\vec{c}$，且$\vec{b}\neq\vec{c}$，仍然有$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$；

当$\vec{a}$为非零向量时，对于任意非零向量$\vec{b}$（图1-1），有

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\mathrm{P_{r_j}}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{a}|OM$ 其中OM为$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影．过点M作垂直$\vec{a}$的平面π．在π上任取一点C，得向量$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ $(\neq\vec{b})$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\mathrm{P_{r_j}}_{\vec{a}}\vec{c}=|\vec{a}|OM$$

于是$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$．

可见，由$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，不能推断$\vec{b}=\vec{c}$．这与数的乘积性质迥然不同．

4）两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的模相等且方向相同时，则$\vec{a}=\vec{b}$成立而$|\vec{a}|=|\vec{b}|$时$\vec{a}=\vec{b}$不一定成立．例如，$|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$，但是$\vec{i}\neq\vec{j}$．

5）$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$是一个与$\vec{a}$共线的向量．当$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$时$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$与$\vec{a}$同向；当$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$时$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$与$\vec{a}$反向．而$\vec{a}\times\vec{b}$是垂直于$\vec{a}$，$\vec{b}$的向量，因此$\vec{a}\times\vec{b}$与$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$垂直，故$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}\cdot\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$必成立．而不是上述解中所说的"不一定"．

【例1.2】 如图1-2，已知$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，圆A的半径为r，PQ是任一直径，试用a，b，c，r表示$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$的最小值．

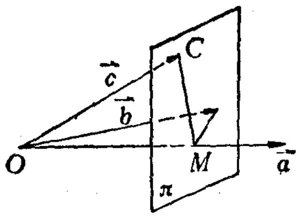

图1-1

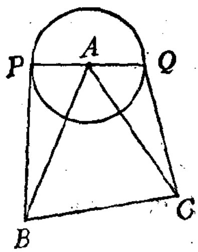

图1-2

某解 由图1-2可见，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}$，利用数量积的分配律，有

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})$$

$$= -\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},$$

因为$|\overrightarrow{AP}|^2=r^2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=bc\cos A$
$=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$，故

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-r^2+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$$

由此可见，当$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$即$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{CB}$时，

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-r^2+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

为最小值.

分析 上述解法导出关系式$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=-r^2+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$是正确的．问题在于如何确定$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$的最小值.

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{AP}|\cos(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AP}})$$

$$=ar\cos(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AP}})$$

是数量，但并非是“非负”的．因此上述解法中，把$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$当作$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$的最小值是错误的．$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$的最小值当$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{CB}$反向平行时取得．即

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}=-ar.$$

从而得到，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$的最小值是$\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)-r^2-ar$.

【例1.3】 设$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=45^\circ$，求以向量$\vec{a}+3\vec{b}$和$3\vec{a}+\vec{b}$为边的平行四边形的面积.

某解 按平行四边形的面积公式

$$S=|(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})|$$
$$=|3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}|$$

$=|3\vec{a}^2+10\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{b}^2|$

$=|3\cdot 2^2+10\cdot 2\cdot 3\sin 45°+3\cdot 3^2|$

$=39+30\sqrt{2}$,

于是所求平行四边形的面积等于$39+30\sqrt{2}$.

分析 以向量$\vec{a}+3\vec{b}$和$3\vec{a}+\vec{b}$为边的平行四边形的面积在数值上等于向量$\vec{a}+3\vec{b}$和$3\vec{a}+\vec{b}$的向量积的模. 即

$$S=|(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})|$$

上述解中面积计算公式是对的，但在向量运算过程中有错误：

1）向量积$\vec{a}\times\vec{a}\neq\vec{a}^2$，通常记数量积$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$，据定义$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$，$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$.

2）交换律对向量积不成立，有运算规律$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$，因此上述运算中

$$\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}\neq\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{a}\times\vec{b}=10\vec{a}\times\vec{b}.$$

3）上述求解过程中，从$|3\vec{a}^2+10\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{b}^2|$化到$|3\cdot 2^2+10\cdot 2\cdot 3\sin 45°+3\cdot 3^2|$，一错再错，在这一步里，$\vec{a}\times\vec{b}$竟用$|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$代入，应注意

$$\vec{a}\times\vec{b}\neq|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

而是

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

解

$$\begin{aligned}S&=|(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})|\\&=|3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}|\\&=|\vec{0}+\vec{a}\times\vec{b}-9\vec{a}\times\vec{b}+\vec{0}|\\&=|-8\vec{a}\times\vec{b}|\\&=8|\vec{a}\times\vec{b}|\\&=8|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\end{aligned}$$

$$=8\cdot 2\cdot 3\cdot \sin 45^\circ$$
$$=24\sqrt{2}.$$

【例1.4】 求与yOz平面平行且垂直于向量$\vec{a}=\{5,4,3\}$的单位向量.

某解 、设$\vec{b}=\{x,y,z\}$是平行yOz平面且垂直于$\vec{a}$的向量. 因为$\vec{b}$平行yOz平面，所以$\vec{b}\perp\vec{i}$，有

$$\vec{b}\cdot\vec{i}=1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0,$$

由此得$x=0$，故$\vec{b}=\{0,y,z\}$.

又因为$\vec{b}\perp\vec{a}$，故得$\vec{a}\cdot\vec{b}=4y+3z=0$，即$y=-\frac{3}{4}z$，

因此$\vec{b}=\left\{0,\ -\frac{3}{4}z,\ z\right\}$，所求单位向量

$$\vec{b}_0=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{3}{4}z\right)^2+z^2}}\left(-\frac{3}{4}z\vec{j}+z\vec{k}\right)$$
$$=-\frac{3}{5}\vec{j}+\frac{4}{5}\vec{k}.$$

分析 上述解法利用“$\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$”求得平行$yOz$平面且垂直于$\vec{a}$的向量$\vec{b}$，方法是正确的，但是遗漏了一个解$-\vec{b}$. 满足题设条件的单位向量应当有两个. 即

$$\vec{b}_0=\pm\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

解一 方法同上解，应注意到有两解

$$\vec{b}_0=\pm\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\pm\left(-\frac{3}{5}\vec{j}+\frac{4}{5}\vec{k}\right).$$

解二 因为$\vec{b}$平行yOz平面，所以$\vec{b}\perp\vec{i}$，又$\vec{b}\perp\vec{a}$，所以可取

$$\vec{b}=\vec{i}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 5 & 4 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{j}+4\vec{k},$$

20

于是所求单位向量为

$$b_0=\pm\frac{b}{|\vec{b}|}=\pm\frac{-3\vec{j}+4\vec{k}}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

$$=\pm\left(-\frac{3}{5}j+\frac{4}{5}k\right).$$

【例1.5】 以向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$为边作平行四边形，$\overrightarrow{AD}$垂直$\overrightarrow{OB}$于$D$，求$\triangle ODA$的面积.

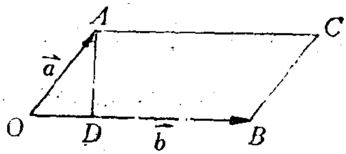

图1-3

某解 由图1-3可见，$\triangle ODA$的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{AD}|.$$

因为$\overrightarrow{OD}=\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OA}=\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$，故得

$$|\overrightarrow{OD}|=|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}|=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为边的平行四边形面积$S_1=\vec{a}\times\vec{b}$。另一方面，$S_1=|\vec{b}||\overrightarrow{AD}|$，故得$|\vec{b}||\overrightarrow{AD}|=\vec{a}\times\vec{b}$，因此

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

代入S，得

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|}\cdot\frac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{b}|}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})}{2|\vec{b}|^2}.$$

分析 上述解法利用数量积和向量积求$\triangle ODA$的底边和高. 求解过程中出现一些概念性的错误如下：

1）$\overrightarrow{OD}\neq\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OA}$. 左端$\overrightarrow{OD}$是向量，而右端$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OA}$表示$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OB}$上的投影，它定义为有向线段$\overrightarrow{OD}$的值$OD$是数量，向量与数量不能用"="联起来.

2）由数量积定义有$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$，因此得

$$|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}|=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}.$$

然而，上述解中却得出

$$|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}|=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

它一般是不成立的．例如，当$\frac{\pi}{2}<(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\leqslant\pi$时，$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=-(\vec{a}\cdot\vec{b})$，那末

$$|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}|=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

3）按向量积定义，$S_1=|\vec{a}\times\vec{b}|$，即平行四边形$OBCA$的面积等于向量积$\vec{a}\times\vec{b}$的模．上述解中把$\vec{a}\times\vec{b}$当作$S_1$，又将向量与数量混淆了。

解 $\triangle ODA$的面积$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{AD}|$．按数量积定义，有

$$|\overrightarrow{OD}|=|\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OA}|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|},$$

按向量积定义，有

$$|\overrightarrow{AD}|=\frac{S_1}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{b}|},$$

于是

$$S=\frac{1}{2}\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}||\vec{a}\times\vec{b}|}{2|\vec{b}|^2}.$$

1.2 空间平面与直线

【例1.6】 设一平面π垂直于平面$z=0$，并通过从点

$P(1,-1,1)$ 到直线 L：$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，求平面的方程.

某解 所求平面π通过点$P(1,-1,1)$，故平面π方程为

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-1)=0.$$

由题设，平面π过点P到直线L的垂线，因此平面π的法向量$\vec{n}$平行于直线L的方向向量$\vec{s}$，由$\vec{n} \parallel \vec{s}$得$\vec{n}=k\vec{s}$. 从直线$L$的方程可求得其方向向量

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\{0,-1,-1\},$$

于是

$$\{A,B,C\}=k\{0,-1,-1\},$$

由此得 $A=0$，$B=-k$，$C=-k$. 代入平面π方程，有

$$-k(y+1)-k(z-1)=0,$$

消去k，得所求平面π方程为

$$y+z=0.$$

分析 据题意，所求平面π还需垂直平面$z=0$，即平面π的法向量$\vec{n}$应垂直平面$z=0$的法向量$\vec{k}$. 但是上述求解过程并没有涉及这一条件就求得平面π的方程为$y+z=0$，其法向量$\vec{n}=\{0,1,1\}$. 然而，$\vec{n}\cdot\vec{k}=0\cdot0+1\cdot0\cdot0+1\cdot1\cdot1=-1\neq0$，说明$\vec{n}$不垂直$\vec{k}$，因此上述平面方程$y+z=0$并非所求. 错误何在呢？在于上述解法根据“平面$\pi$通过点$P$到$L$的垂线”推出“$\vec{n}\parallel\vec{s}$”的结论，这是不成立的. 因为平面$\pi$通过点$P$到直线$L$的垂线，平面$\pi$与直线$L$却不一定垂直，故$\vec{n}$与$\vec{s}$不一定平行（$\vec{s}$为直线$L$的方向向量）.

解一 过点$P(1,-1,1)$的平面π方程为

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-1)=0.$$

因为平面π垂直于平面$z=0$，故

$$\vec{n}\cdot\vec{k}=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 1=C=0,$$

于是得平面π方程

$$A(x-1)+B(y+1)=0.$$

为了确定平面π，作一平面π_1：它过点$P(1,-1,1)$且垂直于直线L．取直线L的方向向量$\vec{s}=\{0,1,1\}$，得平面π_1方程为

$$1\cdot(y+1)+1\cdot(z-1)=0,$$

即

$$y+z=0.$$

再求直线L与平面π_1的交点，即从点P到L的垂线的垂足．直线L：$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的参数方程为

$$x=0,\quad y=t,\quad z=1+t.$$

代入平面π_1的方程中，求得$t=-\dfrac{1}{2}$，从而得交点

$\left(0,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

因为平面π通过从点P到L的垂线，故过垂足$\left(0,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，代入平面$\pi$方程，有

$$A(0-1)+B\left(-\frac{1}{2}+1\right)=0,$$

$$A=\frac{B}{2}.$$

于是，所求平面π的方程为

$$x+2y+1=0.$$

解二　解一中已得，过点$P(1,-1,1)$且垂直平面$z=0$的平面π方程为

$$A(x-1)+B(y+1)=0.$$

直线L：$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的对称式方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}\text{（取方向向量}\vec{s}=\{0,\ 1,\ 1\}\text{）}.$$

过点$P(1,-1,1)$作直线L的垂线L_1，设其方程为

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-1}{n}\text{（取方向向量}\vec{s}_1=\{l,m,n\}\text{）}.$$

因为L_1垂直L，故有$\vec{s}_1\cdot\vec{s}=l\cdot 0+m\cdot 1+n\cdot 1=0$，即

$$m+n=0. \tag{1.1}$$

又由L_1与L共面，有

$$\begin{vmatrix} 1-0 & -1-0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,$$

即

$$-n+l+m=0. \tag{1.2}$$

令$n=1$，由(1.1)及(1.2)解得$l=2$，$m=-1$，因此垂线L_1的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

在L_1上取一点$x=3$，$y=-2$，$z=2$代入平面π方程，有

$$A(3-1)+B(-2+1)=0,$$

$$2A=B,$$

于是π的方程为

$$A(x-1)+2A(y+1)=0.$$

消去A，得

$$x+2y+1=0$$

为所求平面方程.

【例1.7】 由方程组$\begin{cases}2x-y-3=0\\x+y-y=0\end{cases}$确定的直线$L_1$与由方程组$\begin{cases}2x-y-3=0\\3x-z-3=0\end{cases}$确定的直线$L_2$相同吗？

某解 直线L_1是平面π_1：$2x-y-3=0$与平面π_2：$x+y-z=0$的交线；而直线L_2是平面π_1：$2x-y-3=0$与平面π_3：$3x-z-3=0$的交线，因此L_1与L_2不相同.

分析 直线的一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

它不是唯一的，可由以它为交线的任何两个平面来表示.

上述解仅根据两个方程组的形式不同，就得出它们表示不同直线的结论，这样判断是不妥的.

解 由直线L_1的方程组

$$\begin{cases}2x-y-3=0\\x+y-z=0,\end{cases}$$

中消去y，就得到方程$3x-z-3=0$.

由直线L_2的方程组

$$\begin{cases}2x-y-3=0 & (1.3)\\3x-z-3=0, & (1.4)\end{cases}$$

(1.4) − (1.3) 得方程$x+y-z=0$.

可见两个方程组等价，故它们表示同一条直线.

【例1.8】 试确定下列各组直线的关系，

1) L_1: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$,

L_2: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-4}{4}$;

2) L_1: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$,

L_2: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$.

某解 1) 直线L_1过点 (1,0,0) ，方向向量为$\vec{s}_1=\{2,3,4\}$；直线L_2过点 (3,3,4) ，方向向量为$\vec{s}_2=\{2,3,4\}$. 虽则$\vec{s}_1=\vec{s}_2$，但L_1和L_2分别过不同的点，因此L_1与L_2平行.

2) 直线L_1的方向向量$\vec{s}_1=\{4,3,1\}$，直线L_2的方向向量$\vec{s}_2=\{2,-3,2\}$，因为$\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$的坐标不成比例，所以L_1与L不平行，而是相交.

分析 1) 上述解中，根据$\vec{s}_1=\vec{s}_2$及L_1和L_2分别过不同的点，判断L_1与L_2平行. 然而，L_1与L_2不仅平行，而且是重合.

事实上，L_1上的点 (1, 0, 0) 满足L_2方程，

$$\frac{1-3}{2}=\frac{0-3}{3}=\frac{0-4}{4}=-1.$$

同样，L_2上的点 (3, 3, 4) 满足L_1方程，

$$\frac{3-1}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=1,$$

故L_1与L_2是重合的.

2) 由于$\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$的坐标不成比例，上述解判断L_1与L_2不平行是正确的. 但不平行未必一定相交. 因此，立即判断相交是不妥的.

根据两直线$\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$与$\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}$

$=\frac{z-z_2}{n_2}$共面的充要条件

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0,$$

由行列式

$$\begin{vmatrix} -1-2 & 2-(-1) & 4-3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=-63\neq 0,$$

可知L_1与L_2不共面，故L_2和L_1是既不平行又不相交的异面直线.

【例1.9】 下列两直线

$$L_1:\ \frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4},\quad L_2:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2},$$

是否相交？如果相交，试求交点.

某解 直线L_1: $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}$的参数方程为

$$x=2t,\quad y=-3+3t,\quad z=4t.$$

直线L_2: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}$的参数方程为

$$x=1+t,\quad y=-2+t,\quad z=2+2t.$$

如果L_1与L_2相交，其交点$(x,\ y,\ z)$既在L_1上，又在L_2上，因此

$$\begin{cases} 2t=1+t, \\ -3+3t=-2+t, \\ 4t=2+2t. \end{cases}$$

从这个方程组的第一个方程得$t=1$，从第二个方程得；