奇异积分方程組及某些边値問題

〔苏联〕H. П. 維庫阿著　路见可譯

上海科学技术出版社

奇异积分方程組
及某些边值問題

〔苏联〕H. П. 維庫阿 著
路　見　可　譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书闡述多个未知函数的希尔伯脱問題和含柯西型积分主值的奇异积分方程組的解法，并介紹它們的应用和推广。全书共分四章，第一章討論已知函数滿足 H 条件时多个未知函数的齐次和非齐次希尔伯脱問題的解法以及奇异积分方程組的理論，第二章討論具間断系数的情形，最后两章为以上两章結果的应用和推广。本书是 Н. И. Мусхелишвили «奇异积分方程»（中譯本，上海科学技术出版社）一书的继續，可供綜合大学数学专业函数論专門化，偏微分方程专門化作为教学用书，也可供有关研究生和研究工作者参考.

本书譯者对原书作了若干注釋，并在卷末补充了近期文献.

СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Н. П. ВЕКУА

Гостехизд, 1950.

奇 异 积 分 方 程 組

及 某 些 边 值 問 題

路 見 可 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷三厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 7 4/32　排版字数 168,000
1963 年 6 月第 1 版　1963 年 6 月第 1 次印刷　印数 1—3,700

統一书号 13119·510　定价（十四）1.20 元

作 者 序

在本书中，我們討論了关于多个未知函数的齐次和非齐次 Hilbert 边値問題，幷給出了奇异积分方程組（方程中含 Cauchy 主値意义下的积分）的頗为完整的理論。在求解复变函数論和数学物理方程中的許多边値問題时，多个未知函数的 Hilbert 問題理論以及与它緊密相关的奇异积分方程組理論都有重要应用。本书中論述了某些这种問題的解法。

全书由四章构成。第一章闡述在已知函数满足 Hölder 条件的情况下，关于多个未知函数的 Hilbert 問題的解法以及奇异积分方程組的理論。关于多个未知函数的齐次 Hilbert 問題，在 Plemelj 的著作中就已解决。在本书 § 4, § 5 中叙述了 Plemelj 的結果，給出了詳細的証明，幷对 Plemelj 的論証作了本质的簡化和补充。在 § 5, § 6 中給出了，当已知函数满足 Hölder 条件时，关于多个未知函数的 Hilbert 边値問題的完全解。在 § 7～§ 9 中闡述了，当方程系数满足 Hölder 条件时，奇异积分方程組的理論。除 § 5 a, § 8 a 和 § 9 外，整个这一章几乎全无改变地轉引自 Н. И. Мусхелишвили 院士与作者合写的著作[1]。这一著作的一部分已写入 Н. И. Мусхелишвили 的专著《奇异积分方程》一书中㊀。我們决定仍在这里全部地叙述著作[1]，因为，为了理解后文，它是必需的。

第二章論述关于多个未知函数的具間断系数的齐次和非齐次

㊀ 指該书 1946 年第一版（見本书正文后参考文献[22]）最后一章。但該书已有 1962 年新版。在新版中这一章已改写过，因此与这里第一章重复很少。——譯者注

Hilbert 边值問題的解，并把所得結果应用到具間断系数的奇异积分方程組的研究上去. 指出了，借助于确定的变换，具間断系数的 Hilbert 边值問題可化为第一章中討論过的問題. 然后建立了所謂确定类的典則解組，闡述了具間断系数的奇异积分方程組的十分完备的理論.

第三章討論第一、二章中所得結果的某些应用. 这里討論了下列問題:

1. 关于解析函数組的 Riemann-Hilbert 問題;
2. 关于解析函数組的具間断系数的 Riemann 边值問題;
3. 关于椭圓型綫性微分方程組的基本边值問題.

第四章引述以上各章結果的某些推广;其中討論了:

1. 关于多个未知函数的广义 Hilbert 边值問題;
2. 广义奇异积分方程組;
3. 出現角点时的 Hilbert 边值問題和奇异积分方程組.

本专著的对象是对于解析函数論和数学物理方程有兴趣的研究生和科学工作者，也适用于物理数学系的高年級学生. 本书中所述的一切結果都有詳細的証明. 要求讀者熟悉复变函数論, Fredholm 积分方程論和初等因子論的基础.

作者认为有必要在这里，向 Н. И. Мусхелишвили 院士致以衷心的謝意，他經常乐意向我提出許多至为宝貴的意見.

Н. П. В.

目　录

第　一　章

关于多个未知函数的 Hilbert 边値問題及其在奇异积分方程組中的应用

第　二　章

具間断系数的多个未知函数的 Hilbert 边値問題以及具間断系数的奇异积分方程組

第三章

应 用

I. 解析函数組的 Riemann-Hilbert 边值問題

II. 解析函数組的一个具間断系数的 Riemann 綫性边值問題

III. 椭圓型綫性微分方程組的某些基本边值問題

第四章

推 广

I. 多个未知函数的广义 Hilbert 边值問題

第一章

关于多个未知函数的 Hilbert 边值問題及其在奇异积分方程組中的应用

§1 引　　言

整个这一章，除 § 5a，§ 8a 和 § 9 外，几乎无改变地引自与 Н. И. Мусхелишвили 院士合写的著作[1] ❶.

在这一章中，我們給出了关于多个未知函数的齐次和非齐次 Hilbert 边値問題❷的解答，然后把它应用到奇异积分方程組的研究上去，这些方程中含有 Cauchy 主値意义下的积分.

在**一个**未知函数的情况下，Hilbert 問題的完全有效且初等的解已由 Ф. Д. Гахов [2] 給出；后来在 И. Н. Векуа 的著作[3]，[4]中，找到了这个解在一个未知函数的奇异积分方程理論中的应用.

关于多个未知函数的**齐次** Hilbert 問題（表述在下面 § 4 中）的解答已在 Plemelj 的著作[5]中給出. 从这个解出发，我們建立起非齐次問題的一般解（§ 6），利用它，我們得以証明上述类型奇异积分方程組的某些一般命题.

应該注意，和一个未知函数的 Hilbert 問題相反，关于多个未知函数的这一問題的解答并沒有能够（借助求积法）表作有限形式；当然，这是就一般情况而言，因为在許多特殊情况下，解答可以

❶ 方括号中的数字指附于本书正文后参考文献的順序号碼.

❷ 有些作者，例如 Ф. Д. Гахов，把这里的所謂 Hilbert 問題称作 Riemann 問題，而把本书后面所称的 Riemann-Hilbert 問題称作 Hilbert 問題. ——譯者注

完全初等地作出❶.

在 § 4 以及 § 5 的一部分中，我們叙述了 Plemelj 的一些結果，并給出了詳細的証明，这些結果对我們是很重要的. 必須指出，从 § 5 中基本定理（第 22 頁）的証明开始，我們采用了和 Plemelj 完全不同的方法，而在这定理后面所讲的許多結果，Plemelj 那时还沒有. 特别，他沒有引进典則解組这个一般概念，而局限于借一定手續所作出的一个解組（这一手續比我們在下面 § 5 开始时所指出的略为复杂些）；他也沒有运用指标概念（§ 5）. 此外，Plemelj 沒有用矩陣記号，这就使他的論述复杂化了.

§ 2 記号和术語

1. 以后我們用 L 表示一些无公共点的簡单光滑封閉曲綫的集合，他們圍成复数平面 z 上某一有限的連通开区域 D^+. 用 D^- 表示在全平面中和 $D^+ + L$ 相补的（一般說来，不是連通的）区域. 我們认为 L 的正向是这样的，它永远使区域 D^+ 在它的左边.

2. 一函数 $\varphi(z)$，在全平面中除曲綫 L 上的点以外到处有定义，如果滿足下列条件，我們就称它为**分区全純的**：a）函数 $\varphi(z)$ 在每一区域 D^+ 和 D^- 中全純，但点 $z=\infty$ 可能除外；b）当 z 沿着**任何路徑**——整个位于 D^+ 或 D^- 中——逼近 L 上的任何点 t 时，函数 $\varphi(z)$ 趋于确定的（有限）极限 $\varphi^+(t)$ 或 $\varphi^-(t)$❷.

我們将称分区全純函数 $\varphi(z)$ **在无穷远处有有限阶**，如果 $\varphi(z)$ 对 $|z|^m$ 的比当 $z\to\infty$ 时趋于零，其中 m 为某一常数. 在这种情况下，当 $|z|$ 充分大时，将有如下形式的展式：

$$\varphi(z)=a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots \quad (a_k \neq 0),$$

❶ 例如参看 [6]，或 § 5a.

❷ 按照熟知的、易于証明的 Painlevé 定理（例如参看 [10]，第 53 頁），在这些条件下，如果补上函数 $\varphi(z)$ 在 L 上的値 $\varphi^+(t)$，則它就在閉区域 $D^+ + L$ 上連續；相仿的定理对区域 $D^- + L$ 也成立.

其中 k 为某一整数[1]. 当 $k>0$ 时, $\varphi(z)$ 在无穷远处有 k 阶极点, 当 $k<0$ 时, 有 $|k|$ 阶零点. 当 $k=0$ 时, $\varphi(z)$ 在无穷远处取确定的、异于零的有限值; 这时, 我們也說 $\varphi(z)$ **在无穷远处有零阶零点或极点.**

如果在无穷远点的邻域内,

$$\varphi(z)=\gamma(z)+O\left(\frac{1}{z}\right),$$

其中 $\gamma(z)$ 是一多項式, 則称这一多項式为**函数 $\varphi(z)$ 在无穷远处的主部.** 当 $k<0$ 时, $\gamma(z)\equiv 0$.

3. 以后我們要遇到 n 个函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 的集合, 它們給定在某些区域中. 我們称这样的函数集合为一**向量**, 用一个字母 φ 表示, 写成

$$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n),$$

并称 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 为**向量 φ 的分量.**

考察綫性变换

$$\psi_\alpha=\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\varphi_\beta \quad (\alpha=1, 2, \cdots, n), \tag{2.1}$$

其中 $a_{\alpha\beta}$ 是一些函数, 給定在与 φ 的定义域相同的那些区域中. 和通常一样, 我們把变换(2.1)簡写成

$$\psi=A\varphi, \tag{2.2}$$

其中 $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 和 $\psi=(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ 是向量, 而 A 是矩陣

$$A=\|a_{\alpha\beta}\|=\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

我們把矩陣 A 的行列式記作 $\det A=\det\|a_{\alpha\beta}\|$. 如果 $\det A\neq 0$, 則矩陣 A 称作**非退化的**或**滿秩的.**

---

[1] 这里我們认为, 在 D^- 的包含 $z=\infty$ 的那一部分中, $\varphi(z)$ 不恒等于零.

我們称和数 $\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\cdots+\varphi_n\psi_n$ 为**两向量** $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ 与 $\psi=(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ **的內积**；这一內积将記作 $\varphi\psi$ 或 $\psi\varphi$，所以

$$\varphi\psi=\psi\varphi=\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\cdots+\varphi_n\psi_n.$$

和通常一样，我們称矩陣 $C=\|c_{\alpha\beta}\|$ **是两矩陣** $A=\|a_{\alpha\beta}\|$ 与 $B=\|b_{\alpha\beta}\|$ **的积** $C=AB$，其中

$$c_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta} \quad (\alpha, \beta=1, 2, \cdots, n).$$

把 A 的行与列交换所得的矩陣 $A'=\|a'_{\alpha\beta}\|$，$a'_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$，称为 A 的**轉置矩陣**. 容易驗証，对于任两向量 φ, ψ，我們有

$$\psi A\varphi=\varphi A'\psi, \tag{2.3}$$

这里 $\psi A\varphi$ 指的是向量 ψ 与 $A\varphi$ 的內积（对右端也类似地理解）.

注意下列熟知的关系式：

$$(AB)'=B'A',$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})'=(A')^{-1}; \tag{2.4}$$

在公式(2.4)中假定了矩陣 A 与 B 是满秩的，也就是，它們的行列式不等于零.

4. 以后在談到某一矩陣是連續的，某一矩陣满足条件 H (Hölder 条件)[1] 等等时，我們总是指：它的所有分量满足上述条件. 对向量也是这样.

特别，如果 $\varphi_\alpha=\varphi_\alpha(z)$ $(\alpha=1, 2, \cdots, n)$ 是分区全純的函数，我們就称向量 $\varphi(z)=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 是**分区全純的**. 如果所有这些函数在无穷远处有有限阶，則称向量 $\varphi(z)$ **在无穷远处有有限阶**. 我們称各分量 $\varphi_\alpha(z)$ 的阶数中的最大者 k 为这个向量**在无穷远处的阶**.

如果在无穷远点的邻域內，

[1] 当函数、向量或矩陣满足 Hölder 条件时，我們就簡称它满足条件 H.

$$\varphi_\alpha(z)=\gamma_\alpha(z)+O\left(\frac{1}{z}\right)\quad(\alpha=1,\,2,\,\cdots,\,n),$$

其中 $\gamma_\alpha(z)$ 是多項式，則称向量

$$\gamma(z)=(\gamma_1,\,\gamma_2,\,\cdots,\,\gamma_n)$$

为 $\varphi(z)$ **在无穷远处的主部**. 如果 $k<0$, 則 $\gamma(z)\equiv 0$.

§3 Plemelj 公式及其一些推論

設 $\rho(t)$ 是已給在 L 上的、滿足条件 H 的一函数. 考察函数

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\rho(t)\,dt}{t-z}\text{[1]},\tag{3.1}$$

其中 z 是平面中不在 L 上的某点. 函数 $\varphi(z)$ 在 D^+ 和 D^- 中处处全純，在无穷远处为零，而当 z 沿着 D^+ 或 D^- 中的任何路徑逼近 L 上的点 t_0 时，它趋于确定的极限：

$$\varphi^+(t_0)=\frac{1}{2}\,\rho(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\rho(t)\,dt}{t-t_0},\tag{3.2}$$

$$\varphi^-(t_0)=-\frac{1}{2}\,\rho(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\rho(t)\,dt}{t-t_0},\tag{3.3}$$

这里积分理解为 Cauchy 意义下的主值；这是著名的 Plemelj 公式[7][1]. 这样，$\varphi(z)$ 是一分区全純函数，在无穷远处为零.

可以証明，函数 $\varphi^+(t)$ 和 $\varphi^-(t)$ 在 L 上滿足条件 H；如果 λ 是函数 $\rho(t)$ 的 Hölder 指数，則 $\varphi^+(t)$ 和 $\varphi^-(t)$ 的 Hölder 指数，当 $\lambda<1$ 时可取作 λ，当 $\lambda=1$ 时可取作任意地接近于 1[2].

現設 $\varphi(z)$ 表 D^+ 内的一全純函数，在 D^++L 上連續，在 L 上取值 $\varphi^+(t)$. 由 Cauchy 定理，有

---

[1] 如无特別声明，积分总是沿着 L 的正向进行的.——譯者注

[1] 証明例如可以在 И. И. Привалов 的书 [8] 第 196～202 頁中找到.

[2] $\lambda<1$ 时这定理是 Plemelj [7] 証明的. 定理的証明可以在 [8] 第 202～204 頁中找到.

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^+(t)\,dt}{t-z},\quad 当\ z\in D^+, \tag{3.4}$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^+(t)\,dt}{t-z},\quad 当\ z\in D^-. \tag{3.5}$$

等式 (3.5) 是下一事件的必要条件：已給在 L 上的連續函数 $\varphi^+(t)$ 是一在 D^+ 內全純、連續到 L 上的某函数 $\varphi(z)$ 的边値.

可以証明，这个条件也是充分的. 証明时我們限于假定(对我們的目的来說这已足够了) $\varphi^+(t)$ 滿足条件 H. 于是根据等式 (3.3)，由 (3.5) 得知：

$$0=-\frac{1}{2}\varphi^+(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^+(t)\,dt}{t-t_0}\quad (在\ L\ 上). \tag{3.6}$$

現在用公式 (3.4) 来定义 D^+ 中的一函数 $\varphi(z)$. 由等式 (3.2)，这一函数的边値等于

$$\frac{1}{2}\varphi^+(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^+(t)\,dt}{t-t_0};$$

而按照 (3.6)，最后这边値等于 $\varphi^+(t_0)$，这就証明了我們的論断. 其次，容易看出，条件(3.6)等价于条件(3.5).

相仿地，設 $\varphi(z)$ 是 D^- 內的一全純函数，連續到 L 上，在 L 上取値 $\varphi^-(t)$，且在无穷远处有有限阶，因而在无穷远点的邻域內，

$$\varphi(z)=\gamma(z)+\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{z^2}+\cdots, \tag{3.7}$$

其中 $\gamma(z)$ 是某一多項式 (函数 $\varphi(z)$ 在无穷远处的主部)。 根据 Cauchy 定理，我們有

$$-\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^-(t)\,dt}{t-z}-\gamma(z),\quad 当\ z\in D^-, \tag{3.8}$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^-(t)\,dt}{t-z}-\gamma(z),\quad 当\ z\in D^+. \tag{3.9}$$

等式 (3.9) 是下一事件的必要充分条件：連續函数 $\varphi^-(t)$ 是一在 D^- 內全純、連續到 L 上、在无穷远处有已知的主部 $\gamma(z)$ 的函

数 $\varphi(z)$ 的边值. 如果认为 $\varphi^-(t)$ 满足条件 H(这一假定对我們来說已完全足够了),这一事实的証法完全与前相似. 注意,和上面一样,条件(3.9)等价于下一条件:

$$0=\frac{1}{2}\varphi^-(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^-(t)\,dt}{t-t_0}-\gamma(t_0)\quad(\text{在 } L \text{ 上}).\tag{3.10}$$

易見,如果 $\varphi(z)$ 指的是向量 $\varphi(z)=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$,而不是一单个函数,而 $\gamma(z)$ 也是一向量,其分量为多項式,則所有前述結論均仍成立.

§4 齐次 Hilbert 問題

关于 n 个未知函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 的齐次 Hilbert 問題,可表述如下:

求一分区全純向量 $\varphi(z)=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$,它在无穷远处有有限阶,已知边值条件:

$$\varphi_\alpha^+(t_0)=G_{\alpha1}(t_0)\varphi_1^-(t_0)+G_{\alpha2}(t_0)\varphi_2^-(t_0)+\cdots+G_{\alpha n}(t_0)\varphi_n^-(t_0)$$
$$(\text{在 } L \text{ 上})\quad(\alpha=1,2,\cdots,n),$$

或者,簡写为(参看(2.2))

$$\varphi^+(t_0)=G(t_0)\varphi^-(t_0)\quad(\text{在 } L \text{ 上}),\tag{I}$$

其中

$$G(t_0)=\|G_{\alpha\beta}(t_0)\|\quad(\alpha,\beta=1,2,\cdots,n)$$

是一矩陣,給定在 L 上,满足条件 H,且在 L 上无处退化,也就是,它的行列式 $\det G(t_0)$ 在 L 上到处 $\neq 0$.

以后在談到問題(I)的解时,我們总是指异于零解 $\varphi(z)\equiv 0$ 的解.

注意,如果 $\overset{1}{\varphi}(z),\overset{2}{\varphi}(z),\cdots,\overset{k}{\varphi}(z)$ 是問題(I)的一些任意特解,則表达式

$$\varphi(z)=p_1(z)\overset{1}{\varphi}(z)+p_2(z)\overset{2}{\varphi}(z)+\cdots+p_k(z)\overset{k}{\varphi}(z)\tag{4.1}$$

显然也是某个解，这里 $p_1(z)$, …, $p_k(z)$ 是任意多項式.

在下一节中，将給出所提問題的完全解，并将証明，这一問題的**任何**解 φ 的边值 $\varphi^+(t)$ 与 $\varphi^-(t)$ 滿足条件 H ❶. 暂时我們限于只寻求具有这一性质的解，因而(如果不作相反的声明)，对于問題(I)的解 $\varphi(z)$，我們指的只是这样的解，它的 $\varphi^+(t)$ 与 $\varphi^-(t)$ 滿足条件 H❷.

首先来求在无穷远处具有給定的主部的解 $\varphi(z)$，用

$$\gamma(z)=(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) \tag{4.2}$$

記这主部，其中 $\gamma_\alpha=\gamma_\alpha(z)$ $(\alpha=1, \cdots, n)$ 是給定的多項式.

在这种提法下，显然，問題(I)等价于下一問題.

求定义在 L 上的一向量 $\varphi^-(t_0)$，滿足条件 H，并且使得：

1) 向量 $\varphi^-(t_0)$ 是一在 D^- 內全純、連續到 L 上、在无穷远处有給定主部 $\gamma(z)$ 的向量 $\varphi(z)$ 的边值；

2) 与 $\varphi^-(t_0)$ 以綫性变換

$$\varphi^+(t_0)=G(t_0)\varphi^-(t_0)$$

相关联的向量 $\varphi^+(t_0)$ 是一在 D^+ 內全純、連續到 L 上的向量 $\varphi(z)$ 的边值.

根据前节所述，条件 1) 与 2) 分别等价于下列条件：

$$\frac{1}{2}\varphi^-(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^-(t)\,dt}{t-t_0}=\gamma(t_0), \tag{4.3}$$

$$-\frac{1}{2}G(t_0)\varphi^-(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{G(t)\varphi^-(t)\,dt}{t-t_0}=0. \tag{4.4}$$

这样，向量 $\varphi^-(t_0)$ 必須同时滿足两方程(4.3)与(4.4)，它們是一种特殊形式的奇异积分方程，或者，用通常的术語，是 n 个未知函数 φ_1^-, …, φ_n^- 的**奇异方程組**❸.

---

❶ 这是我們所作假設条件——函数 $G_{\alpha\beta}(t_0)$ 滿足条件 H——的推論.

❷ 由关系式(I)推得，如果向量 φ^+ 或 φ^- 之一滿足条件 H，則另一个也有这性质.

❸ 以后，在类似的情况下，我們有时用"方程"这一名称，有时則用"方程組".

把方程(4.4)改写为

$$-\frac{1}{2}\varphi^{-}(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G^{-1}(t_0)G(t)\varphi^{-}(t)\,dt}{t-t_0}=0, \qquad (4.4')$$

从(4.3)减去(4.4′)，便得一新积分方程

$$\varphi^{-}(t_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G^{-1}(t_0)G(t)-E}{t-t_0}\varphi^{-}(t)\,dt=\gamma(t_0), \qquad (4.5)$$

其中 E 是单位矩陣. 方程(4.5)是一通常的(一般說来，拟正則的第二种) Fredholm **积分方程組**。实际上，容易看出，在我們所設条件下，会有

$$\frac{G^{-1}(t_0)G(t)-E}{t-t_0}=\frac{K(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\alpha}} \quad (0\leqslant\alpha<1), \qquad (4.6)$$

其中 $K(t_0,\ t)$ 是滿足条件 H 的某矩陣。

現在要弄清楚：1)在怎样的条件下方程(4.5)可解；2)是否方程(4.5)的任一解导致原問題的一解。

我們将在稍后来回答第一个問題。暫时只討論第二个問題。首先注意，不難由等式(4.6)驗証，方程(4.5)的任何(連續)解都滿足条件 H。

設 $\varphi^{-}(t)$ 是方程(4.5)的任一解. 显然，当且仅当 $\varphi^{-}(t)$ 同时滿足条件(4.3)与(4.4)时，这个解就导致原 Hilbert 問題(I)的解，这两个条件表示：$\varphi^{-}(t)$ 是一在 D^{-} 内全純并在无穷远处有主部 $\gamma(z)$ 的向量 $\varphi(z)$ 的边値，而 $G(t_0)\varphi^{-}(t_0)$ 是一在 D^{+} 内全純的向量 $\varphi(z)$ 的边値. 我們将对这些条件給以稍为不同的形式. 为此我們引进一个全純向量 $\psi(z)$，定义如下：

$$\left.\begin{aligned}\psi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{-}(t)\,dt}{t-z}-\gamma(z), && \text{当 } z\in D^{+},\\ \psi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G(t)\varphi^{-}(t)\,dt}{t-z}, && \text{当 } z\in D^{-};\end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$