2001年考研辅导教材

2001 NIAN SHUO SHI YAN JIU SHENG RU XUE KAO SHI YING SHI JIAO CHENG

2001

硕士研究生入学考试

应试教程

（数学分册）

经济类

编　写　考研命题研究组

编　著　北京大学数学科学学院

田　勇　郭玉霞

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

考 研 辅 导 教 材

硕士研究生入学考试应试教程(数学分册)

[经济类]

编 写 考研命题研究组
编 著 北京大学数学科学学院
田 勇 郭玉霞
总策划 胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北 京

C0484705

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试应试教程. 数学:经济类/田勇,郭玉霞编著.
-北京:科学技术文献出版社,2000.5

ISBN 7-5023-3544-7

Ⅰ.硕... Ⅱ.①田...②郭... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 18783 号

出　　版　　者:科学技术文献出版社
邮 购 部 电 话:(010)62579473-8100
图书发行部电话:(010)62534708,62624508,62624119
门 市 部 电 话:(010)62534447,62543201
图书发行部传真:(010)62579473-8002
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策 划 编 辑:胡东华
责 任 编 辑:赵　斌
责 任 校 对:赵　斌
封 面 设 计:胡东华
发　　行　　者:科学技术文献出版社发行
新华书店总店北京发行所经销
印　　刷　　者:河北香河新华印刷有限公司
版 (印) 次:2000 年 4 月第 1 版　2000 年 4 月第 1 次印刷
开　　　　本:787×1092　16 开
字　　　　数:881 千字
印　　　　张:25.5
定　　　　价:28.00 元

(京)新登字 130 号

前　　言

依据新修订的硕士研究生入学数学(经济类)考试大纲(数学三、数学四),根据作者多年命题经验,在作者主编的《数学考研辅导教材》的基础上编写了这本书。

原辅导教材出版多年来备受广大读者的欢迎,本书保留了原教材的优点,并作了较大修改。

本次修订的最大特点是我们在每一节的开头,用表格的形式分类列出这一节的主要内容,目的是使读者一目了然。

其次,本书修订改变了原书的结构,把基础知识纳入了表格,从而与例题孑然分开,目的是使读者专心于基础知识或例题。

第三个特点是充实了"历届试题小结",目的是使读者更清楚考研命题趋势及特点。

本书不仅是硕士研究生入学考试应试者的复习用书,也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的经济类院校的本科生、大专生、电大、夜大的学生的参考书。也便于自学者阅读。

本书的修订体例,由胡东华先生策划,特此致谢。

由于水平有限,书中不妥之处,欢迎读者指正。

编　者

2000 年 3 月

目　　录

第一篇　　高等数学

第一章　一元函数微分学

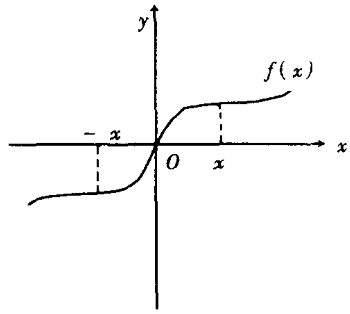
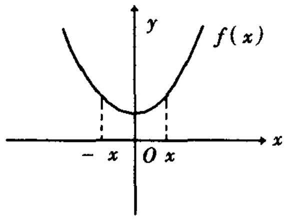
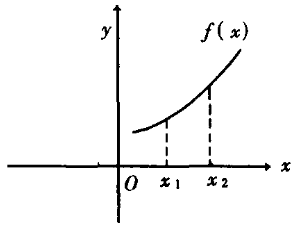
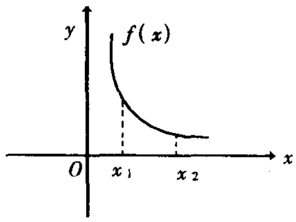
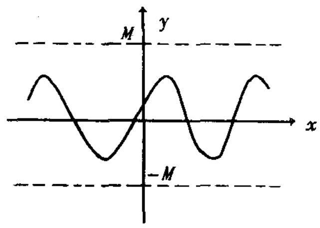
§1　函数

§1.1　考试内容及理解记忆方法

表 1.1.1 函数及相关的定义

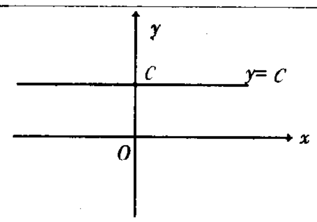
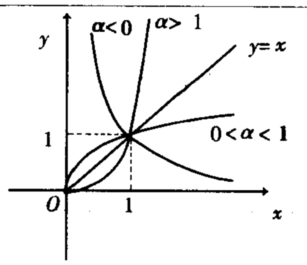
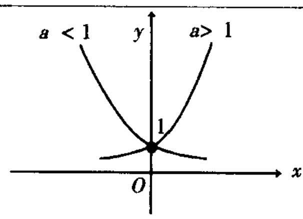
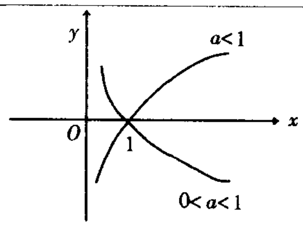
名称	定　义	要点	补充说明
函数	给定集合 X，若存在某种对应规则 f，对于 $\forall x \in X$，存在唯一 $y \in R$ 与之对应，称 f 是从 X 到 R 的一个函数，记作 $y = f(x)$；X 称为定义域，x 称为自变量，y 为因变量 $\{f(x) \mid x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$，称 g 与 f 的复合函数. 记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \cdot g$	对应规则、定义域，值域	结合律成立 $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$，但没有交换律，即 $f \cdot g \neq g \cdot f$
一一对应	设 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1, x_2 \in X$，若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$，或者由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y
反函数	设 $y = f(x)$ 在 X 上是一一对应的，值域为 Y，$\forall y \in Y$，用满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应，由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数		$f: X \to Y$； $f^{-1}: Y \to X$； $f^{-1}(f) = I_X: X \to X$； $f(f^{-1}) = I_Y: Y \to Y$； $(f^{-1})^{-1} = f: X \to X$； I_X 表 X 上恒同变换
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	
分段函数	对于自变量的某些不同值(或在不同区间上)函数的表达式不同		例 1) 绝对值函数 2) 符号函数 3) Dirichlet 函数
隐函数	凡是能够由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数关系称为隐函数		例：方程 $y - x - \varepsilon \sin y = 0$ 其中 ε 是常数 $0 < \varepsilon < 1$

表 1.1.2 函数的有限性、单调性、周期性和奇偶性

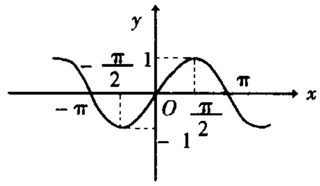
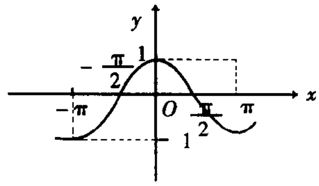
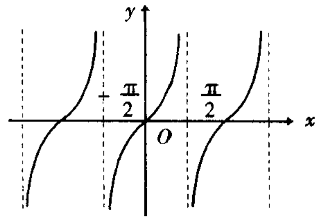
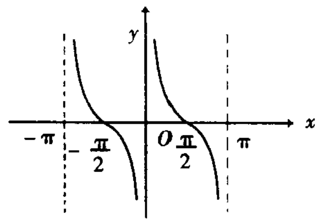
性质	定	义	图例或说明
奇偶性	奇函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x, -x \in X$，且 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x, -x \in X$，且 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数	
单调性	单调上升(单调递增)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1, x_2 \in X$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	
	单调下降(单调递减)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，$\forall x_1, x_2 \in X$，由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	
	若严格不等号成立，则称严格单调上升(下降)		
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义，若 $\exists M > 0$，$\forall x \in X$，有 $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$，(或 $\exists m, M$，使得 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立)，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数		 即函数的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间

性质	定　　　义	图例或说明
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,若 $\forall M>0$, $\exists x' \in X$, 使得 $\lvert f(x') \rvert > M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无界	例:$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界,因为 $\forall M>0$,取 $x'=\dfrac{1}{3M}$,则 $f(x')=3M>M$
周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义,若 $\exists T>0$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数.若在无穷多个周期中,有最小的正数 T,则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期,简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期,则1° $f(x+kT)=f(x)$,(k 为整数);2° $f(ax+b)$($a\neq0$, $b\in R$)是一个以 $\left\lvert\dfrac{T}{a}\right\rvert$ 为周期的函数

表 1.1.3 基本初等函数性质及其图形

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x)=C$,$(-\infty<x<+\infty)$.平行于 x 轴,过 $(0,C)$ 点的直线	
幂函数	$y=x^{\alpha}$,$(0<x<+\infty,\alpha\neq0)$ $\alpha>0$ 时,函数 x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $\alpha<0$ 时,函数 x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=x^{\alpha}$ 与 $y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^x$($a>0,a\neq1$) $a>1$ 时,函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时,函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格下降	
对数函数	$y=\log_a x$($a>0,a\neq1,0<x<+\infty$) $a>1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数.(若 $a=e$,记 $y=\log_e x$ 为 $y=\ln x$)	

续表 1.1.3

名称	定义式及性质	图例
三角函数	正弦函数 $y = \sin x, (-\infty < x < +\infty)$	
	余弦函数 $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), (-\infty < x < +\infty)$	
	正切函数 $y = \tan x (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	
	余切函数 $y = \cot x (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	

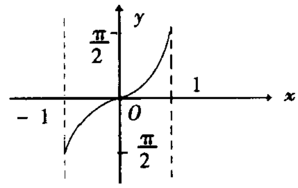
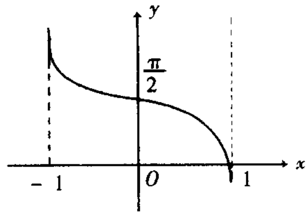
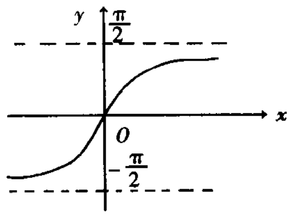
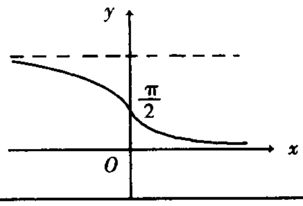
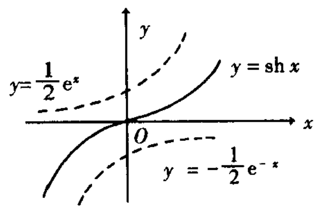
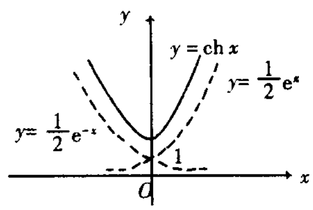
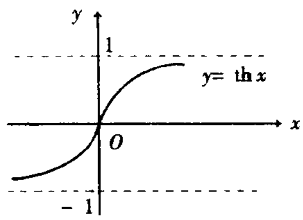
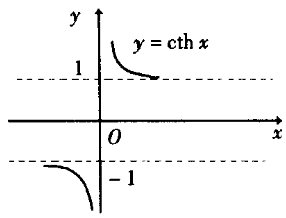
名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x,\left(-1\leqslant x\leqslant 1,-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$	
	反余弦函数 $y=\arccos x,(-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \pi)$	
	反正切函数 $y=\arctan x,\left(-\infty<x<+\infty,-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$, $(-\infty<x<+\infty,0<y<\pi)$	

表 1.1.4 双曲函数

名称	定　　义	图　形
双曲正弦	$y = \mathrm{sh}x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$	
双曲余切	$y = \mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$	

§1.2　典型例题解析

> **判别函数 $f(x)$ 在 X 上单调性的常用方法为:**
> **(1) 用单调性定义;**
> **(2) 利用导数 $f'(x)$。**

例 1　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 又

$$F(x) = \int_0^x [x^{2n} - (2n+1)t^{2n}] f(t)\mathrm{d}t.$$

其中 $n \geqslant 1$ 为整数. 就 $f(x)$ 的单调性, 讨论 $F(x)$ 的单调性.

解: 由已知得 $F(x) = x^{2n}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - (2n+1)\int_0^x t^{2n} f(t)\mathrm{d}t.$

上式两端对 x 求导, 得

$$F'(x) = 2n \cdot x^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^{2n}f(x) - (2n+1)x^{2n}f(x)$$

$$= 2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2nx^{2n}f(x).$$

解法一 $F'(x) = 2nx^{2n}f(\xi) - 2nx^{2n}f(x)$（积分中值定理）

$$= 2nx^{2n}[f(\xi) - f(x)].$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间。

(1) 若 $f(x)$ 单调上升：

当 $x > 0$ 时，则 $0 < \xi < x$，故 $f(\xi) - f(x) \leqslant 0$，于是 $F'(x) \leqslant 0$；

当 $x = 0$ 时，显然有 $F'(0) = 0$；

当 $x < 0$ 时，则 $x < \xi < 0$，故 $f(\xi) - f(x) \geqslant 0$，于是 $F'(x) \geqslant 0$，

因此，若 $f(x)$ 单调上升，则 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调下降；$F(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调上升.

(2) 若 $f(x)$ 单调下降：

类似地讨论可得，$F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调上升；在 $(-\infty, 0]$ 上单调下降.

解法二 $F'(x) = 2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2nx^{2n-1}f(x)\int_0^x \mathrm{d}t$

$$= 2nx^{2n-1}\int_0^x [f(t) - f(x)]\mathrm{d}t.$$

(1) 若 $f(x)$ 单调下降：

当 $x \geqslant 0$ 时，$(0 \leqslant t \leqslant x)$，有 $f(t) - f(x) \geqslant 0$，于是 $F'(x) \geqslant 0$；

当 $x < 0$ 时，由于 $x \leqslant t \leqslant 0$，

$F'(x) = 2nx^{2n-1}\int_x^0 [f(x) - f(t)]\mathrm{d}t$. 而 $f(x) - f(t) \geqslant 0$，又 $x^{2n-1} < 0$，于是 $F'(x) \leqslant 0$.

因此，若 $f(x)$ 单调下降，则 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调上升；而在 $(-\infty, 0]$ 上单调下降.

> 判别函数奇偶性的**常用方法**是：
> （Ⅰ）利用奇偶性的定义；
> （Ⅱ）用奇偶函数的性质.

例 2 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} + f(|\sin x| - 2)sgn(\sin x)(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$；

(2) 设 $f(x)$ 在包含原点的区间上可积，由 $f(x)$ 的奇偶性，讨论函数

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

解 (1) $a^x + a^{-x}$ 为偶函数，而 $a^x - a^{-x}$ 为奇函数，从而 $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} + sgn(\sin x)$ 为奇函数；

(2) 先设 $f(x)$ 为偶函数. 则

$$\Phi(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } t = -z} \int_0^x f(-z)\mathrm{d}(-z)$$

$$= -\int_0^x f(-z)\mathrm{d}z = -\int_0^x f(z)\mathrm{d}z$$

$$= -\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = -\Phi(x)$$

因此，当 $f(x)$ 为偶函数时，$\Phi(x)$ 是奇函数.

同理可证，当 $f(x)$ 为奇函数时，$\Phi(x)$ 是偶函数.

注 若 $f(x)$ 连续，则 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 任一个原函数都可写成 $\Phi(x) + c$，c 为任意取定的常数；当 $f(x)$ 为偶函数时，$\Phi(x)$ 是奇函数，但 $\Phi(x) + c$ $(c \neq 0)$ 都不是奇函数.

> 怎样求复合函数？主要分两种情况：
> （Ⅰ）对于非分段函数常用直接代入的方法；
> （Ⅱ）对于分段函数常用讨论的方法.

例 3 (1) 设 $f(x) = e^{\arcsin x}$，又 $f[g(x)] = x - 1$，求 $g(x)$ 的表达式及定义域；

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0; \\ 1 + x, & x \leqslant 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x^2, & x > 0; \\ x, & x \leqslant 0. \end{cases}$

求 $g[f(x)]$ 及其定义域.

解：(1) 由 $f[g(x)] = e^{\arcsin g(x)} = x - 1$，解得

$$g(x) = \sin[\ln(x - 1)].$$

又因为 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \ln(x - 1) \leqslant \frac{\pi}{2}$ 且 $x - 1 > 0$，得定义域为

$$1 + e^{-\frac{\pi}{2}} < x < 1 + e^{\frac{\pi}{2}}.$$

(2) $g[f(x)] = \begin{cases} -[f(x)]^2, & f(x) > 0; \\ f(x), & f(x) \leqslant 0. \end{cases}$

若 $f(x) > 0$，

当 $x > 0$ 时，则 $f(x) = x > 0$，从而 $g[f(x)] = -x^2$；

当 $-1 < x \leqslant 0$ 时，则 $f(x) = 1 + x > 0$，从而 $g[f(x)] = -(1 + x)^2$.

若 $f(x) \leqslant 0$，

当 $x \leqslant -1$ 时，则 $f(x) = 1 + x \leqslant 0$，从而

$$g[f(x)] = 1 + x.$$

综合以上得

$$g[f(x)] = \begin{cases} -x^2, & x > 0; \\ -(1 + x)^2, & -1 < x \leqslant 0; \\ 1 + x, & x \leqslant -1. \end{cases}$$

如何求反函数？分两种情况 （Ⅰ）一般先从方程 $y = f(x)$ 中解出 x，然后再将所得结果中的 x 与 y 互换位置即可； （Ⅱ）对分段函数，只要分段求出反函数便得.

例 4 已知 $y = \begin{cases} x^2 & -1 \leqslant x < 0; \\ \ln x & 0 < x \leqslant 1; \\ 2e^{x-1} & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$

求反函数及其定义域.

解：由 $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$，因为 $-1 \leqslant x < 0$，所以 $x = -\sqrt{y}$，

写成　$y = -\sqrt{x}, x \in (0,1]$；

由 $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$，再写成

$$y = e^x, x \in (-\infty, 0];$$

再由 $y = 2e^{x-1} \Rightarrow y = 1 + \ln\frac{x}{2}, x \in (2, 2e]$，

故所求反函数为：

$$y = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 0 < x \leqslant 1; \\ e^x, & -\infty < x \leqslant 0; \\ 1 + \ln\frac{x}{2}, & 2 < x \leqslant 2e, \end{cases} \quad \text{或} \quad y = \begin{cases} e^x, & -\infty < x \leqslant 0; \\ -\sqrt{x}, & 0 < x \leqslant 1; \\ 1 + \ln\frac{x}{2}, & 2 < x \leqslant 2e. \end{cases}$$

§2 极限与连续

§2.1 考试内容及理解记忆方法

表 2.1.1 各种极限($\varepsilon-\delta(N)$)定义

分类		定义	补充说明
序列极限	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (a 有限)	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时有 $\|x_n - a\| < \varepsilon$	
	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$	$\forall M > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,有 $\|x_n\| > M$	对应有极限趋于 $\pm\infty$ 的情况
函数极限	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ (x_0, a 有限)	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < \|x - x_0\| < \delta$ 时, 有 $\|f(x) - a\| < \varepsilon$	
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (x_0 有限)	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < \|x - x_0\| < \delta$ 时, 有 $\|f(x)\| > M$	对应有极限趋于 $\pm\infty$ 的情况
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ (a 有限)	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,当 $\|x\| > X$ 时,有 $\|f(x) - a\| < \varepsilon$	有 x 趋于 $\pm\infty$ 两种情况
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall M > 0, \exists X > 0$,当 $\|x\| > X$ 时,有 $\|f(x)\| > M$	有 $x \to \pm\infty, f(x) \to \pm\infty$ 共四种情况
函数单侧极限	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$ (a, x_0 有限)	$\forall \varepsilon < 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $\|f(x) - a\| < \varepsilon$	对于 $a = \pm\infty$ 的情况,可类似上面的定义
	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有 $\|f(x) - a\| < \varepsilon$	
			当 a 为有限时,称为极限存在

表 2.1.2 序列极限的性质

唯一性	若序列 $\{x_n\}$ 的极限存在,则极限值是唯一的
有界性	若序列 $\{x_n\}$ 有极限,则序列 $\{x_n\}$ 有界
有序性	给定序列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ $\{z_n\}$,若 $x_n \leqslant y_n$,$(n = 1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$,则 $a \leqslant b$
保四则运算性	设 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$,且 a, b 有限则 1° $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$; 2° $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$; 3° 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$,有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$

表 2.1.3 函数极限的性质

唯一性	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则极限值唯一
有界性	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则函数在 x_0 的某一空心邻域内有界
有序性	设在 x_0 的一空心邻域内有 $f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则 $A\leqslant B$
保四则运算性	设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$,且 a,b,有限则 1° $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$; 2° $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$; 3° 若 $b\neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$

表 2.1.4 极限存在的判别准则

序列极限存在性	两边夹定理	给定序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$,满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$, $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$($a$ 有限或为 $\pm\infty$)
	单调有界性判别法	单调上升有上界的序列必有极限
		单调下降有下界的序列必有极限
	无穷小判别法	变量以 a 为极限的充要条件为变量可以分解成 a 加无穷小量
函数极限存在性	两边夹定理	设在 x_0 的空心邻域上有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$($a$ 有限或为 $\pm\infty$)
	单侧极限判别法	设 $f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域上定义,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在且相等
	无穷小判别法	$f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域内以 a 为极限的充要条件是 $f(x)$ 可以分解为 a 加上无穷小量(a 为有限)

表 2.1.5 两个重要极限

基本形式	变　　型	注　　意
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$,必须保证当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 以 0 为极限	分子,分母中 $f(x)$ 必须统一,包括系数和正负号
$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$	1° $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$; 2° $\lim\limits_{x\to a}[1+g(x)]^{\frac{1}{g(x)}}=\mathrm{e}$,必须保证当 $x\to a$ 时, $g(x)\to 0$	$g(x)$ 形式上一定要统一.正负号之差是常见的错误

表 2.1.6 常用已知极限

1° $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0, \lvert q \rvert < 1$. 2° $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, a > 0$. 3° $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0, (a > 1, k$ 为常数). 4° $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^\varepsilon} = 0, (\varepsilon > 0, k$ 为常数). 5° $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

表 2.1.7 无穷小量定义、性质

定　义	性　质
极限为 0 的变量,称为无穷小量	1° 无穷小量的绝对值仍是无穷小量
	2° 无穷小量乘有界变量仍是无穷小量
	3° 变量有极限 a 的充要条件为变量可分解成 a 加无穷小量
	4° 有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小量
	5° 无限个无穷小量的和、差、积不一定是无穷小量 (本结论的例子超出大纲要求,只须记住结论)

表 2.1.8 无穷大量

定　义	与无穷小量的关系
极限为无穷(包括 $+\infty, -\infty$)的变量称为无穷大量	若变量不取零值,则变量为无穷大量 $\Leftrightarrow$ 它的倒数为无穷小量

表 2.1.9 无穷小阶的比较

前提条件	定　义	记　号
设函数 $f(x),g(x)$ 在 x_0 的一个空心邻域内有定义(x_0 可以是无穷),$f(x),g(x)$ 为无穷小量,且 $g(x)\neq 0$,又设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$(有限)	$A\neq 0, A\neq 1$,则称 $f(x),g(x)$ 为同阶无穷小量	$f(x)\sim Ag(x)\quad(x\to x_0)$
	$A = 1$,则称 $f(x),g(x)$ 为等价无穷小量	$f(x)\sim g(x)\quad(x\to x_0)$
	$A = 0$,则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷小量	$f(x) = o(g(x))\quad(x\to x_0)$
设函数 $f(x),g(x)$ 在 x_0 的一个空心邻域内有定义(x_0 可以是无穷),$f(x),g(x)$ 为无穷小量,且 $g^k(x)\neq 0$,k 为常数,$k > 0$	若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g^k(x)} = B$ 有限非 0 值,则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的 k 阶无穷小量	$f(x)\sim Bg^k(x)$ $(x\to x_0)$

表 2.1.10 常见等价无穷小量的例子($x\to 0$)

$\sin x\sim x$,	$\tan x\sim x$,	$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,
$e^x-1\sim x$,	$\ln(1+x)\sim x$,	$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$