丁玉良 刘有炳 编

概率论与数理统计

大学出版社

概率论与数理统计

丁玉良　刘有炳　　编

西 北 工 业 大 学 出 版 社

1992年10月　　西安

内容简介

本书是按照国家教委工科数学课程指导委员会制定的"概率论与数理统计"课程的教学要求编写的，内容包括随机事件及其概率，随机变量，随机变量的数字特征，极限定理，随机抽样与参数估计，假设检验，方差分析与回归分析等。每章均配置了适量的习题，书末给出了习题答案。

本书可作为普通高等学校、电视大学、职工大学、函授大学的教材，可供成人自学考试的读者自学或参考。

概率论与数理统计

丁玉良　刘有炳　编

责任编辑　刘彦信

责任校对　钱伟峰

西北工业大学出版社出版发行

(西安市友谊西路 127 号)

陕西省新华书店经销

西安电子科技大学印刷厂印装

ISBN 7-5612-0326-8 / O · 35

*

开本 787×1092 毫米 1/32　9.125 印张　195 千字

1991 年 3 月第 1 版　　1992 年 10 月第 2 次印刷

印数　4101－6300 册　　定价．4 20

序

本书是作者在从事多年工程数学教学的基础上编写的，其中概率论部份取材符合工科数学“概率论”课程教学基本要求，数理统计部份则因为受到学时数的限制，只选择了最基本、实用最多的随机抽样与参数估计，假设检验，方差分析与回归分析等。

这本教材对基本概念及重要的公式和定理阐述和解释详细清楚，并很注意实际应用。

全书附有大量的例题和习题，文字通畅易读，条理分明，且起点不高，只要有高等数学的基础即可阅读，它特别适宜于对概率论和数理统计的应用有一定要求，而课时又不能太多的专业学生学习之用，也可供自修大学、函授大学及自学者选用。

西北工业大学应用数学系

孙家永

1991 年 3 月

前　　言

本书是按照工科“概率论与数理统计”课程的教学大纲要求编写的。只要具备高等数学的知识，就能顺利地学好其中的内容，达到该课程大纲的要求。本书的编写力求突出重点，深入浅出。对基本概念、重要公式和定理注意其实际意义的解释和说明，讲清其实质。并在每节中配有较多的例题。通过各种类型例题的分析、运算，进一步加深与巩固所学的理论与概念，并培养学生分析与解决随机现象问题的能力。

本书可作为各类普通高等学校、电视大学、职工大学、函授大学的教材与教学参考书，对参加自学考试的自学者也是一本合适的参考书。

在此特别感谢陕西省工科数学教学委员会主任孙家永教授，他于百忙之中对本书初稿进行了详细认真的审阅，并提出许多宝贵意见。本书还得到周世德副教授、郑兴国副教授、杨恺庆副教授的关心和支持。

由于水平所限，错误与不足之处在所难免，敬请读者指正。

编　者

1991 年 3 月

目　录

附录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

1.1.1　引言

自然界中出现的现象，可以分为两大类：一类为必然现象，另一类为随机现象. 所谓必然现象，是指在一定条件下，必然发生的现象. 例如：物体在重力作用下，必然向下落；又如在标准大气压下，水加热到100℃，必然会沸腾等等. 研究必然现象中的数量关系，常常采用代数、几何和微积分等数学方法. 所谓随机现象，即通常所称的偶然现象，是指在一定条件下可能发生也可能不发生的现象. 从一大批同类产品中任意抽取一个产品，这个产品可能是正品，也可能是废品，结果带有随机性. 又如：一个容器中充满了某种气体，对个别的气体分子而言，经常与其它许多分子发生碰撞而很快改变运动的速度和方向，说明单个气体分子运动带有随机性. 再如：在无线电通讯中，由于外界存在的随机干扰，收到的无线电讯号也带有随机性.

当我们重复观察随机现象的时候，就会发现随机现象呈现规律性，这种规律性称为统计规律性. 从一大批产品中，任意抽取一个产品，抽到正品或废品是随机的. 然而，当重

复抽取时，废品率是稳定的；气体容器中个别气体分子的运动是随机的，然而，所有气体分子对容器壁产生的压力强度是稳定的. 由此可见，个别随机现象的出现是偶然的，但是在重复试验或大量观察中，随机现象中隐伏着必然的规律. 这就是统计规律性.

概率论是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科. 一方面，它有自己独特的概念与方法；另一方面，它与其它数学分支又有紧密的联系，它是现代数学的重要组成部分.

目前概率论的理论与方法已应用于工业、农业、国防与科学技术各个领域，在理论联系实际方面，概率论是数学中最活跃的分支之一. 在工业生产中，可以应用各种概率与数理统计方法，如抽样检查、质量控制、试验设计、可靠性理论等. 另外概率论的理论与方法正在向各基础学科、工程学科渗透，产生了各种边缘性的应用学科，如排队论、信息论、控制论、时间序列分析等.

1.1.2 随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的. 在概率论中，试验作为一种广泛的术语，它包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某个特征的观测也可以认为是一种试验. 下面我们举例来加以说明.

例 1 抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况.

例 2 从一批含有一定数量的次品的产品中，任意抽取 4 件，检查次品的个数.

例 3 在某一段时间间隔内，记录某电话总机接到的呼唤次数.

例 4　在一批日光灯中任意抽取 1 只，测试其寿命.

上面举了 4 个关于试验的例子，这些试验具有下面两个共同的特点:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个，究竟出现哪个结果，在试验之前无法预知.

在概率论中，我们把具有上述两个特点的试验叫做随机试验，简称试验. 用记号 E 表示.

1.1.3　随机事件的概念

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情叫做随机事件，简称事件. 事件通常用大写拉丁字母 A，B，C…表示. 例如，在抛硬币试验中，“出现正面”是随机事件；在掷骰子试验中，“出现 2 点”、“出现偶数点”也都是随机事件；在 100 件产品中，有 10 件是次品，90 件是正品，如果从中任取一件，则“取到正品”与“取到次品”都是随机事件.

在随机试验中，必然会发生的事件叫做必然事件；不可能发生的事件叫做不可能事件，例如，在掷骰子试验中；“点数不大于 6”是必然事件，“点数大于 6”是不可能事件.

从本质上讲，必然事件与不可能事件不是随机事件，但还是把它们当作特殊的随机事件，这对今后分析问题和解决问题是有好处的. 必然事件与不可能事件通常分别记为 U，V. 如“灯泡使用寿命大于等于零”，$\{t \geqslant 0\} = U$. “灯泡使用寿命小于零”，$\{t < 0\} = V$.

1.1.4 基本事件

不可能再分的事件称为基本事件.

例如，在 0，1，2，…，9 十个数字中任意选取一个，有十个可能不同的结果．“取得一个数是 0”，…，“取得一个数是 9”，都是基本事件．但还有其它的可能结果：“取得一个数是奇数”，“取得一个数是大于 4 的数”，“取得一个数是 3 的倍数”等等．这些事件是由若干个基本事件组合而成的事件，称为复合事件．如在 0，1，…，9 十个数中“取得一个数为 3 的倍数”，是一个复合事件，它由“取得一个数是 3”，“取得一个数是 6”，“取得一个数是 9”三个基本事件组合而成．一个事件是否称为基本事件是相对于试验的目的来说的．例如量人的身高，一般说区间(0，2.5)中任一实数，都可以是一个基本事件．此时，基本事件有无穷多个．又如乘车是否需要买全票、买半票或免票，这时只有三个基本事件.

1.1.5 事件关系与运算

在相同的试验条件下，往往有多个事件发生．详细分析事件之间的关系，不仅可以帮助我们深刻地认识事件的本质，而且可以简化复杂事件的概率计算.

例 5 骰子是一个正六面体，每面分别标有 1，2，3，4，5，6．进行抛掷骰子的试验．{出现“4”}，{出现偶数}等都是随机事件.

例 6 假设打靶击中某正方形区域为 U，则击中此正方形中某区域 A 是随机事件.

我们可以把区域 A 形象地表示{击中区域 A}这一随机

事件(见图 1–1). 这是随机事件的图象表示法，在下面讨论事件关系与运算中，采用图象表示法是有益的.

下面介绍事件关系与运算.

(1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 例 5 中令 $A=\{$出现“4”$\}$，$B=\{$出现偶数$\}$，则 $A\subset B$. 例 6 中 $B\supset A$，即打靶击中区域 A 时必然击中区域 B，所以图象上即表示区域 B 包含区域 A. (见图 1–2)

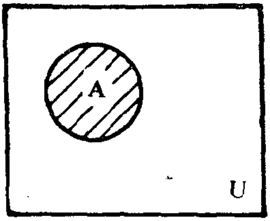

图 1–1

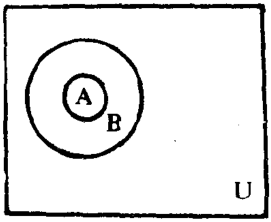

图 1–2

若事件 A 与事件 B 在意义上表示同一事件，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 若 $A=B$，当 A 发生时，B 也必然发生，即有 $B\supset A$；同理 $A\supset B$. 反过来，若 $A\supset B$，又 $B\supset A$，则 A 与 B 表示同一事件，即 $A=B$. 例 5 中令 $A=\{$出现“2”，“4”或“6”$\}$，$B=\{$出现偶数$\}$，则 $A=B$.

(2) 和事件

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A\bigcup B$ 或 $A+B$. $A\bigcup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 和事件 B 都发生.

即:

$$A\bigcup B=\{A，B\text{中至少发生一个}\}$$

例 5 中令 A={出现偶数}, B={出现小于 5 的数}, 则 $A\bigcup B$={出现 1, 2, 3, 4 或 6}. 例 6 中如图 1–3, 区域 $A\bigcup B$ 表示区域 A 与区域 B 的并; 打靶击中区域 $A\bigcup B$, 意味着至少击中区域 A、B 的一个. 由于和事件 $A\bigcup B$ 可以用区域 A 与 B 的并的图象表示, 因此也可称 $A\bigcup B$ 为 A 与 B 的并事件.

给出 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n, 定义它们的和事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为:

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n$ = {A_1, A_2, …, A_n 中至少发生一个}.

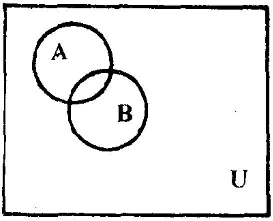

图 1–3

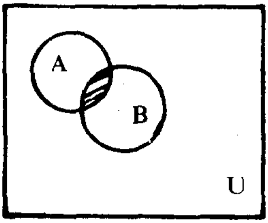

图 1–4

(3) 积事件

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件, 记为 $A\bigcap B$, 简记为 AB. 也就是说, 事件 $A\bigcap B$ 发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生. 即: $A\bigcap$

$B=AB=\{A、B$ 都发生$\}=\{A$ 发生且 B 也发生$\}$. 例 5 中令 $A=\{$出现偶数$\}$, $B=\{$出现小于 5 的数$\}$, 则 $A\cap B=\{$出现 2, 4$\}$. 例 6 中如图 1–4, 区域 $A\cap B$ 表示区域 A 与区域 B 的交; 打靶击中区域 $A\cap B$, 意味着击中区域 A 与区域 B 的公共部分, 即 A 与 B 的交. 由于积事件 $A\cap B$ 可以用区域 A 与 B 交的图象表示, 因此也可称 $A\cap B$ 为 A 与 B 的交事件.

类似地, 可以定义 A_1, A_2, …, A_n 的积事件:

$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1\cap A_2\cap A_3\cdots\cap A_n=\{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都发生$\}$.

(4) 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件, 记为 $A-B$. 例 5 中令 $A=\{$出现偶数$\}$, $B=\{$出现小于 5 的数$\}$, 则 $A-B=\{$出现 6$\}$. 图 1–5 中的阴影部分表示 $A-B$.

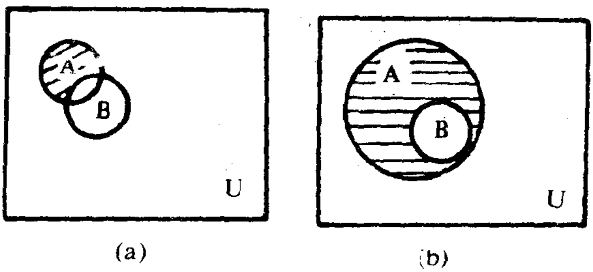

图 1–5

(5) 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=V$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容事件，简称事件 A 与事件 B 互不相容．例 5 中令 $A=\{$出现偶数$\}$，$B=\{$出现奇数$\}$，则 $AB=V$；即 A 与 B 互不相容．图 1–6 中，区域 A 与区域 B 不相交，它直观地表示事件 A 与事件 B 互不相容．对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，如果它们两两互不相容，则称 A_1，A_2，…，A_n 是互不相容的．

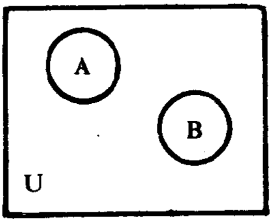

图 1–6

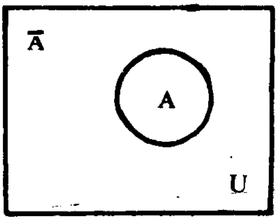

图 1–7

(6) 对立事件

"A 不发生"的事件称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$．由定义不难看出对立是个相互的概念，即 $\overline{A}$ 的对立事件是 A．例 5 中令 $A=\{$出现偶数$\}$，$B=\{$出现奇数$\}$，则 $B=\overline{A}$；同理 $A=\overline{B}$．由定义容易验证 $A-B=A\overline{B}$．例 6 中，$\overline{A}$ 表示区域 A 外的部分，事件 $\overline{A}$ 发生意味着没有击中区域 A(图 1–7)．在例 5 中一次抛掷后，$A=\{$出现偶数$\}$与 $\overline{A}=\{$出现奇数$\}$这两个事件不能同时发生，而且 A 与 $\overline{A}$ 中又必定发生一个，就是说，A 和 $\overline{A}$ 满足：

$$A\cup\overline{A}=U,\qquad A\overline{A}=V$$

一般，若事件 A 与事件 B 互为对立事件，则事件 A 与

事件 B 满足:

$$A\bigcup B=U, \qquad AB=V$$

(7) 互不相容事件完备组

若事件A_1，A_2，…，A_n互不相容，又在每一次试验中事件A_1，A_2，…，A_n必发生其中之一，即:

$$A_1\bigcup A_2\bigcup A_3\cdots\bigcup A_n=U，又A_iA_j=V.\ (i\neq j)$$

则称A_1，A_2，…，A_n为互不相容事件完备组.

例 7 对靶进行二次射击，令A_1={第一次射中，第二次射中}，A_2={第一次射中，第二次未射中}，A_3={第一次未射中，第二次射中}，A_4={第一次未射中，第二次未射中}. 则A_1，A_2，A_3，A_4构成互不相容事件完备组.

又令 A={第一次射中}，B={恰有一次射中}，C={至少有一次射中}，则由事件运算知，有 $A=A_1\bigcup A_2$，$B=A_2\bigcup A_3$，$C=A_1\bigcup A_2\bigcup A_3=\overline{A}_4$.

例 8 设 A，B 为两事件，证明等式:

(1) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\ \overline{B}$.

(2) $\overline{AB}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

证: (1) $\overline{A\bigcup B}=\overline{\{A，B至少发生一个\}}$

$=\{A，B都不发生\}$

$=\{\overline{A}，\overline{B}都发生\}=\overline{A}\ \overline{B}$.

(2) $\overline{AB}=\overline{\{A，B都发生\}}$

$=\{A，B至少不发生一个\}$

$=\{\overline{A}，\overline{B}至少发生一个\}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

例 8 也能用图象表示法给以直观说明. 例 8 中的(1)，(2)称为**德莫根定理**. 另外，事件的运算还符合交换律、结合