高等学校试用教材

误差理论与数据处理

梁晋文　陈林才　何　贡　编著

蔡其恕　审

中国计量出版社

内 容 提 要

本书由11章组成，内容包括：计量学概述和误差的基本概念；近似计算及其误差；等精度测量的随机误差；系统误差；疏忽误差；非等精度测量；误差的合成与分配；最小二乘法和组合测量；实验结果的处理和经验公式；随机过程及其数据处理基础；概率与矩阵的基础知识。

本书是根据原"高等工业学校互换性与技术测量教材编审小组"拟订的大纲，主要是参照清华大学、天津大学及河北工学院的中、英文讲稿的内容和体系，并参考了兄弟院校的教材而编写的。经"高等工业学校互换性与测量技术基础课程教学指导小组"同意，作为高等工业学校机械类各专业或仪器仪表专业试用教材。同时，该教材也可供机械制造和仪器仪表制造的工程技术人员及计量、检验人员参考。

误差理论与数据处理
梁晋文　陈林才　何贡　编著
蔡其恕　审
责任编辑　刘瑞清

中国计量出版社出版
北京和平里11区7号
中国计量出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

开本 787×1092/16　印张 12.75 字数306千字
1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷
印数 1—7 000
ISBN 7-5026-0247-X/TB·202
定价 5.00 元

前　言

科学技术的发展与实验测量密切相关．在进行实验测量时，产生误差是不可避免的．因此，必须研究、估计和判断测量的数据和结果是否精确可靠．而估计判断测量的数据和结果，必须借助于误差理论，所以误差理论是我们认识客观规律的有力工具，是工程学科学生应该掌握的基础知识。

这本教材是根据原“高等工业学校互换性与技术测量教材编审小组”拟订的大纲，主要是参照清华大学、天津大学及河北工学院的中、英文讲稿的内容和体系，并参考了兄弟院校的教材，同时考虑到工厂企业技术人员的需要而编写的．经“高等工业学校互换性与测量技术基础课程教学指导小组”同意，作为高等工业学校试用教材出版．

根据编者们三四十年的教学与科研实践，我们认为一至七章是本课程的最基本内容，宜用较多学时讲透．第八第九两章是本书前七章的综合、扩展与总结，是数据处理的基础，但内容较多，不必全部在课堂上讲授．建议对第八章只讲线性最小二乘法，至于非线性函数和组合测量的最小二乘法以及正态分布公式的证明等，可简略或不讲．对于第九章建议只讲一元线性最小二乘法求经验公式和周期性经验公式．在课堂上不讲的内容并非不重要，而是科技工作者必须掌握的基础知识．这些内容可留给学生自学．学生掌握最基本原理后，一旦遇到这些问题再自学不会感到困难，而且会理解更深更透．

第十章可根据不同专业的要求选讲．

第十一章是供未学习概率论和线性代数的同志阅读本书一至九章而准备的．

本教材适合 30～40 学时讲授之用．

本书也可供工程技术人员参考．

在编写本教材的过程中曾得到教材编审小组及课程教学指导小组成员的帮助；得到中国计量出版社的支持；罗南星副教授和博士研究生刁红彦同志协助整编；林洪桦副教授对第十章提出许多好的意见．本书主审蔡其恕教授不顾80余岁高龄仔细逐章审阅，并提出许多修改意见．根据以上意见，编者曾两易原稿而后定稿．对这些帮助，编者在此表示衷心感谢．

限于我们的水平，本书中缺点和错误在所难免．殷切希望读者批评指正．

编著者

1988年1月

目　　录

第一章 计量学概述和误差的基本概念

§1—1 计量学的内容与作用

一、计量学的内容

计量学是一门研究测量、保证测量统一和准确的科学。研究内容包括计量单位（长度、角度、密度、质量、压力、振动、电、热、声、光、磁等等）及其基准、标准的建立，保存和使用；测量方法和计量器具；测量的准确度（精确度）；观测者进行测量的能力；计量法制和管理等。计量学也包括研究物理常数和标准物质及材料特性的准确测定。计量学的主要内容是：

（1）建立计量单位及其基准、标准，基准和标准的复制、保存和传递（指原尺、砝码、基准频率、时间、波长等等）。

（2）保证国家内部和国际间计量量值的统一性。

（3）拟定测量方法，设计器具、工具，以便实施测量。

（4）分析和估计测量结果的不确定度，并设法提高其准确度。

上述第④项内容是计量学的核心，也是本书所要讨论的中心内容。

二、计量学的作用

对自然科学而言，特别在技术科学和工程中，信息收集的主要含义就是测量（取得观测和实验的数据）。测量过程本身就是一种实验。各种物理量都需经过测试和计量才能得出结果。许多物理定理的发现，物理常数的确定，都是通过精密计量测试得出的。如：半导体的发现，自由落体定理的确定等均是如此。

通过计量可以进一步完善理论。如吴有训和康普顿研究了X射线频率和散射角的关系，通过对散射光角度改变及波长改变的测量，证实了以前理论分析的正确性，奠定了量子理论基础——光量子能量守恒和冲量守恒定律。这类例子充分说明：计量测试在科学上和认识客观世界中的重要意义和作用。

对于技术科学，计量尤为重要，它是发展技术和工业的必要条件，计量与测试永远是促进其进步的重要因素。测量的精度和效率，决定着科学技术和工业的水平。

现代机械工业的发展是建立在标准化与互换性的基础之上的。互换性的先决条件是零、部件必须具有一定的精度，而精度取决于制造水平，并由计量水平来确定。精度要求、制造水平和计量水平，三者是相互促进又相互制约的，其中计量是精密加工的基础，没有计

量就不可能保证产品的精度.

任何计量测试，都不可避免有误差. 因此，必须研究、估计和判断计量结果是否可靠. 对于计量结果的分析、研究、判断，必须采用经过长期实践积累所形成的误差理论，它是我们认识客观世界的有力工具. 在科学领域内，某些重大的发现，是运用误差理论直接对测量结果分析研究而发现的. 例如：在对海王星的运动轨迹的观测中，由观测数据发现它有小的、不规则的运动，因此引起人们的注意. 最后，导致冥王星的发现. 又如：由空气中获取的氮气，其测得的密度与用其他化学方法产生氮气所测得的密度有明显差异，从而导致了惰性气体氩气的发现.

在中国古代的隋、唐、元、明朝时期，曾有过许多科学家和学者对误差理论和数据处理进行了研究，并做出了巨大贡献. 例如：目前在数据处理中常采用的平滑曲线等间距内插法，是隋朝的刘焯（544～610）完成的；不等间距插值法，是唐朝的张遂（僧人，法号“一行”，683～727）所创立的. 他们建立这种算法的时间，要比牛顿早一千年左右.

解放前，在历代反动政府的统治下，我国学者在这方面的贡献较少，即便有，也是在极端困难的条件下，或在国外利用外国的实验室搞出来的. 如：原清华大学、北京大学的许宝禄教授关于概率论中的区间估计理论的完善（1941）；黄子卿教授测定出在三相点的水蒸气压力标准；由王大珩教授所设计、被称为卜尔夫利西折射率测量仪等等.

解放后，随着国民经济的迅速恢复和发展，计量工作有了很大的进步. 近年来，由于我国工农业生产的飞速发展，计量科学和误差理论与数据处理的研究也获得喜人的成果. 我们深信：随着四个现代化目标的实现，我国的计量科学事业，必将取得更大的成绩.

§1—2 关于测量的一些概念

一、测 量

可以用数值来评价（表示）其物质特性（状态、运动等）的量，称之为物理量. 如长度、温度、硬度、密度等等.

用实验方法，将物理量与作为单位量的某量值相比较，并求出其比值的过程称之为测量. 它可用下式表示：

$$L = qu$$

式中 L——被测量值；

u——测量单位；

q——单位的数目（值），或称比值.

例1—1：量出某工件长 $L = 100$ mm，其中长为 L；mm 为 u；$100 = q$（即长度 L 与长度单位 u 的比值）.

二、测 量 结 果

由测量所获得的被测的量值叫做测量结果. 显然，测量结果是由比值和测量单位两部分所组成. 故测量结果多具有单位，如 L（长度）$= 100$ mm，但也有某些物理量不含单位，如比重. 确切讲，测量结果还应包括误差部分，这在后边将要讲到.

三、测 量 过 程

执行测量所需的一系列操作，称之为测量过程。实质上，它是一种实验。即将被测的“量”与量器的单位量相比较的过程。有时，被测的“量”不能直接与量器的单位量相比较，而必须通过仪器或某些辅助设备，所以说，广义的测量过程还包括建立单位、设计工具、设计测量方法、研究分析测量结果、寻求消除或减小误差的方法。

§1—3 单 位 制

由一个数和计量单位的乘积表示的量的大小称为给定量的值，简称为量值（如：5 m、12 kg，20℃等）。而给定量值表达式中的纯数字称为量的数值，简称为数值（如：给定量值 5 m、12 kg、20℃中的 5、12、20 即为数值）。在科学的一切领域或一个领域中的基本量和相应导出量的特定组合，称之为量制。对应于某一量制的一组基本单位和导出单位，叫做计量单位制。根据米和千克原器及十进分度的测量单位制称为十进米制。

习惯上公认数值为 1 的一个量的值，叫做计量单位。一个量的计量单位是固定的，且能与同一量的不同值之间进行定量比较。代表计量单位的约定符号为计量单位符号，如：m 为米的符号；A 为安培的符号等。由国家规定强制使用或允许使用的计量单位，叫法定计量单位；基本量的计量单位，叫计量基本单位。测量系统的计量导出单位来源于计量基本单位。如：米是国际单位制长度量的基本单位，而其导出单位则是导出量的计量单位（如：面积 m^2，速度 m/s 等等）。

§1—4 基 准

用实物来定义、保存或复现一个量的计量单位（或该单位的倍数或分数），以便通过比较传递给其他计量器具的一种计量器具，称之为基准。

基准的建立是经过了长期的改进和发展的。大约 4500 年以前（公元前 2698～2599）发明建立了中国的尺，秦朝统一了度量衡制度，建立了重量、体积和长度基准，统一了车轨等标准。现在国际单位制中的长度单位是“米（m）”，以米为长度单位起源于法国，从法国的米制，演变到今天的国际米制，同样经历了许多变革和改进。国际原尺已由新的米定义所代替，即米是由面电磁波在真空中，1/299 792 458 s 时间间隔内所行进的路程。基准的变革和改进，表明了科学的进步。

§1—5 测 量 方 法

按测量结果获得的方法，或测量条件及测量结果的不同，测量方法可分为：直接测量与间接测量；绝对测量与相对测量；等精度测量与非等精度测量；单项测量与综合测量；接触测量与非接触测量；主动测量与被动测量等等。而按实验数据的处理方式，测量方法可分为直接测量、间接测量与组合测量三类。现分述如下：

1. 直接测量

若令测量值为 x，待求量为 y，则当 $y=x$，即 x 就是所求的"目的"时，称之为直接测量。如：用游标卡尺测量轴的直径；用立式光学计测量圆柱塞规直径对于作为标准尺寸的量块中心长度的偏差值，都属于直接测量。

2. 间接测量

与直接测量不同，待求量 y 不等于测量值 x，而是一个测量值 x、或几个测量值 x_1，x_2，…，x_n 的函数，即

$$y=f(x)$$

或

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

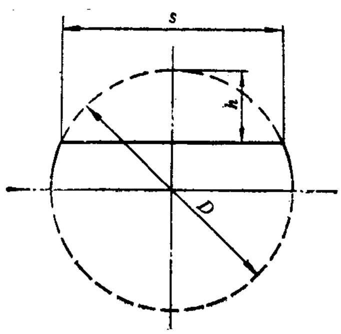


图 1—1

显然，待求量 y 不能由直接测量求得，而必须由测量值 x，或 $x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 及其与待求量的函数关系进行计算确定。如：用弦长弓高法测量圆弧（或轴）的直径，即为间接测量的典型实例。图 1—1 所示圆弧直径 D 的测量，可通过测量一定的弦长 s，和与之相应的弓高 h，再按下式计算出直径 D，即

$$D=\frac{s^2}{4h}+h$$

3. 组合测量

如有若干个待求量 y_1，y_2，…y_t，把这些待求量用不同方式组合起来进行测量，并把测得值 x_1，x_2，…，x_n 与待求量之间的函数关系列成方程组，即

$$\left.\begin{array}{l} f_1(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_t)-x_1=0 \\ f_2(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_t)-x_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_t)-x_n=0 \end{array}\right\}$$

方程式的数 n 要大于待求量 y 的个数 t，然后用最小二乘法来求出待求量的数值，此即为组合测量（详见第八章）。

按测量的精度因素情况，测量又可分为等精度测量和非等精度测量。

1. 等精度测量

在整个测量过程中，若影响和决定误差大小的全部因素（条件），始终保持不变，如由同一个观测者、用同一台仪器、用同样的方法、在同样的环境条件下，同样认真仔细地对同一工件作相同次数的测量，称之为等精度测量。但在实际中，即便考虑得很周到的实验（测量），也极难做到影响和决定误差大小的全部因素（条件）始终保持不变。所以，一般情况下只是近似地认为是等精度测量。

2. 非等精度测量

在整个测量过程中，影响和决定误差大小的因素各异，如由不同的观测者、用不同仪器、不同方法、在不同的环境条件下对工件作不同次数的测量，叫做非等精度测量或不等精度测量。

§1—6 误差的概念

零件的加工和测量，以及所用的加工机床、测量仪器本身，都不可避免地存在误差，没有误差的加工和测量是不存在的。有些参数的计算及测量数据的处理，同样含有误差。误差和计量测试有密切关系，任何计量测试都有误差存在，而各种量值的大小，又都要通过计量测试才能呈现出来。因此，下面着重讨论测量误差。

一、误差的含义

误差是评定精度的尺度，误差愈小表示精度愈高。在测量中，由误差表示测得值与真值之差❶

若令误差为 δ，测量值为 x，真值为 Q，则有

$$\delta = x - Q$$

或

$$Q = x - \delta$$

真值 Q 是客观存在的，但在实际应用时，一般是不知道和无法确定的。在统计学上，当测量的次数 n 非常大时（趋于无穷大），测得值的算术平均值（数学期望）才接近于真值。故常以测量次数足够大时的测得值的算术平均值，近似代替真值（详见第三章）。

二、差　异

差异的含义是两测得值之间的差别．它不能说明测得值的误差大或小，故不同于误差，因为误差是表征测得值与真值之差，所以说“差异”和“误差”是有区别的。

三、误差的类型——随机（偶然）误差、系统误差、疏忽（粗大）误差

1．随机（偶然）误差

随机误差的大小及符号均事先不能知道，但随着观测次数的增多，即测得值增多时，则将遵循一定的统计规律。

2．系统误差

在同一已知条件下，误差的大小及符号均固定不变，或按一定的规律变化，通常它可以预先设法知道。

3．粗大（疏忽）误差

这类误差的发生，是由于测量者的疏忽大意，不小心，或环境条件的突然变化而引起的，首先应设法判断，其是否存在，然后将此类误差剔除。

---

❶在重复实验（测量）中，还经常以 σ、ϑ、ρ……等参数表征一组测量得值的分散（符号及意义将在第三章中进行讨论）。这些参数反映了测得值或测量结果的可靠性，可用以表征或估计测得值中所含随机误差的大小。

四、精密度、准确度、精确度

测得值与真值的接近程度，称为精度．它可分为：

1．精密度

表示实验（测量）结果中的随机（偶然）误差的大小程度，即在一定的条件下，进行多次实验（测量）时，所得实验（测量）结果彼此之间符合的程度，它通常是用随机不确定度（见第三章）来表示．一个实验的随机误差小，则其精密度高．

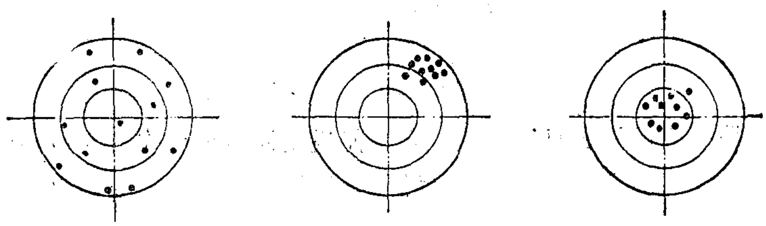
2．准确度

表示实验（测量）结果中的系统误差的大小程度，即在规定的条件下，在实验（测量）中，所有系统误差的综合．一个实验的系统误差小，则其准确度高．

3．精确度

精确度是实验（测量）结果中，系统误差与随机误差的综合，即精密准确的程度．它表示实验（测量）结果与真值的一致程度．精确度反映了实验（测量）的各类误差的综合．如一个实验的系统误差和随机误差都很小，则其精确度高．

图 1—2 所示的打靶结果，子弹着靶点有三种情况：图 a 为系统误差和随机误差都大，



(a)　　(b)　　(c)

图 1—2

即准确度，精密度都低；图 b 为系统误差大，随机误差小，即准确度低，精密度高；图 c 为系统误差和随机误差都小，即精确度高．

§1—7　测量误差的来源

测量误差的来源是多方面的．实验（测量）过程均含有测量对象、测量单位、测量方法、测量精确度四要素，因此误差的来源显然与此四要素密切相关，一般可归纳为：

1．标准器具的误差

作为提供比较测量用的标准器具，如：光波波长、标准线纹尺、标准量块、标准砝码、标准电池、标准电阻等，它们本身所体现的量值，不可避免地含有一定的误差．

2．测量装置的误差

测量装置是在测量过程中，实现被测的未知量与已知的单位量进行比较的组成部分．它包括仪器仪表的原理误差、制造装调误差；仪器附件及附属工具的误差；被测件与仪器仪表相互位置的安置误差，接触测量中测力及测力变化引起的误差等．

3. 方法误差

由于测量方法的不完善所引起的误差。如采用近似的计算方法，用钢卷尺测出大尺寸轴的圆周长s，然后由公式：$d=s/\pi$计算出轴的直径d所引起的误差；又如采用触针法测量工件的表面粗糙度时，由于触头的圆角半径引起的误差等。

4. 测量者的误差

由于测量者的固有习惯、分辨能力的限制、工作疲劳引起的视觉器官生理变化、精神因素引起的一时疏忽等等原因所引起的误差。如瞄准误差与读数误差。

5. 客观环境引起的误差

由于各种环境因素与规定的标准状态不一致而引起标准器、测量装置和被测件本身的变化所造成的误差。这些环境因素有：温度、湿度、气压、振动、照明、电磁场等，其中以温度尤为重要。

第二章　近似计算及其误差

§2—1　近 似 值 概 念

任何物理量大多是由观测所确定. 因而不可避免会含有误差. 即测得值是一代表真值的近似值. 显然, 它本身亦含有误差, 而此误差值同样也是近似的. 测量某被测量所得到的近似值往往是设计工作的根据, 是实际工程工作的基础.

在运用近似计算法进行计算时, 所得结果亦为近似值, 通常在保证能达到所要求的近似程度的前提下, 应使计算工作合理简化, 即一方面应避免盲目追求不切实际的没有必要的精确计算, 致使计算工作繁复, 既浪费人力又耗费时间; 另一方面又要保证达到要求的精确程度, 不能图省事, 以致造成错误.

在计算机应用日益普遍的情况下, 近似值及运算数字的选取应多加注意, 周密分析, 以使计算程序简化, 计算效率提高, 近似程度合理、可靠.

§2—2　绝对误差与相对误差

一、绝对误差与最大绝对误差

绝对误差是某量的近似值 a 与某量的客观真值 Q 之差. 若以 Δ 表示绝对误差, 则有

$$\Delta = a - Q$$

由于近似值 a 可能大于或小于真值 Q, 所以绝对误差 Δ 可能呈正值或负值, 一般可表示为

$$Q = a \pm |\Delta|$$

式中, $|\Delta|$ 为绝对误差 Δ 的绝对值, 简称为误差的绝对值.

在一般情况下, 真值 Q 是不知道的, 因而绝对误差也是不知道的, 计算和应用时所依据的数据, 是由实验或测量所获得的近似值 a, 因此可根据实验或测量的结果, 来断定绝对误差不会超过某一定范围. 如: 测量某直径为 ϕ 100 mm, 若能断定误差的绝对值 $|\Delta|$ 不超过 0.005 mm, 即测量结果介于 ϕ 99.995～100.005 mm 之间, 这时即可断定近似值与真值之差的绝对值不会超过 0.005 mm, 此值 (0.005 mm) 称之为近似值 a (100 mm) 的最大绝对误差, 或误差限 (界), 以 Δ_{max} 表示, 即有

$$-\Delta_{max} \leqslant \Delta \leqslant \Delta_{max}$$

最大绝对误差并不能完全表达测量工作的质量, 即其大小不能作为比较测量结果准确度

高低的依据。如测量某长度 1 000 mm，其最大绝对误差为 ±0.01 mm，而测量另一长度 5 mm，其最大绝对误差为 ±0.005 mm，前者的绝对误差虽为后者的两倍，但前者的测量质量却较后者为佳。因为被测长度相差了 200 倍，而被测长度愈大，测量步骤及使用的计量器具愈复杂，产生误差的环节愈多，所以被测长度大，可能产生和可以允许的测量误差也将大一些。故在比较测量精度的高低时，一般情况下，应以相对误差来衡量。

二、相对误差与最大相对误差

相对误差∇定义为

$$\nabla=\Delta/Q \quad (\Delta\text{为绝对误差})$$

由于真值 Q 是不知道的，所以通常是用近似值 a 代替真值 Q，于是有

$$\nabla=\Delta/a$$

若以∇_{max}表示最大相对误差，则有

$$-\nabla_{max}\leqslant\nabla\leqslant\nabla_{max}$$

例 2—1　测量两角的角度 1 和 2，各得 $21°15'$和$1°15'$，测量的误差限均为 $\pm1'$，试求 ∇_{max1}，∇_{max2}。

解：

$$\nabla_{max1}=\pm\frac{1'}{21°15'}=\pm\frac{1}{1275}\approx\pm0.08\%$$

$$\nabla_{max2}=\pm\frac{1'}{1°15'}=\pm\frac{1}{75}\approx\pm1.3\%$$

显然，前者的测量质量较后者为佳。故应用通常的量角器测量小角度时，便会造成较大的误差，一般应避免用量角器测量小角度，而应采用间接测量法或其他量具（如正弦尺等）进行测量。

在实际工作中，常采用最大绝对误差和最大相对误差的概念，它们的含义分别为：近似值与真值之差不会超过最大绝对误差；绝对误差与近似值的比值不会大于最大相对误差。在未作特别的说明时，一般所说的绝对误差和相对误差，指的就是最大绝对误差和最大相对误差。

§2—3　近似数的截取与有效数字

一、近似数的截取

近似数的截取（又叫修约、或凑整）方法有四舍五入法、去尾法、收尾法。在长度计量中，一般均采用“四舍五入”法来截取近似数，下面仅就“四舍五入”法进行讨论。

对于任一用十进制记数法表示的有限个数位的数 a，均可写成：

$$a=Z_1\times10^m+Z_2\times10^{m-1}+\cdots+Z_i\times10^{m-n+1}$$

式中　Z_i——系数，除 $Z_1\neq0$ 外，其余的可以是 0，1，2，…，9 中的任一个数字；

m——整数，决定 a 第一个非零数字所在的数位（数的所在位置）；

n——正整数，表示 a 从第一个非零数字起的数位个数。

例如：测量某一轴的直径为 16.12 mm，则可以表示成：

$$16.12 = 1\times10^{1} + 6\times10^{0} + 1\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$$

即 $a=16.12$；$Z_1=1$，$Z_2=6$，$Z_3=1$，$Z_4=2$；$m=1$；$n=4$。

用“四舍五入”法把一个近似数截取到第 n 个数位时，若以第 n 位为单位，其规则如下：

（1）若第 n 个数位后面的数值小于末位（第 n 位）的 0.5，则将所截取的近似数写到第 n 个数位，并将其后面的所有数字去掉，即所谓“四舍”。如将 4.584 6 截取到 $n=3$ 位，因第3个数位后面的数值为 0.004 6，小于末位的 0.5，即 $0.0046<0.01\times0.5$，故将所截取的近似数写到第 $n=3$ 个数位，即 4.58，并将其后面的所有数字“46”去掉。

（2）若第 n 个数位后面的数值大于末位（第 n 位）的 0.5，则将所截取的近似数写到第 n 个数位，且将第 n 个数位的数字增加1，然后将 n 位后面的所有数字去掉，即所谓“五入”。如将 4.585 1 截取到 $n=3$ 位，因第 3 个数位后面的数值为 0.005 1 大于末位的 0.5，即 $0.0051>0.01\times0.5$，故将所截取的近似数写到第 3 个数位，且将第 3 个数位的数字增加1，即 4.59，然后将第 3 个数位后面的所有数字“51”去掉。

（3）若第 n 个数位后面的数值恰等于末位（第 n 位）的 0.5，则将所截取的近似数写到第 n 位，且当第 n 个数位数字为奇数时，将第 n 个数位的数字增加 1；而当第 n 个数位数字为偶数时，第 n 个数位的数字不变。如将 4.575 和 4.585 分别截取到 $n=3$ 位，因第 3 个数位后面的数值为 0.005，恰恰等于末位的 0.5，即 $0.005=0.01\times0.5$，故将所截取的近似数写到第 $n=3$ 位，且当第 3 位数字为奇数 7 时，则将第 3 数位的数字增加 1（即由 7 增加至 8），于是 $4.575\approx4.58$；而当第 3 个数位数字为偶数 8 时，第 3 个数位的数字不变（即 8 不变），于是 $4.585\approx4.58$。

例 2—2 试按“四舍五入”法将近似数 3.141 59，10.751，573.5，7 465 截取到 $n=3$ 位。

解：$3.14159\approx3.14$；$10.751\approx10.8$；$573.5\approx574$；$7465\approx746\times10$。

采用“四舍五入”法截取近似数而引入的误差，就绝对值而言，总不会超过所截取到的第 n 个数位上的半个单位。

为了简要说明“四舍五入”法截取近似数而引入的误差不会超过所截取到第 n 个数位上的半个单位的实质，可设某 $(n+1)$ 位数，采用“四舍五入”法截取至 n 位数，则 $(n+1)$ 位数的可能值及舍入误差如表 2—1 所列。

表 2—1

第 $(n+1)$ 位数取值	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
舍入误差 Δ	0	−1	−2	−3	−4	+5(入) −5(舍)	+4	+3	+2	+1

显然，第 $(n+1)$ 位上 0，1，2，…，8，9 发生的概率均为 1/10，其相应的舍入误差 Δ 发生的概率同样都是 1/10，即

$$P\{\Delta=0,-1,-2,-3,-4,-5(\text{或}+5),+4,+3,+2,+1\}$$
$$=1/10$$