

高等学校教学用书



实变函数論

上 册

И. И. 那湯松著

徐 瑞 云 譯

陈 建 功 校

人民教育出版社

51.621
213
=1

高等学校教学用书



实 变 函 数 论

上 册

И. П. 那 湯 松 著
徐 瑞 云 譯
陈 建 功 校

(修 訂 本)

2K563 117

人民教育出版社

1963.7.18

本书原系根据苏联国立技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的那湯松(И. П. Натансон) 著“实变函数论”(Теория функций вещественной переменной) 1950年版译出的, 后又由译者根据原书增订本(1957年第二版)修订。原书经苏联高等教育部审定为高等学校教学参考书。
全书共十八章, 中译本暂分上下两册出版。

实 变 函 数 论

上 册

И. П. 那湯松著

徐瑞云译

北京市书刊出版业营业许可出字第2号
人民教育出版社出版(北京景山东街)

上海洪兴印刷厂印装
新华书店上海发行所发行
各地新华书店经售

统一书号 K13010·25 开本 850×1168 1/32 印张 9 13/16
字数 235,000 印数 37,201—41,700 定价 (8) 另 0.95
1955年6月第1版 1958年10月第2版(修订本)
1963年5月上海第16次印刷

初版序言摘要

本書是适用于我國大學現行教學大綱的一本教科書。鑒于函數論在培養數學家的教學體系中日趨重要，我在本書中（用小型鉛字排印）放入了一系列超出大綱範圍的問題。

在大學中，實變函數論是在三年級開始講授的。所以我假定讀者已能靈活掌握分析的基本概念：無理數，極限理論，連續函數的最重要的性質，導數，積分，級數等都假定已為讀者所熟知，這些概念是屬於任何一本詳盡的微積分書中的。

書中大部分的章后都附有習題。這些習題一般說來是相當難的，有時需要經過很大的努力才能解決。但是對於要想切實地通曉這門知識的讀者，我仍然建議他們務必盡最大努力至少解決其中一部分的問題。

本書的現在形式是我以前所寫的“實變函數論基礎”改編而成的，該書在1941年在列寧格勒大學出版，印數不多，不久即行銷完。我早有意於再版，並且這個願望已經部分地實現了，這就是“拉強西卡學派”出版部曾用烏克蘭譯文刊印了該書，譯者是基輔大學的副教授С. И. 蘇賀維茨基。

Е. Я. 列夫士教授曾經對於上述的烏克蘭譯本加以評論並且提出了一系列寶貴的意見，我在從事於新版的修正時也採納了這些意見。此外，我很感謝 Н. К. 巴里教授，Д. К. 法捷耶夫教授，尤其是 Г. М. 菲赫金哥爾茨教授的許多建議和批評。對於以上提到的各位我都致以衷心的謝意。

И. 那湯松

1949年12月3日

第二版序言

本版与初版的重要区别如下：

1. 叙述了勒貝格积分的变数变换問題(就旧变数是新变数的單調函数的情形)。

2. 介紹了凸函数的某些知識, 包括琴生和楊格不等式(楊格不等式在“附录”中)。

3. 証明了康安定理及杜-布阿-雷夢达-瓦来-布善定理和某些其他結果, 以及关于函数的三角級数展开的唯一性問題。

4. 叙述了当若阿-彼龙积分理論并給出了当若阿-辛欽积分的概念。

5. 討論了將書中主要結果搬到在無界域上定义的函数上去的問題^①。

6. 叙述了(在“附录”中)显式表示的曲綫的求長問題。

为了避免本書篇幅过大起見, 我去掉了豪司道夫定理(关于“較易”測度問題的不可解性)以及初版的第十七章(关于祖国学者在函数論的貢獻的概述)。

在新版的准备中我得到了 I. M. 菲赫金哥尔茨教授許多宝贵的指示, 校閱者 I. II. 阿基洛夫和我的兒子 I. II. 那湯松給我很提供了很多有益的意見。我感謝以上提到的各位。

II. 那湯松

1956年12月8日

^① 这一章的材料我是利用了在美国版上的附录, 由翻譯者 E. 淹維特教授所引进。

目 录

初版序言摘要	v
第二版序言	vi
第一章 无限集	1
§1 集的运算(1) §2 一对一的对应(6) §3 可列集(9)	
§4 連續統的势(14) §5 势的比较(21)	
第二章 点集	31
§1 極限点(31) §2 閉集(34) §3 內点及开集(40) §4 距	
离及隔离性(43) §5 有界开集及有界閉集的結構(48) §6 凝	
点、閉集的势(53)	
第三章 可測集	59
§1 有界开集的測度(59) §2 有界閉集的測度(65) §3 有界	
集的內測度与外測度(69) §4 可測集(73) §5 可測性及測	
度对于运动的不变性(78) §6 可測集类(83) §7 測度問題	
的一般注意(88) §8 維他利定理(90)	
第四章 可測函数	96
§1 可測函数的定义及其最簡單的性质(96) §2 可測函数的其	
他性质(103) §3 可測函数列、度量收敛(104) §4 可測函	
数的結構(112) §5 維爾斯脫勞司定理(119)	
第五章 有界函数的勒貝格积分	126
§1 勒貝格积分的定义(126) §2 积分的基本性质(132) §3 在	
积分号下取極限(139) §4 黎曼积分与勒貝格积分的比較(142)	
§5 求原函数的問題(147)	
第六章 可和函数	151
§1 非負可測函数的积分(151) §2 任意符号的可和函数(160)	
§3 在积分号下取極限(167)	

第七章 平方可和函数181

- §1 主要定义、不等式、范数(181) §2 平均收敛(184) §3 正交系(193) §4 空间 l_2 (204) §5 线性独立系(213) §6 空间 L_p 与 l_p (218)

第八章 有界变差函数、司帝吉斯积分227

- §1 单调函数(227) §2 测的映照、单调函数的微分(230) §3 有界变差函数(241) §4 赫利的选择原理(247) §5 有界变差的连续函数(251) §6 司帝吉斯积分(256) §7 在司帝吉斯积分号下取极限(262) §8 线性泛函(267)

第九章 绝对连续函数、勒贝格不定积分271

- §1 绝对连续函数(271) §2 绝对连续函数的微分性质(274) §3 连续映照(277) §4 勒贝格不定积分(281) §5 勒贝格积分的变数变换(291) §6 全密点、近似连续(296) §7 有界变差函数及司帝吉斯积分的补充(298) §8 求原函数的问题(302)

第一章 無限集

§1. 集的运算

“集論”是实变函数論的基础。它的历史并不久：有关集論的最初的重要文献是 Г. 康妥在十九世紀末叶才發表的，可是，現在集論已是数学中一門范围很广的学科了。在这本書里，集論只有輔助的意义，所以我們只討論這門学科的一些基础知識。讀者对于这方面的理論若需要深入研究，可参閱 П. С. 阿力山大洛夫及豪司道夫所著的書^①。

集这个概念，是不可以精确定义的数学基本概念之一，所以我們只給予一种描写。凡是具有某种特殊性質的对象的整体，总合或集合称之为集。例如自然数的全体为一集；直綫上点的全体为一集；以实数为系数的多項式的全体为一集；諸如此类。

任何对象，对于某一集而言，或是屬於該集，或是不屬於該集。二者必居其一，但不可得兼。

若 A 为某集， x 是一个屬於 A 的对象，則称 x 为 A 的元素，記作：

$$x \in A.$$

若 x 不屬於 A ，則写为

$$x \notin A.$$

例如； R 为有理数全体所成之集，則

^① П. С. 阿力山大洛夫, Введение в общую теорию множеств и функций. Гостехиздат, 1948 (有中譯本：集与函数的泛論初阶)。

Ф. 豪司道夫, Теория множеств, ОНТИ, 1937 (俄譯本)。

$$\frac{3}{4} \in R, \sqrt{2} \in R.$$

一个集的自身决不能作它的元素：

$$A \notin A.$$

以后为行文方便起见，我們引入空集这一概念，就是不含任何元素的集。例如方程

$$x^2 + 1 = 0$$

的实根的全体就是“空集”。我們用記号 $\emptyset$ 表示空集，从行文的前后呼应来看，运用这个記号不致与数“零”發生混淆，空集有时也用 A 来記。

除空集外，我們在研究中必然会遇到的还有“單元素集”。凡仅含一个元素之集称为單元素集。例如方程

$$2x - 6 = 0$$

的根的全体是一个單元素集，它是由單独的一个元素，就是数 3，所組成的。但应注意不要把單元素的集和它所含的唯一元素混为一談。

若集 A 的一般元素是 x ，則有时写为：

$$A = \{x\}.$$

有时集的元素可以全部写出的，那末可將集的元素全部写出后外加一个花括弧。例如

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

定义 1. 兩集 A 与 B ，若 A 所有的元素都是 B 的元素，則称 A 为 B 的子集，写为：

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

B 称为 A 的包括集。

例如 N 为自然数全体的集， R 为有理数全体的集，則

$$N \subset R.$$

显然,集的自身是它的子集:

$$A \subset A.$$

空集是任何集 A 的子集。要使这断言完全明白,只要把定义 1 改述如下:所谓 $A \subset B$ 乃表示凡元素不屬於 B 的也不屬於 A 。

定义 2. 兩集 A 与 B , 若 $A \subset B$, $B \subset A$, 則称 A 与 B 相等, 写为:

$$A = B.$$

例如 $A = \{2, 3\}$, B 为方程

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

的根所成之集, 則 $A = B$ 。

定义 3. 設 A 与 B 为二集, 又集 S 包含 A 与 B 中所有元素但不含其他元素, 称 S 为 A 与 B 的和集, 写为:

$$S = A + B \quad \text{或} \quad S = A \cup B.$$

同样可以定义 n 个集 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和集, 可以定义一系列集 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 的和集; 更一般的, 如果有一組集合 A_i , 它們用不同的記号 ξ 以示区别, 那末也可以定义所有 A_i 的和集。写作

$$S = A_1 + A_2 + \dots + A_n, \quad S = \sum_{k=1}^n A_k, \quad S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

或
$$S = \bigcup_{k=1}^n A_k,$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots,$$

或
$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$S = \sum_{\xi} A_{\xi} \quad \text{或} \quad S = \bigcup_{\xi} A_{\xi}.$$

例如, $\textcircled{1}$ S 为所有正数的集, 則

$\textcircled{1}$ 如同平常一样, 当 $a < b$, 我們以 (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ 分别表示滿足 $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ 的 x 的集。其中每一个称为间隔, 而 a 及 b 为其端点。间隔 (a, b) 又称区间, 而 $[a, b]$ 称为线段或线段。间隔 $[a, b)$ 及 $(a, b]$ 称为半线段。

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1, k].$$

若 $A \subset B$, 則显然的

$$A + B = B,$$

特别是

$$A + A = A.$$

定义 4. 設 A 与 B 为二集, 又集 P 包含 A 与 B 的所有共同元素但不含任何其他元素, 称 P 为 A 与 B 的交集, 写为:

$$P = AB \quad \text{或} \quad P = A \cap B.$$

例如 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 則

$$AB = \{3, 4\}.$$

同样可以定义 n 个集 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交集, 也可定义一系列集 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 的交集; 更一般的, 对于一組集合 A_ϵ , 它們用不同的記号 ϵ 以示区别, 那末也可以定义所有 A_ϵ 的交集. 相应的記号是:

$$P = A_1 A_2 \cdots A_n, \quad P = \prod_{k=1}^n A_k, \quad P = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

或

$$P = \bigcap_{k=1}^n A_k,$$

$$P = A_1 A_2 A_3 \cdots, \quad P = \prod_{k=1}^{\infty} A_k, \quad P = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots,$$

或

$$P = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$P = \prod_{\epsilon} A_{\epsilon} \quad \text{或} \quad P = \bigcap_{\epsilon} A_{\epsilon}.$$

例如 $\prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (0)$ (單元素集)

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{k}\right) = \emptyset \quad (\text{空集})$$

若 $A \subset B$, 則显然的

$$AB = A,$$

特别是 $AA = A$ 。

若二集 A 与 B 没有共同元素, 则写为

$$AB = 0;$$

此时也称 A 与 B 是“不相交的”。

定理 1. 設 A 为一集, $\{E_i\}$ 是以集 E_i 做元素的集, 则

$$A \sum_i E_i = \sum_i AE_i.$$

証明 假設

$$S = A \sum_i E_i, T = \sum_i AE_i.$$

設 $x \in S$, 則 $x \in A$ 并且 $x \in \sum_i E_i$ 。后者表示有 ξ_0 适合于 $x \in E_{\xi_0}$, 总之 $x \in AE_{\xi_0}$, 所以 $x \in T$ 。从而証明了

$$S \subset T.$$

反之, 若設 $x \in T$, 則必有 ξ_0 适合于 $x \in AE_{\xi_0}$ 。換言之: $x \in A$ 又 $x \in E_{\xi_0}$ 。由 $x \in E_{\xi_0}$ 知 $x \in \sum_i E_i$ 。又因 $x \in A$, 所以 $x \in S$ 。于是

$$T \subset S.$$

由 $T \subset S$ 和 $S \subset T$, 得着 $S = T$ 。

系 $A(B + C) = AB + AC$ 。

定义 5. 設 A 与 B 为二集, 又集 R 包含属于 A 而不属于 B 的一切元素且除此而外無其他元素, 則称 R 为 A 与 B 的差集, 写作:

$$R = A - B \quad \text{或} \quad R = A \setminus B.$$

例如 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 則

$$A - B = \{1, 2\}.$$

定理 2. 設 A, B, C 为三集, 則

$$A(B - C) = AB - AC.$$

其証明可由讀者自行补足。

集的运算与普通算术的运算頗有相似之处, 但是并不完全相

同,如上面所說的关系式 $A+A=A$ 及 $AA=A$, 在算术上是不成立的。下面我們还要举一个不相似的例子。

定理 3. 关系式

$$(A-B)+B=A \quad (1)$$

当 $B \subset A$ 且仅当 $B \subset A$ 时成立。

証明 設 (1) 为真, 則每一被加集均为其和集的子集, 所以 $B \subset A$ 。又設 $B \subset A$, 則 $(A-B)+B \subset A$ 。但是另一方面, 关系式 $(A-B)+B \supset A$ 的成立是無条件的, 所以 $B \subset A$ 含有 (1)。

§ 2. 一对一的对应

設 A 与 B 为两个有限集, 自然会發生下面的問題: 它們所含元素的个数是否相同。我們可以数一下每一集所含元素的个数是多少, 从所得的数字是否相同就可以解决这个問題。但是不数也可以解决問題。例如

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d, e\}, \\ B &= \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}. \end{aligned}$$

如果我們細察下面的表:

$$\begin{array}{c} A: | a | b | c | d | e | \\ B: | \alpha | \beta | \gamma | \delta | \varepsilon | \end{array},$$

我們虽然不数, 也曉得 A 与 B 的元素个数是相同的。

上面所說的比較法有这样一個特性: 对于一集的每一个元素, 另一个集中有一个并且只有一个元素和它对应, 反之亦然。这个比較法的优点是它也可以用之于無限集。例如, N 为自然数全体的集, 而 M 为所有 $\frac{1}{n}$ 的全体, 用对应法, 將 N 中的 n 对应于 M 中的 $\frac{1}{n}$:

$$\begin{array}{c} N: | 1 | 2 | 3 | 4 | \dots \\ M: | 1 | \frac{1}{2} | \frac{1}{3} | \frac{1}{4} | \dots \end{array},$$

立即可以看到 N 与 M 所含元素是一一对应地配得起来的。

現在我們給配对無余的概念以精确的定义：

定义 1. 設 A 与 B 为二集，具有下面性質的法則 φ ：使 A 的任一元素 a ，有 B 的唯一元素 b 与之对应，并且使 B 的任一元素 b ，也有 A 的唯一元素 a 与之对应，此时称 φ 建立了 A 与 B 的一一对应的对应（简称一一对应）。

定义 2. 若 A 与 B 間能建立一一对应的对应，則称 A 与 B 是“对等”的，或者称它們的“势”是相同的。此事記作

$$A \sim B.$$

不难明白，二个有限集只有当它們的元素的个数是相同时才是对等的。由上可見，“其势相同”一語乃是有限集的元素“个数相同”的直接扩充。

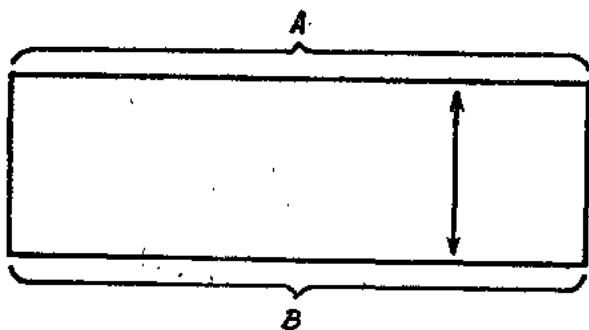


圖 1.

下面举几个对等集的例子。

設 A 与 B 是一个長方形的一对平行边上点的集（圖 1），則 $A \sim B$ 。

設 A 与 B 是兩個同心圓周上点的集（圖 2），显然 $A \sim B$ 。

所可注意的，此时若將此二圓周展开为直綫，則此二綫段的長并不相同。这个例子告訴我們，一个較長的綫段并不含有“更多

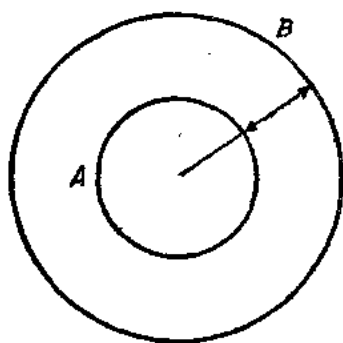


圖 2.

的”点, 这种现象, 由下例更为显然。假设 A 表示直角三角形斜边上点的集, B 表示底边上点的集, 那末由圖 3, 可以看到 $A \sim B$, 虽然底边的长小于斜边。假使我们將底边复盖在斜边的上面, 那末 B 就成为 A 的子集, 并且是 A 的真子集 (B 是 A 的真子集乃是: $B \subset A$, 但 $B \neq A$)。由此例可以

明白: 的确有集可与其真子集对等的。但是任何有限集却不能和它的真子集对等。由此可见, 只有无限集才有此种奇妙的性质。以后我們还要证明, 凡无限集必含有与它自身对等的真子集。此地我們再举一个例子。

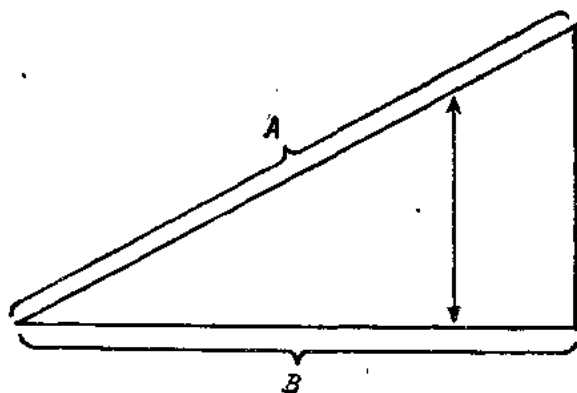


圖 3.

設 N 表示自然数全体的集, 而 M 为偶数的全体:

$$N = \{n\}, \quad M = \{2n\}.$$

將此二集用下法使成一一对应:

N :	1	2	3	4	5	...
M :	2	4	6	8	10	...

則 M 与 N 是对等的, 虽然 M 是 N 的真子集。因此得到: “自然数有多少, 偶数也有多少”。

下面关于对等集的若干簡單性質, 讀者可以自己証明之。

定理 1. (a) $A \sim A$ 。

(b) 若 $A \sim B$, 則 $B \sim A$ 。

(c) 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 則 $A \sim C$ 。

定理 2. 設 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 及 $B_1, B_2, B_3, \dots$ 为二系列的集。若諸集 A_n 各不相交, 諸集 B_n 亦各不相交, 即

$$A_n A_{n'} = 0, B_n B_{n'} = 0 \quad (n \neq n'),$$

且

$$A_n \sim B_n \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

則

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k.$$

§ 3. 可列集

定义 1. 設 N 为自然数全体所成之集

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

凡与集 N 对等的集 A 称为可列集, 或者称 A 是可列的。

此时也称 A “具有势 a ”。很明显的, 所有可列集是兩兩对等的。

下面是几个可列集的例子:

$$A = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\},$$

$$B = \{1, 8, 27, 64, \dots, n^3, \dots\},$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\},$$

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}.$$

定理 1. 集 A 为可列的必要且充分条件是可以把它列成形式

式

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}. \quad (1)$$

証明 若 A 具有 (1) 的形式, 那末將 A 的元素 a_n , 使它对应于它的足数 n , 因而得 A 与 N 間的一一对应。所以 A 是可列的。

反之, 若設 A 是可列的, 那末在 A 与 N 之間存在一种一一对应法 φ 。由 φ 得 n 的对应元素 a_n , 于是 A 就可写成 (1) 的形式了。

定理 2. 任何無限集 A 必含有可列子集。

証明 設 A 为一無限集。从 A 取一元素 a_1 , 因为 A 是無限集, 它不会因取出 a_1 而耗尽, 所以从 $A - \{a_1\}$ 又可取一元素 a_2 。 $A - \{a_1, a_2\}$ 决非空集, 所以又可以由此取一元素 a_3 。因为 A 是無限集, 所以此种手續可以繼續做去不会終止。因此得着 A 的可列子集:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

定理 3. 可列集的任何無限子集是可列的。

証明 設 A 为可列集, B 是它的無限子集。如果將 A 列成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

那末依照次序逐一的看下去, 不时会遇到 B 中的元素。而且对于 B 中每一个元素, 早晚会我們遇到, 因此也就有一个自然数与之“相遇”。若將 B 中元素重新編号, 順次的用自然数来对应, 就知道 B 是可列的。

系 从可列集 A , 除去一个有限子集 M , 所得的 $A - M$ 仍为可列集。

定理 4. 一个有限集和一个可列集如無公共元素, 那末它們的和集是一个可列集。

証明 設

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\},$$