

研究生数学教学系列 (工程硕士)

2

工程数学基础

天津大学

曾绍标 韩秀芹 翟瑞彩 编著

A large, stylized logo consisting of the letters 'G' and 'M' in a bold, rounded font. The letters are white with a red outline and are set against a yellow background.

科学出版社

研究生数学教学系列(工程硕士)

工程数学基础

天津大学

曾绍标 韩秀芹 翟瑞彩 编著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书共 10 章,主要介绍线性空间与线性算子,矩阵的相似标准形,赋范空间,有界线性算子与方阵范数,矩阵分析,内积空间与 Hermite 二次型,代数方程组的解法,插值法与数值逼近,数值积分与数值微分,常微分方程的数值解法.每章末附有习题,书末有参考文献.

本书是专供工程硕士使用的数学教材,也可供大专院校有关专业师生和其他研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学基础/曾绍标 韩秀芹 翟瑞彩编著. -北京:科学出版社,2001
(研究生数学教学系列(工程硕士))

ISBN 7-03-009095-0

I. 工… II. ①曾…,②韩…,③翟… III. 工程数学,研究生教材
IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 87503 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 7 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2001 年 7 月第一次印刷 印张:20 1/2
印数:1—5 500 字数:377 000

定 价:31.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

前 言

为满足我校工程硕士研究生的“工程数学基础”教学需要,我们于1998年议定了教学要求和计划,确定了本课程的基本内容.经过三年的教学实践,编写了这本专供工程硕士研究生使用的数学教材.

根据工程硕士的培养目标和我校工程硕士门类齐全的特点,在调查研究的基础上,选取了各专业都必需具备的数学知识和方法以及有助于工程技术人员继续学习的若干近代数学的基本知识作为本书的主要内容.考虑到目前工程硕士生入学时的数学基础,我们将本学科线性代数中的线性空间与线性变换也作为本书的基本内容.

作为工程硕士的数学基础,其主要内容为线性空间与线性算子,赋范空间与有界线性算子,内积空间与正交系,矩阵的相似标准形,矩阵分析,线性方程组的解法,插值与逼近,数值积分与数值微分,常微分方程的数值解法.加“*”的节是选用的内容.

本书的特点是:从简单的数学、物理模型甚至日常生活事例入手,引出抽象的数学概念,进行简明扼要的推理,得出重要的数学理论,列举大量的例题以加深对抽象概念和理论的理解,着重讲清常用方法的数学原理及注意事项,尽可能指出当前使用的最新方法,选择旨在巩固基本内容的适量习题.

本书的第一、三、四、六章由曾绍标执笔,第二、五、七章由韩秀芹执笔,第八、九、十章由翟瑞彩执笔.韩秀芹对全书的行文风格进行了协调统一,并对部分章节做了修改.

本书由毛云英教授主审.在编写过程中得到了天津大学研究生院领导及培养处的大力支持.编写时参考了由熊洪允、曾绍标、毛云英编著的《应用数学基础》一书.对此,我们一并表示衷心的感谢.

限于我们的学术水平和教学经验,书中的错误在所难免,恳请广大读者批评指正.

编著者
(天津大学)

目 录

前言	
第一章 线性空间与线性算子	1
§ 1.1 集合与映射	1
§ 1.2 线性空间概念	13
§ 1.3 线性空间的基与维数	18
§ 1.4 线性算子及其矩阵表示	22
习题一	28
第二章 矩阵的相似标准形	31
§ 2.1 相似矩阵	31
§ 2.2 方阵的相似对角形	32
§ 2.3 多项式矩阵及其 Smith 标准形	40
§ 2.4 不变因子和初等因子	47
§ 2.5 矩阵的 Jordan 标准形和有理标准形	57
§ 2.6 方阵的最小多项式	63
习题二	71
第三章 赋范空间	73
§ 3.1 赋范空间概念	73
§ 3.2 收敛序列与连续映射	79
§ 3.3 赋范空间的完备性	83
习题三	86
第四章 有界线性算子与方阵范数	88
§ 4.1 有界线性算子	88
§ 4.2 方阵范数	93
习题四	98
第五章 矩阵分析	100
§ 5.1 矩阵的微分与积分	100
§ 5.2 方阵序列和方阵级数	105
§ 5.3 方阵函数及其性质	113
§ 5.4 方阵函数值的计算	117
§ 5.5 e^{At} 在解一阶线性常微分方程组中的应用	127
习题五	131

第六章 内积空间与 Hermite 二次型	133
§ 6.1 内积空间	133
§ 6.2 正交与正交系	139
§ 6.3 正规矩阵及其酉对角化	146
§ 6.4 Hermite 二次型与正定矩阵	152
习题六	155
第七章 代数方程组的解法	157
§ 7.1 解线性方程组的 Gauss 消去法	157
§ 7.2 解线性方程组的三角分解法	168
§ 7.3 解线性方程组的迭代法	178
§ 7.4 线性方程组迭代法的收敛性	185
§ 7.5 非线性方程和方程组的解法	192
习题七	204
第八章 插值法与数值逼近	206
§ 8.1 Lagrange 插值	206
§ 8.2 差商与 Newton 插值公式	211
§ 8.3 Hermite 插值与分段插值	215
§ 8.4 三次样条插值	221
§ 8.5 正交多项式	229
§ 8.6 最佳平方逼近	236
§ 8.7 曲线拟合的最小二乘法	241
习题八	248
第九章 数值积分与数值微分	250
§ 9.1 数值求积公式及其代数精度	250
§ 9.2 Newton-Cotes 求积公式	251
§ 9.3 复化求积法	258
§ 9.4 变步长的求积公式与 Romberg 算法	260
§ 9.5 Gauss 型求积公式	266
§ 9.6 数值微分	275
习题九	279
第十章 常微分方程的数值解法	281
§ 10.1 初值问题计算格式的建立	282
§ 10.2 求解初值问题的 Runge-Kutta 方法	287
§ 10.3 收敛性与稳定性	291
§ 10.4 线性多步法	298
§ 10.5 一阶常微分方程组与高阶方程的数值解法	303

§ 10.6 常微分方程边值问题的差分解法·····	306
习题十·····	314
参考文献·····	317

第一章 线性空间与线性算子

本章首先介绍现代数学的两个基本概念——集合与映射,然后引入贯穿全书的极为重要的概念——线性空间,最后介绍定义在线性空间上的一类重要映射——线性算子.

§ 1.1 集合与映射

本节除重点介绍集合与映射的概念和基本性质外,还要介绍本书经常使用的一些术语和记号,以后直接引用时不再加以说明.

一、集合及其运算

1. 集合概念 集合是数学的最基本、最原始的概念之一,因此不可能用其他数学概念对集合下一个严格的定义,只能像几何学中对于“点”、“直线”那样,给以直观的描述.

所谓“集合”是指具有某种确定的性质(或满足一定条件)的“事物”的全体.集合也可简称为集.构成某集合的每一个“事物”都称为该集合的一个元素(简称为元).例如,中国的所有直辖市就是集合,北京、上海、天津和重庆都是这个集合的元素;又如,自然数的全体也是一个集合,它的元素就是一个一个的自然数.

为简单起见,通常用大写字母 A, B, \dots 代表集合,以小写字母 a, b, \dots 代表元素.设 A 是一个集合,若“事物” x 是 A 的元素,则记为 $x \in A$ (读作 x 属于 A),若 x 不是 A 的元素,则记为 $x \notin A$ 或 $x \bar{\in} A$ (读作 x 不属于 A).

将一个集合明确地表示出来的方法一般有两种,即列举法和描述法.

如果某集合 A 的所有元素都能列举出来,那么就将它们写在大括号内(并用逗号隔开)来表示集合 A ,这种方法就是列举法.例如, $\{\text{北京, 上海, 天津, 重庆}\}, \{1, 2, \dots, n, \dots\}, A = \{a, b\}$.

如果某集合 A 是由满足条件(或具有性质) $p(x)$ 的所有 x 构成的,则可将集合 A 表示为 $\{x | p(x)\}$ (或 $\{x : p(x)\}$).例如,可用 $A = \{x | x^2 = 1\}$ 表示方程 $x^2 = 1$ 的解集合(显然, A 也可表示为 $\{-1, 1\}$),单位圆可表示为 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

在理解集合概念时,应注意以下几点:

(1) 一个给定集合的元素所具有的性质(或满足的条件)必须是明确的.例

如,条件“ $x \leq 1$ 的全体实数”是明确的,“ $x \gg 1$ 的全体实数”是不明确的,因此,前者是集合而后者不是集合.这就是说,对于任意的 x 及给定的集合 A ,要么 $x \in A$,要么 $x \notin A$,二者必居其一,且只居其一.

(2)集合中的各元素必须是彼此能够分辨的、互异的.因此,在用列举法表示集合时,其中的元素不能重复出现,例如,应将 $\{a, a, b, c, c\}$ 写为 $\{a, b, c\}$.

(3)集合中的各元素没有先后次序之分.例如 $\{1, 2, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 4, 2\}$ 及 $\{4, 1, 2, 3\}$ 等表示的是同一个集合.

由有限个元素构成的集合称为**有限集**.特别地,将仅含有一个元素的集合叫做**单元集**或**单点集**,必须理解元素 x 和集合 $\{x\}$ 的原则上的区别.将不含任何元素的集合称为**空集**,记为 \emptyset .正如把 0 也算作一个数一样,将空集当作集合在数学上是有益的.由于空集的元素个数为 0 ,因此将空集也算作有限集.不是有限集的集合称为**无限集**.

2.常用记号的说明 在本书中,以下几个集合的记号是专用的:

\emptyset ——空集;

N ——全体自然数所组成的集合,即 $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$;

Z ——全体整数所组成的集合,即 $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$;

Q ——全体有理数所组成的集合;

R ——全体实数所组成的集合,即 $R = (-\infty, +\infty)$;

C ——全体复数所组成的集合,即

$$C = \{a + bi \mid i = \sqrt{-1}, a, b \in R\};$$

$C[a, b]$ ——在闭区间 $[a, b]$ 上连续的全体函数的集合;

$R^{m \times n}$ ——全体 $m \times n$ 实矩阵构成的集合;

$C^{m \times n}$ ——全体 $m \times n$ 复矩阵构成的集合.

此外,用 Q^+ (Q^-) 表示全体正(负)有理数构成的集合,用 R^+ (R^-) 表示全体正(负)实数构成的集合.

为了简化叙述常采用下面的符号:设 p, q 是任意两个命题, x 是任意的“事物”,则

(1) $p \Rightarrow q$ 表示 p 蕴涵 q ,亦即 p 是 q 的充分条件,或 q 是 p 的必要条件;

(2) $p \Leftrightarrow q$ 表示 p 与 q 等价,亦即 q 是 p 的充要条件;

(3) $\forall x$ 表示对于任意的 x 或一切 x ;

(4) $\exists x$ 表示存在一个 x ,亦即至少有一个 x ;

(5) $\exists |x$ 表示存在惟一的一个 x ;

(6) s. t. 表示“使得”或“能使”或“满足”.

例如,闭区间上连续函数的最大值定理采用上述符号可表示为

$$\forall f \in C[a, b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b], \text{ s. t. } f(x_0) = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

3. 集合的包含关系与子集

定义 1.1 设 A, B 是任意集合.

(1) 若 $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$, 则称 A 含于 B (或 B 包含 A), 记为 $A \subset B$ (或 $B \supset A$), 并称 A 是 B 的子集;

(2) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等 (即 A 与 B 是完全相同的两个集合), 记为 $A = B$; 否则称 A 与 B 不相等, 记为 $A \neq B$;

(3) 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$.

由定义可知, 对于任意集合 A, B, C 下列结论成立:

(1) $\emptyset \subset A$, 即空集是任何集合的子集;

(2) $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A$;

(3) $A \subset A$, 即集合间的包含关系“ \subset ”具有自反性;

(4) $A \subset B$ 且 $B \subset C \Rightarrow A \subset C$, 即包含关系“ \subset ”具有传递性.

4. 集合的运算 在某一个问题中, 所讨论的一切“事物”构成的集合称为基本集合 (或全集), 它必须是非空的, 记为 X . 此问题中的所有集合都是基本集合的子集. 例如, 在单元函数微积分中 \mathbb{R} 是基本集合, 在立体几何中整个空间是基本集合.

定义 1.2 设 X 是基本集合, $A, B \subset X$.

(1) 集合 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为 A 与 B 的交集, 即 $A \cap B$ (可读作 A 交 B) 是由 A 与 B 的公共元素构成的集合;

(2) 集合 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为 A 与 B 的并集, 即 $A \cup B$ (可读作 A 并 B) 是由 A 的所有元素与 B 的所有元素构成的集合;

(3) 集合 $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的差集, 即 $A \setminus B$ (可读作 A 差 B 或 A 减 B) 是由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合;

(4) 集合 $A^c = X \setminus A$ 称为 A 关于基本集合 X 的余集, 简称为 A 的余集或补集;

可以借助文 (Venn) 氏图来直观地解释集合的交、并、差、补的运算及其他有关概念. 图 1.1(a, b, c, d) 中的阴影部分分别表示 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ 和 A^c .

关于集合的运算, 显然有

(1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B, A \subset A \cup B, B \subset A \cup B, A \setminus B \subset A$;

(2) $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A, A \cap X = A, A \cup X = X$;

(3) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset, (A^c)^c = A$;

(4) $X^c = \emptyset, \emptyset^c = X$;

(5) $A \setminus B = A \cap B^c$;

(6) $A \subset B \Leftrightarrow A^c \supset B^c$;

(7) 若 $A \cap B = \emptyset$ (此时称 A 与 B 不相交), 则 $A \subset B^c$ 且 $B \subset A^c$.

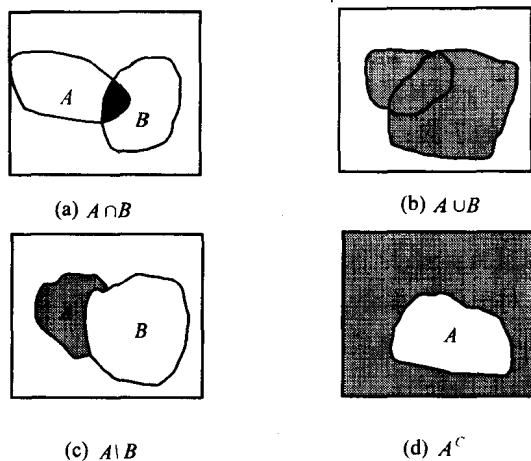


图 1.1

定理 1.1 设 X 是基本集合, $A, B, C \subset X$, 则集合的运算服从以下规律:

- (1) $A \cap A = A, A \cup A = A$; (幂等律)
- (2) $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$; (交换律)
- (3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; (结合律)
- (4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (分配律)
- (5) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. (对偶原理)

证 此处只证明后一个分配律和前一个对偶原理(亦称 De Morgan 公式), 其余的证明作为练习留给读者自己完成.

(1) 记 $V = A \cup (B \cap C), W = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 要证 $V = W$, 只需证明 $V \subset W$ 且 $W \subset V$ 即可.

因为 $\forall x \in V = A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ 或 $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ 或 $\begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow$
 $\begin{cases} x \in A \text{ 或 } x \in B \\ x \in A \text{ 或 } x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cup B) \\ x \in (A \cup C) \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = W$, 所以 $V \subset W$.

另一方面, $\forall x \in W = (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B$, 且 $x \in A \cup C \Rightarrow$
 $\begin{cases} x \in A \text{ 或 } x \in B \\ x \in A \text{ 或 } x \in C \end{cases} \Rightarrow$ 当 $x \in A$ 时, 显然有 $x \in A \cup (B \cap C) = V$; 当 $x \notin A$ 时,
 必有 $x \in B$ 且 $x \in C$, 即 $x \in B \cap C \subset A \cup (B \cap C) = V$. 故 $W \subset V$.

(2) 因为 $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$, 所以

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

下面介绍两个集合的另一种运算——直积,在给出定义之前先看一个实例:设某项工程须分前后两期完成,如果前期有三种实施方案(记为 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$)可选择,后期有两种方案(记为 $B = \{b_1, b_2\}$)可选择,那么完成这项工程的所有可能的实施方案构成一个集合

$$C = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\},$$

其元素是将集合 A 的每一个元素与 B 的各元素按前后次序配成的有序对 $(a_i, b_j) (i=1, 2, 3; j=1, 2)$.

一般地,设 A, B 是任意两个集合, $\forall a \in A, \forall b \in B$ 作有序对 (a, b) , 其中 a, b 分别称为有序对 (a, b) 的第一坐标和第二坐标,并且规定

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2.$$

我们熟悉的平面上点的坐标就是这样的有序对 (x, y) , 而空间点的坐标则是有序三元组 (x, y, z) .

定义 1.3 设 A 和 B 是任意两个集合. 有序对构成的集合 $\{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 称为 A 与 B 的直积或笛卡儿(Descartes)乘积, 记为 $A \times B$ (可读作 A 叉 B), A 与 B 分别称为 $A \times B$ 的第一坐标集和第二坐标集.

实例中的集合 C 就是集合 A 与 B 的直积, 即 $C = A \times B$.

一般说来, $A \times B \neq B \times A$, 即直积不满足交换律, 但由定义可知 $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$. 当 $A = B$ 时, 可将 $A \times A$ 缩记为 A^2 , 例如坐标平面是两个实数轴 \mathbb{R} 的直积, 故可用 \mathbb{R}^2 表示, 即 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

例 1.1 设 $A = (1, 2), B = [0, 1)$, 则 $A \times B = \{(x, y) | 1 < x < 2, 0 \leq y < 1\}$ 是如图 1.2 所示的正方形.

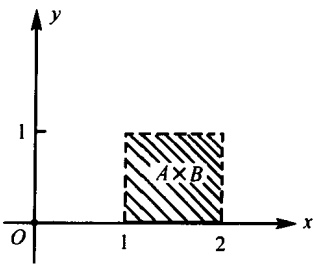


图 1.2

对于任意有限多个集合 A_1, A_2, \dots, A_n , 可以同两个集合一样来定义它们的交、并、直积的运算, 即

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \\ &= \{x | \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{有 } x \in A_i\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ &= \{x | \exists i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{s.t. } x \in A_i\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n A_i &= A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

其中 (x_1, x_2, \dots, x_n) 是有序 n 元组, x_i 是它的第 i 个坐标, A_i 称为直积

$\prod_{i=1}^n A_i$ 的第 i 个坐标集 ($i=1, 2, \dots, n$); n 个 A 的直积可缩记为 A^n , 例如

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n \uparrow} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$C^n = \underbrace{C \times C \times \cdots \times C}_{n \uparrow} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in C, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

5. 集族及其运算 设 D 是一个非空集合, 若 D 中的每一个元素 α 都对对应基本集合 X 中唯一的子集 A_α , 则将所有 A_α 构成的集合称为 X 的以 D 为指标集的集族, 简称集族, 记为 $\{A_\alpha \mid A_\alpha \subset X, \alpha \in D\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$. 当 $D = N$ 时称为集列, 简记为 $\{A_n\}$.

同样可定义集族(即一族集合) $\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$ 的交、并的运算, 即

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in D} \text{ 的交 } \bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha \equiv \{x \mid \forall \alpha \in D \text{ 有 } x \in A_\alpha\},$$

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in D} \text{ 的并 } \bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha \equiv \{x \mid \exists \alpha \in D, \text{ s. t. } x \in A_\alpha\};$$

并且遵从定理 1.1 所列的运算规律, 例如 $(\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha)^C = \bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha^C$ 等等.

二、映射及其性质

在这一段里, 我们来建立两个集合的元素间的一种对应关系——映射.

1. 映射的基本概念

定义 1.4 设 X, Y 是两个非空集合. 若存在一个对应法则(或规律) f , 使得对每一个 $x \in X$, 都存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 是从 X 到 Y 的映射, 记为

$$f: X \rightarrow Y, \quad \text{或 } f: x \mapsto y \quad (x \in X).$$

y 称为 x 在映射 f 下的像, 记为 $y = f(x)$ 或 $y = fx$. 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记为 $\mathcal{D}(f)$, 即 $\mathcal{D}(f) = X$. Y 的子集 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ 称为映射 f 的值域, 记为 $\mathcal{R}(f)$.

若 $A \subset X$, 则称 Y 的子集 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ 是集合 A 在映射 f 下的像.

若 $B \subset Y$, 则称 X 的子集 $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ 是集合 B 在映射 f 下的逆像(或原像); Y 中单元素集 $\{y\}$ 在映射 f 下的逆像 $f^{-1}(\{y\})$ 就称为元素 y 在映射 f 下的逆像, 简记为 $f^{-1}(y)$, 即 $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

应当注意的是: 此处无论 $f^{-1}(B)$ 还是 $f^{-1}(y)$ 都是一个整体, 是一个集合的记号; 而且集合 $f^{-1}(y)$ 不一定是单元素集; 当然它们都可能是空集.

当 Y 是数集(如 $Y \subset R$ 或 $Y \subset C$)时, 通常称映射 f 为集合 X 上的泛函; 当 X, Y 都是数集时, 映射 f 就是以前学习过的函数.

例 1.2 设有集合 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 今定义 $f: X \rightarrow Y$ 使得 $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 5, f(d) = 3$. 试求 $\mathcal{R}(f), f(\{a, d\}), f^{-1}(\{2, 3\}), f^{-1}(3), f^{-1}(1)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathcal{R}(f) &= \{2, 3, 5\}, \\ f(\{a, d\}) &= \{2, 3\}, \\ f^{-1}(\{2, 3\}) &= \{a, b, d\}, \\ f^{-1}(3) &= \{b, d\}, \\ f^{-1}(1) &= \emptyset. \end{aligned}$$

称映射 $f: X_1 \rightarrow Y_1$ 与 $g: X_2 \rightarrow Y_2$ 相等(记为 $f = g$), 如果它们的对应法则相同且定义域相等, 即

$$f = g \Leftrightarrow X_1 = X_2 = X \text{ 且 } \forall x \in X, f(x) = g(x).$$

2. 映射的基本性质

* **定理 1.2** 设有 $f: X \rightarrow Y$, 则 $\forall A, B \in X, \forall C, D \in Y$, 有

- (1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- (2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
- (3) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;
- (4) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;
- (5) $f^{-1}(D^c) = [f^{-1}(D)]^c$,

其中 $D^c = Y \setminus D, [f^{-1}(D)]^c = X \setminus f^{-1}(D)$. 此定理的证明留给有兴趣的读者作为练习完成, 并注意(2)不能改为等式.

3. 几种重要的映射

定义 1.5 设有映射 $f: X \rightarrow Y$.

(1) 若 $\mathcal{R}(f) = Y$, 即 $\forall y \in Y, \exists x \in X, \text{s. t. } y = f(x)$, 则称 f 是满射, 或称 f 是从 X 到 Y 上的映射.

(2) 若 $\forall y \in \mathcal{R}(f), \exists ! x \in X, \text{s. t. } f(x) = y$, 则称 f 是单射, 或称 f 是从 X 到 Y 的一一映射.

(3) 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射, 或称 f 是从 X 到 Y 上的一一映射.

由定义立即可知, f 为单射的充要条件是: $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时 $f(x_1) \neq f(x_2)$; 因此单调函数显然是单射.

当 $f: X \rightarrow Y$ 是双射时, f 在集合 X 与 Y 的元素之间建立了一对一的对应关系, 故今后也把双射叫做一一对应.

例 1.2 中的映射不是单射[因为 $f(b) = f(d)$], 也不是满射[因为 $f^{-1}(1) = \emptyset$], 从而不是双射.

例 1.3 以 $I(x) = x (\forall x \in X)$ 定义的映射 $I: X \rightarrow X$, 称为集合 X 上的恒等映射或单位映射, 简记为 I_X . 显然 I_X 是双射.

例 1.4 以 $f(x) = y_0 (\forall x \in X)$ 定义的映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为常值映射. 显然, 常值映射当 X 不是单元素集时, 不是单射; 当 Y 不是单元素集时不是满射, 因为 $\mathcal{R}(f) = \{y_0\} \neq Y$.

例 1.5 设 A 是非空集合, 若 $\forall n \in \mathbb{N}$, 取 $a_n \in A$, 则得到一个无穷序列, 记为 $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$. 由 $\{a_n\}$ 所确定的映射 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ (即 $a_n = f(n)$) 一般说来不是单射, 也不是满射.

4. 逆映射与复合映射

定义 1.6 若 $f: X \rightarrow Y$ 是单射, 则 $\forall y \in \mathcal{R}(f)$, 由关系式 $f(x) = y$ 确定了惟一的 $x \in X$ 与之对应, 于是就定义了一个从 $\mathcal{R}(f)$ 到 X 上的映射, 记为 $f^{-1}: \mathcal{R}(f) \rightarrow X$, 并称 f^{-1} 是 f 的逆映射.

定义表明: $f: X \rightarrow Y$ 存在逆映射的充要条件是 f 为单射, 且 $f^{-1}: \mathcal{R}(f) \rightarrow X$ 必定是满射; 当 f 是双射时, f 的逆映射为 $f^{-1}: Y \rightarrow X$. 易知恒等映射的逆映射就是它本身.

定义 1.7 设有映射 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$, 将 X 到 Z 的映射 $x \mapsto g(f(x)) (\forall x \in X)$ 称为 f 与 g 的复合映射, 记作 $g \circ f: X \rightarrow Z$, 即 $(g \circ f)x = g(f(x)) (\forall x \in X)$.

定理 1.3

(1) 若 $f: X \rightarrow Y$ 是双射, 则 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也是双射; 且 $f^{-1} \circ f = I_X, f \circ f^{-1} = I_Y$, 即 $\forall x \in X, \forall y \in Y$ 有 $(f^{-1} \circ f)(x) = x, (f \circ f^{-1})(y) = y$;

(2) 若 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 都是单射 (或满射), 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 也是单射 (或满射);

(3) 若 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 都是双射, 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 也是双射, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

证

(1) $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 显然是双射, 下证 $f^{-1} \circ f = I_X$. $\forall x \in X$, 令 $f(x) = y$, 因为

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x,$$

所以

$$f^{-1} \circ f = I_X.$$

同理可证

$$f \circ f^{-1} = I_Y.$$

(2) $\forall x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$, 因 f 是单射, 于是 $f(x_1) \in Y, f(x_2) \in Y$, 且 $f(x_1) \neq f(x_2)$; 又因为 g 是单射, 所以

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2),$$

即 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 是单射.

(3)由(2)即知 $g \circ f$ 是双射,从而 $(g \circ f)^{-1}: Z \rightarrow X$ 存在. $\forall z \in Z$, 因 $(g \circ f)^{-1}$ 是双射,故 $\exists |x \in X$, s. t. $(g \circ f)^{-1}(z) = x$, 即 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. 若记 $f(x) = y$, 则 $g(y) = z$. 又因为 f, g 都是双射,因而可逆,故 $y = g^{-1}(z)$, $x = f^{-1}(y)$. 于是 $(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x = (g \circ f)^{-1}(z)$ 对任意 $z \in Z$ 成立,所以 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

5. 可数集

定义 1.8 设 A 是无限集,若存在一个双射 $f: N \rightarrow A$, 则称 A 是可数集或可列集;不是可数的无限集称为不可数集.

例 1.6 证明:集合 A 是可数的,当且仅当 A 的所有元素可以排成一个各项互不相同的无穷序列,即

$$A_n = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \quad (\text{且当 } i \neq j \text{ 时 } a_i \neq a_j).$$

证 因为 $f: n \mapsto a_n \in A_n (\forall n \in N)$ 是双射,故结论成立.

此结论表明,若无限集合的全体元素能用自然数来编号,则必定是可数的.

利用定义及例 1.6 的结论,不难知道全体正偶数的集合是可数的, Z 是可数集.

将可数多个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的交集记为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 并集记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

关于可数集的运算有如下结论.

定理 1.4

- (1)可数集的子集是可数集或有限集;
- (2)有限多个或者可数多个可数集的并是可数集;
- (3)有限多个可数集的直积是可数集.

证

(1)显然.

(2)有限多个的情况容易证明(请读者完成),现证可数多个的情况.

设有可数多个可数集 $A_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}, \dots) (n \in N)$, 要证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集. 为此先将它们的所有元素排成表 1.1, 再按表中箭头所指的顺序将它们的所有元素排成序列

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, \dots),$$

然后从中删去重复的元素,得到一个各项互异的无穷序列,故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集.

表 1.1

$A_1:$	a_{11}	\nearrow	a_{12}	a_{13}	\nearrow	a_{14}	\cdots
		\swarrow		\nearrow	\swarrow		
$A_2:$	a_{21}		a_{22}	a_{23}		a_{24}	\cdots
	\downarrow	\nearrow		\swarrow			
$A_3:$	a_{31}		a_{32}	a_{33}		a_{34}	\cdots
		\swarrow					
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
$A_n:$	a_{n1}		a_{n2}	a_{n3}		a_{n4}	
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots	\vdots

(3) 只需证明两个集合的情况. 设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots)$, 则

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A, b_j \in B, (i, j = 1, 2, \dots)\}$$

的所有元素可排成各项互异的无穷序列:

$$((a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), \dots),$$

故 $A \times B$ 是可数集.

例 1.7 证明 \mathbb{Q} 是可数集.

证 若令 $A_q = \{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots\} (q \in \mathbb{N})$, 则 A_q 为可数集, 于是由定理 1.3,

$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q$ 是可数集; 同理可知 \mathbb{Q}^- 是可数集. 所以 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ 是可数集.

应当注意的是, 不可数集是大量存在的, 例如 \mathbb{R} 及 \mathbb{R} 中的任何长度不为零的区间都是不可数的. 显然若 $A (\subset B)$ 是不可数集, 则 B 一定是不可数集.

三、数域, 实数集的确界

1. 数域

定义 1.9 设 \mathbb{K} 是非空数集, 若 \mathbb{K} 对于四则运算是封闭的, 即 $\forall a, b \in \mathbb{K}$, 有

$$a \pm b \in \mathbb{K}, ab \in \mathbb{K}, a/b \in \mathbb{K} (b \neq 0),$$

则称 \mathbb{K} 是一个数域.

由定义立即可知 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 都是数域, 分别称为有理数域、实数域和复数域; 而 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+$ 等都不是数域. 显然任何数域都必定含有 0 和 1 这两个数, 因此必定包含有理数域, 即 \mathbb{Q} 是最小的数域; 由此可知, 任何数域都是一个无限数集. 本书只在实数域或复数域上讨论问题, 在不必区分的时候, 将以 \mathbb{K} 表示数域, 即 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. 实数集的确界 在给出“确界”定义之前, 回忆一下非空实数集 A 的有