理论力学 材料力学 弹性力学 指导书

力学指导书编写组 编

華中工学院出版社

内 容 简 介

本书分理论力学、材料力学、弹性力学三大部分．分别对三门 课程的基本概念、基本理论、主要公式及应用等作了扼要分析与阐述．各 章配有不同类型的例题和复习参考题共200余道（凡单号参考题均给出了答案），其中多数系由近年及1983年硕士研究生入学考题中精选而来．书中部分章节与现行教学大纲和通用教材相比，作了适当扩充，以达指导书之明显效果．

本书主要对象是准备报考理工专业硕士学位研究生的考 生，有关专业大学高年级学生、青年教师，有关专业的工程技术人员 以 及 业 余 大学、电视大学的学生和自学青年．

理论力学
材料力学 指导书
弹性力学

力学指导书编写组编

责任编辑 佟文珍

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行 各地新华书店经售

武汉市江汉印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：13.25 字数：303,000

1983年8月第一版 1983年8月第一次印刷

印数：1—30,000

统一书号：15255－005 定价：1.40元

前　言

理论力学、材料力学和弹性力学三门课程，在理工学院大学本科生教学计划中占有十分重要的地位。在攻读硕士学位研究生的入学考试中，这三门课均分别列为有关专业的考试课程。为了帮助广大考生在较短的时间内进行较深入的复习，加深对这些课程基本内容的理解，建立清晰的概念与思路，提高分析能力与解题技巧，编者汇集了多年教学工作的点滴体会，并分析了近年来硕士研究生入学考题中出现的一些问题编写了本书。根据多数学校使用的有关教材，我们约定：以南京工学院等九院校合编（南工、西安交大主编）的《理论力学》（上、下册）、浙江大学等九院校合编（刘鸿文主编）的《材料力学》（上、下册）、以及徐芝纶编《弹性力学》等三种书作为基本教材，在本书有关部分的说明和引用中除《弹性力学》外，均简称《教材》。书中各部分使用的名词术语、外文符号和计量单位等，尽量做到与这三种《教材》一致。

本书分三大部分，理论力学部分按静力学、运动学与动力学的顺序，分别阐述其主要理论与定理，然后着重讨论各种类型问题的多种分析与解题方法。材料力学部分，第一、二两章简要地把杆件四种基本变形的应力与变形的计算方法进行了分析、对比与归纳，继而对本课程的若干基本假设、概念与理论作了进一步的阐述。对梁的变形计算方法，在《教材》的基础上增加介绍了“虚梁法”（又称共轭梁法），以便于计算梁的少数指定截面的挠度与转角。三、四、五、六章分别讨论了梁

的内力图、能量法求变形、超静定系统的解法与超弹性计算四个问题。弹性力学部分就平面问题、空间问题、能量原理与变分法、复变函数法、有限差分法等问题简明地综述了基本方程与各种问题的解法，强调了解题的思路与途径。书中搜集了200余道例题和复习参考题，其中多数选自近年(1983年考题在内）来理工院校的研究生考题，对这部分题目保留了原题中采用的单位制。为了便于读者检核自己解题的正误，凡单号题均给出了答案。

参加本书编写工作的同志及分工如下

理论力学部分：第一章由王贤章编写，第二章由余天庆编写，第三至五章由尹肃秋编写。

材料力学部分：第一至三章由刘烈全编写，第四至六章由章显庄编写。

弹性力学部分：由赵廷仕编写，皮道华审稿。

由于编者水平有限，时间上又颇为紧迫，缺点和错误在所难免，敬请读者提出宝贵意见，以利改正。在此，也同时对本书给予支援的同志致以深切的谢意。

编　者

一九八三年三月于华中工学院力学系

目　录

第二部分 材料力学

第三部分 弹性力学

第一部分　理论力学

本部分分为静力学、运动分析、动力学普遍定理、机械振动基础和拉格朗日方程等五章.

静力学以平衡方程的应用为主，重点讨论具有摩擦的平衡问题. 虚位移原理包括在这一章里，同时还附带地讲了平衡问题的能量判据和稳定性.

运动分析以点的复合运动和刚体的平面运动为主，在运动的综合分析和应用方面，花了一定的篇幅.

动力学中动量定理的应用偏重于碰撞问题，并对动量矩定理、动能定理、达朗伯原理等的综合应用均另立节次，平面运动动力学问题也花了一定篇幅，且在应用动量矩定理时，对矩心的选取问题作了适当的介绍和分析，以加深对动量矩定理的认识.

对某些内容，如两个自由度系统的振动、平衡问题的能量判据和稳定性等问题的阐述，已超出目前教学大纲的要求。

第一章　静力学的研究方法

1.1.1　力系简化理论要点

力系简化问题，即用一个最简单的并且和原力系等效的力系来代替原有力系，由此导出任意力系的平衡条件。力系简化的依据是力的平移定理，在说明力的平移定理之前，有两点先要明确。

其一，力对点之矩的矢量表示法

任意力$\boldsymbol{F}$对O点之矩用矢量表示为（图1.1.1）

$$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \qquad (1.1.1)$$

即力对点之矩等于矩心到力作用点的矢径与力的矢量积。

若以O为矩心，建立空间直角坐标系$Oxyz$，见图1.1.2

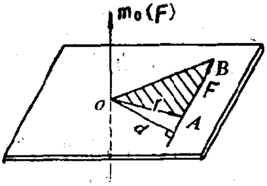

图1.1.1

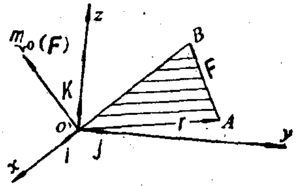

图1.1.2

由于　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{F}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$

则有

$$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$$

$$= (yZ - zY)\boldsymbol{i} + (zX - xZ)\boldsymbol{j} + (xY - yX)\boldsymbol{k} \qquad (1.1.2)$$

其二，力对点的矩与力对通过该点之轴的矩之间的关系

若$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})$表示$\boldsymbol{F}$对$O$点的矩矢，而$z$轴通过$O$点。$\boldsymbol{F}$对$z$轴之矩为$m_z(\boldsymbol{F})$，如图1.1.3。则有

$$[\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})]_z = m_z(\boldsymbol{F}) \qquad (1.1.3)$$

即力对一点的矩矢在通过该点的任意轴上的投影等于这力对该轴的矩。

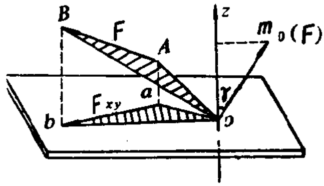

图1.1.3

由式(1.1.2)及式(1.1.3)有

$$\left.\begin{aligned}
[\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})]_x &= m_x(\boldsymbol{F}) = yZ - zY \\
[\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})]_y &= m_y(\boldsymbol{F}) = zX - xZ \\
[\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})]_z &= m_z(\boldsymbol{F}) = xY - yX
\end{aligned}\right\} \quad (1.1.4)$$

力的平移定理：作用在物体上的力$\boldsymbol{F}$可以平移到任一点，但必须同时附加一力偶，此附加力偶的矩等于原来的力$\boldsymbol{F}$对新点的矩。即$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$，如图1.1.4所示。

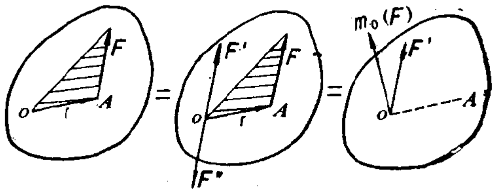

图1.1.4

任意力系的简化：设刚体上作用有任一力系$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、…、$\boldsymbol{F}_n$，现要求将它向任一点O简化。根据力的平移定理，将各力平行搬移到O点，O称为简化中心。这样有一作用于O点的空间汇交力系$\boldsymbol{F}'_1$、$\boldsymbol{F}'_2$、…，$\boldsymbol{F}'_n$和一附加力偶系$\boldsymbol{m}_1$、$\boldsymbol{m}_2$…、$\boldsymbol{m}_n$。而附加力偶的力偶矩分别等于$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F}_1)$、$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F}_2)$…、

$m_0(F_n)$。这时空间汇交力系F'_1、F'_2、…、F'_n与力偶系m_1、m_2、…、m_n与原力系F_1、F_2、…、F_n等效。

将空间汇交力系F'_1、F'_2、…、F'_n合成，得到作用线通过简化中心的合力R'，其力矢量R'等于F_1、F_2、…、F_n的矢量和。

$$R' = \Sigma F_i \qquad (1.1.5)$$

R'称为原力系的主矢。

同样由力偶系m_1、m_2、…、m_n得到一合力偶矩矢M_0。其力偶矩矢量M_0等于m_1、m_2、…、m_n的矢量和。

$$M_0 = \Sigma M_i = \Sigma m_0(F_i) \qquad (1.1.6)$$

M_0称为原力系对简化中心的主矩。

由此得出结论：在一般情况下，任意力系向一点O简化，可得一个力和一个力偶，这个力等于该力系的主矢，力偶的矩等于该力系对简化中心的主矩。但是，主矢与简化中心的位置无关，而主矩与简化中心的位置有关。

力系向简化中心简化而得到的主矢与主矩，并非最后结果，可有下面三种情形。

一、力系可以简化为一合力偶的情形

即

$$M_0 \neq 0 \qquad R' = 0$$

二、力系可以简化为一合力的情形

1 当$M_0 = 0$　　$R' \neq 0$

即合力的作用线通过简化中心，其大小和方向等于原力系的主矢。

2 当$M_0 \neq 0$　　$R' \neq 0$　　但$M_0 \perp R'$

这时与原力系等效的力和力偶都在同一作用面内，如图1.1.5。显然可以简化为一合力R，其作用线到简化中心的距离为

$$d=\frac{M_0}{R}=\frac{M_0}{R'}$$

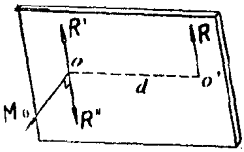

图1.1.5

三、力系可简化为一力螺旋的情形

1 当$M_0 \neq 0$ $R' \neq 0$ 但$M_0 // R'$

这时原力系简化为一个力和一个力偶（力矢R'通过简化中心），它们是二个基本要素组成的最简单的力系，如图 1.1.6 所示。此力系即构成力螺旋。

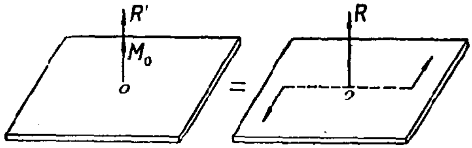

图1.1.6

2 当$M_0 \neq 0$ $R' \neq 0$ 但M_0与R'成任意夹角φ。这时将主矩M_0分解为两个分矢量M_0'与M_0''，使$M_0' // R'$，$M_0'' \perp R'$，如图1.1.7所示。

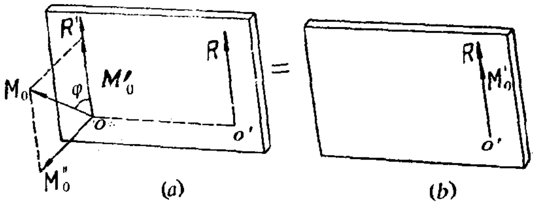

图1.1.7

由于$M_0'' \perp R'$，则M_0''与R'可简化为一合力R，R到简化中心的距离$OO'=\frac{M_0''}{R'}$。

由于$M_0'//R'$，而M'为自由矢量，则可平行移到O'，对于O'有一力R及力偶M_0'。显然R与M_0'也是力螺旋。

例1.1.1 沿长方体的不相交且不平行的棱作用三个相等的力P，问棱a、b和c在什么关系下，这个力系才能简化为一合力？（华中工学院1982年试题）

解：取坐标如图1.1.8所示

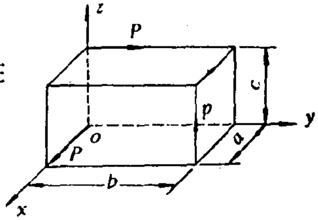

图1.1.8

设力系向O点简化，则主矢R在三坐标轴上的投影为

$R_x = P \quad R_y = P \quad R_z = P$

主矩M_0在三坐标轴上的投影为

$$M_x = \Sigma m_x(F) = Pb - Pc$$

$$M_y = \Sigma m_y(F) = -Pa$$

$$M_z = \Sigma m_z(F) = 0$$

要使力系简化为一合力的条件是主矢R与主矩M_0相互垂直。即有$R \cdot M_0 = 0$

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = P(Pb - Pc) + P(-Pa) + P \cdot 0 = 0$$

故得

$$a = b - c$$

1.1.2 平衡方程的应用

上述在一般情况下，任意力系向一点简化，可得一主矢R'和一主矩M_0。如果主矢R'和主矩M_0都为零

即 $R' = 0 \qquad M_0 = 0$

则原力系为平衡力系。上述条件可用数学方程表示为

$$\left.\begin{matrix} \Sigma X = 0 & \Sigma Y = 0 & \Sigma Z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (1.1.7)$$

这六个方程就是空间力系的平衡方程。它们表示空间任意力系为平衡力系的必要与充分条件。即力系中所有力在任意三坐标轴中的每一轴上投影的代数和等于零；所有力对每一轴的矩的代数和等于零。

其他力系的平衡方程，可由空间任意力系的平衡方程推导出来，现分别讨论如下。

一 空间平行力系的平衡方程

若有一空间平行力系F_1、F_2、…、F_n，取z轴和这些力的作用线平行。如图1.1.9所示。

则有 $\Sigma X \equiv 0$， $\Sigma Y \equiv 0$ $\Sigma M_z \equiv 0$

因此空间平行力系的平衡方程为

$$\Sigma Z = 0 \qquad \Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad (1.1.8)$$

二 空间汇交力系的平衡方程

若有一空间汇交力系F_1、F_2、…、F_n，其力的作用线汇交于O点，取汇交点为坐标原点，如图1.1.10。则有$\Sigma M_x \equiv 0$，$\Sigma M_y \equiv 0$，$\Sigma M_z \equiv 0$。

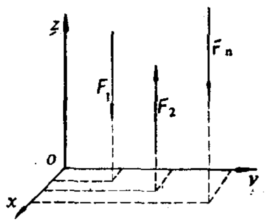

图1.1.9

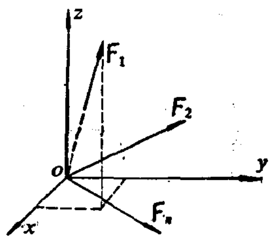

图1.1.10

因此空间汇交力系的平衡方程为

$$\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma Z = 0$$

(1.1.9)

三 平面任意力系的平衡方程

若一力系F_1、F_2、…、F_n的作用线均在同一平面内，如图1.1.11所示则有 $\Sigma Z \equiv 0$ $\Sigma M_x \equiv 0$ $\Sigma M_y \equiv 0$

因此平面一般力系的平衡方程为

$$\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{1.1.10}$$

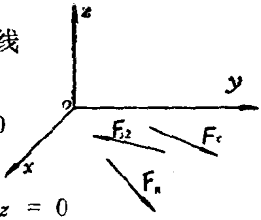

图1.1.11

用同样的分析方法还可导出平面平行力系与平面汇交力系的平衡方程分别为

$$\left.\begin{array}{ll}\Sigma X = 0 & \Sigma Y = 0 \\ \Sigma Y = 0 & \Sigma M_0 = 0\end{array}\right\} \tag{1.1.11}$$

在一般情况下，投影平衡方程的坐标轴与力矩平衡方程中的矩心是可以任选的，但这样处理往往给解平衡方程带来麻烦。为使所列平衡方程中的未知量较少，一般取某一坐标轴与要求的未知力垂直，使两未知力的交点为矩心。这样在投影平衡方程中少了一未知量，在力矩平衡方程中少了两个未知量。从而简化了计算。

在列力矩平衡方程时，有时会遇到力臂难求的问题，这时用合力矩定律较为方便。

这些处理问题的方法，要依问题的具体情况灵活掌握。举例说明。

例1.1.2 三根无重且等长的刚杆AB、CD与EF，在各杆的中点D、F、B用铰链相互连接。A是固定支座，C是可动支座。铅垂载荷为Q。如要求铰链D的反力，试确定最佳的题解方案（只需写出解题步骤，画出受力图，列出平衡方程，作必要的说明即可，不要作具体的计算）。（浙江大学试题）

解：现在的问题是只要求中间铰链D的反力，主动力为Q。

先取整体为研究对象。设杆长为$2l$。受力图如图1.1.12(a)，图中有四力：Q、N_{Ax}、N_{Ay}、N_C，其中未知力有N_{Ax}、N_{Ay}与N_C，但没有必要都解出，只解出N_C便行了。故取N_{Ax}与N_{Ay}的交点A为矩心，列平衡方程

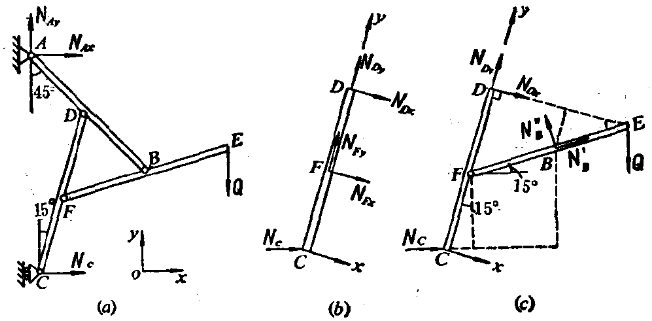

图1.1.12

$$\Sigma m_A = 0 \qquad N_C(l\cos45° + 2l\cos15°) - Q(2l\sin45° + l\cos15°) = 0$$

即可求出N_C。

再取CD杆为研究对象，受力图如图1.1.12(b)，图中有五个力，其中N_{Dx}、N_{Dy}、N_{Fx}与N_{Fy}为未知量，故选F为矩心。则有

$$\Sigma m_F = 0 \qquad N_C l\cos15° - N_{Dx} l = 0$$

即可求出N_{Dx}。

最后取CD与EF为研究对象，受力图如图1.1.12(c)，共有六力，其中N_{Dy}、N_B'、N''_B为未知量，故选B点为矩心，则有