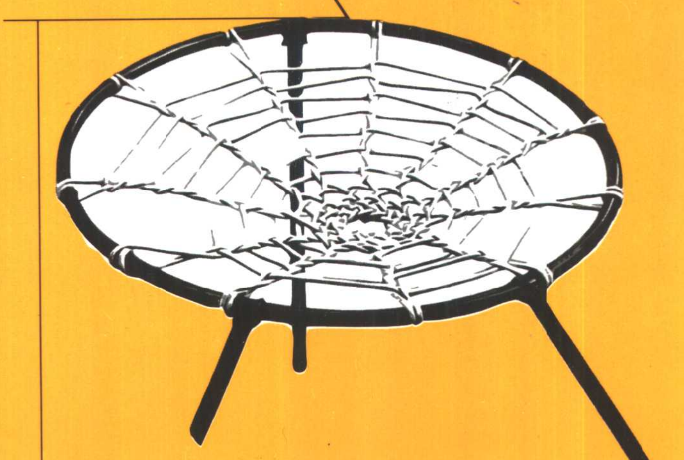
新题型

高中数学
探索性问题

罗超　沈翔　编著



华东师范大学出版社

高考新题型

高中数学
探索性问题

罗超　沈翔　编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学探索性问题/罗超,沈翔编著.—上海:华东师范大学出版社,2001.11

(高考新题型)

ISBN 7-5617-2783-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①罗…②沈…… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 074003 号

高中数学探索性问题

编　　著　罗　超　沈　翔

策划组稿　倪　明

特约编辑　董纯飞

封面设计　黄惠敏

版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社

市场部 电话 021-62865537

传真 021-62860410

http://www.ecnupress.com.cn

社　　址　上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

印 刷 者　江苏如东印刷厂

开　　本　890×1 240　32 开

印　　张　11.75

字　　数　305 千字

版　　次　2001 年 11 月第一版

印　　次　2001 年 11 月第一次

书　　号　ISBN 7-5617-2783-6 /G · 1362

定　　价　14.00 元

出 版 人　朱杰人

前　言

高中数学是高中教育的一门重要的工具学科.由数学本身的特点决定了数学学习是一种思维活动.数学习题又是数学内容的重要组成部分,因此解数学题也就成为一种思维活动.数学教育的理论研究和心理学研究表明,数学解题活动中蕴含着丰富的逻辑思维、形象思维和直觉思维的活动,它们的综合作用,辩证发展能产生创新思维.而三种思维能否形成并能综合作用,能否辩证发展决定于数学习题的内容与形式.

长期来,我国的数学教育在抓好"双基","培养三大能力"的口号指导下,只注重数学基础知识(知识的结论)和基本技能的传授,忽视让学生体验去获得心智的整体发展.反映在数学习题上,注重习题对所学知识的理解与巩固,忽视让学生去发现问题、提出问题进行探究;注重符号变换中的技能技巧,忽视让学生动手实践做数学;注重运算能力和逻辑思维能力的训练,忽视直觉思维和形象思维的培养.即使在逻辑思维的训练中只注重演绎推理的训练,忽视归纳推理的训练.因此采用的习题都是条件完备、答案惟一、缺乏让学生发展思维空间的标准题型.这种习题难以培养学生的创新能力.

从20世纪80年代末起,各地开始了课程教材改革和高考命题的改革,使数学习题的调整与改革也逐步得到推进,出现了如结果是开放的开放性习题和需要经历观察、试验、分析、比较、类比、归纳、猜测、证论等过程的归纳推理方法来解决的探索性习题等新型的习题.这些新型习题的出现,不但丰富了原有数学题的题型,

同时，因为归纳推理又是一种由旧事物推出新事物的推理方法，是创新能力的一种成分，也为创新能力的培养提供了途径。这些新题型受到了青睐，分别被用在高中数学的教学中和高考的数学试题中。

由于数学探索性问题是一种新题型，提出的时间还不长，理论研究尚未成熟，设计编拟还没有成法，已有的探索性问题的资料还不能满足教学的需要。同时，构建能满足推进培养创新精神和实践能力为重点的素质需要的数学习题系统，也需要通过大量设计、编拟、开发提供丰富的数学探索性问题的资料。据此情况，笔者将在数学教学改革实践中积累、改造和编拟的数学探索性问题，并选用了一些成题，按高中数学教材的顺序整理成本书。愿本书的出版能对数学习题系统的建议起抛砖引玉的作用。限于编者的见识和水平，书中的疏漏和错误在所难免，请读者赐教指正。

华东师范大学出版社的倪明先生参与了本书编写提纲的讨论，并对本书的出版给予极大支持和帮助，在此向他表示衷心感谢。梅珍、金贤、李成等同志提供了部分资料和对习题进行了演算，在此也向他们表示感谢。

编　者

2001 年 8 月

目　录

高中数学探索性问题概述

美国数学家哈尔莫斯对数学的组成提出这样的观点:“数学的真正的组成部分应该是问题和解,问题才是数学的心脏.”这个观点已被数学界普遍接受.这里的数学问题是指以数学为内容,或者虽不以数学为内容,但必须运用数学概念、理论或方法才能解决的问题,其中能使学生熟悉和掌握数学课程标准提出的教学要求,并能使学生的心智得到发展的数学问题就是数学习题.在这种观点的支配下,数学解题活动成了数学教学中一种基本的教学活动形式.

随着科学技术的迅速发展和社会的进步,要求通过数学教学培养出有更高数学素质、具有更强创造能力的人;同时,在现代教育思想的影响下,数学教育工作者在对数学教育的改革与发展的反思中,认识到数学教学不应建立在“概念、定理—例题—练习”的知识传授型模式之上,而应建立在着眼于学生发展的积极鼓励、引导学生独立、自主进行探索学习的模式上.一些数学教育工作者在建构主义哲学观的影响下,认为数学教学应让学生通过积极思考和活动主动地构建知识,开展了拓展数学习题观念.扩充数学习题的题型等方向的研究.于是从 20 世纪 70 年代开始出现了相对于传统封闭题而言的开放题.从 20 世纪 80 年代起,我国也有一些数学教育工作者开始研究数学习题,旨在使数学教学落实“打好基础,培养能力,发展智力”的教学指导思想.在那时的高考数学试卷中曾出现了不同于传统封闭题、所求结论不指明、需学生自行探索结果的试题.到 20 世纪 90 年代初,为推进实施素质教育而开展了

课程教材改革和高考改革. 在数学学科的改革中,为培养学生观察、比较、分析、综合、抽象和概括等思维能力,为培养学生能用数学工具描述和处理自然界和社会中的某些现象,从数学角度提供发现和提出问题、进行探索和研究的渠道和广阔的空间,提出了探索性问题和开放性问题等一些新题型. 本书将集中讨论数学探索性问题.

一　对数学探索性问题的认识

数学问题可按不同的标准加以分类,不同的分类标准得到不同类型的数学题. 探索性数学题是按数学题构成要素标准、着眼于数学题的功能进行分类中的一种题型. 通常一个数学问题的构成包含四个要素,即题设条件,解题的依据,解题的方法,问题的结论. 分析四个要素中已知要素的多少,便得到按构成要素分析分类的各种题型. 在这种分类中,至少有一个要素解题者是必须知道的,否则就不成为数学题,也无法解. 如果题目的四个要素都是已知的,或者结论虽未明确指明,但它是被完全确定的,也就是说有固定答案的,这类数学问题称为封闭性数学问题,解这类问题有定向的解题方法,常被用作即时巩固学生学得的数学知识、技能或方法,以强化学生的思维定势的练习题和测试题. 例如:

例 1　已知 $0 < \theta < 2\pi$, 复数 $z = 1 - \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, $u = a^2 + a\mathrm{i}$(a 是实数),且 zu 是纯虚数. 若 $w = z^2 + u^2 + 2zu$, 试用反证法证明 w 不可能是正实数.

此题对于学习复数的学生来说,题设条件和题目结论都是已知的,解题的方法也是已知的,即用反证法,解题的依据是复数运算法则,复数为实数的条件,也都是已知的,由于构成此题的四个要素都是已知的,所以是一道封闭题.

如果把这题稍加改变,成这样一题:

例 2　已知 $0 < \theta < 2\pi$, 复数 $z = 1 - \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, $u =$

a^2+ai (a 是实数),且 zu 是纯虚数. 若 $w=z^2+u^2+2zu$,试问 w 可能是实数吗? 为什么?

将例 1 与例 2 的构成要素作比较可发现,这两题的条件是一样的,差别在于例 1 指明了题目要求得的结果和获得结果可采用的解法,而例 2 却没有确定要求的结果是什么,而是提出要求结果的范围,即"w 可能是实数吗". 其答案有两种,一种可能是,一种不可能是,倒底是哪一种结论,需要解题者对各种可能的情况进行判断,然后作出答案,或者从试验、比较的探索中获得结果. 例 2 也没有指明解题的方法. 显然,例 2 有两个要素是不知道的. 这两题的构成要素已知情况的差异,导致这两题解法上和功能上的差异. 例 1 只需遵循反证法证明的步骤,根据复数运算法则和复数相等条件进行运算和推理,就能解决问题. 例 1 的作用可帮助理解和巩固复数有关知识和运算法则,帮助掌握反证法的运用. 例 2 由于题目的结论不明确,解题的方法也不清楚,解题时需要有一个探索发现结论的过程,然后才能对结论作出判断. 在这个过程中,需要解题者开展"观察、比较、分析、综合、抽象、概括"的思维活动和"归纳、猜测、证明"的推理活动,这些活动把直觉思维和逻辑思维结合起来,有利于促进创新思维的形成. 例 2 具有较高层次的训练价值,可以成为推进以培养创新精神和实践能力为重点的素质教育的一种载体. 例 2 就是一种数学探索性问题.

那么,什么是数学探索性问题呢? 对一个事物、一个概念,有一个不断实践、不断加深认识的过程,尤其是给概念下定义更是如此,有些概念甚至经过几十年、几百年还会有不同的定义,但它又是客观存在的,有其存在的条件和所具有的特征与特点. 有的概念不下定义不行,不下定义不便于使用、实践与研究,下定义又很难,难在严密和概全,是一个两难的问题. 给数学探索性问题下定义就处于这种状况. 因此,只能从现有的认识出发,在现有实践和研究的基础上,抓住其特点,在有利于进一步实践和充分发挥探索性问题的功能的思想指导下,给出数学探索性问题一种描述性的界定.

一般来说,数学探索性问题是相对于数学封闭性问题而言的,因此从要素构成角度考虑,像例 2 那样有两个要素未知的数学问题可认为是数学探索性问题,当然在两个未知的要素中,至少一个应该是题目的结论或是题设条件. 但是,对要素的已知与未知的认定没有科学、明确的划分标准,尤其对解题依据和解题方法的已知和未知的认定常常会因题和因人而异,因此这种界定不易把握,需要经历体验和领悟的过程才能把握. 为使读者能体验这种界定,下面用列举的方法对一些数学探索性问题作简要的描述. 凡具有以下特征之一的都是数学探索性问题:

(A) 给出题设条件,但题目结论未指明,或者只给出结论范围要解题者自己作出判断和选择. 例如:

例 3 底面是正三角形,侧面是等腰三角形的棱锥一定是正棱锥吗? 若是,给出证明;若不是,画出一个这样的棱锥的示意图.

(B) 给出题目的结论,但没有给出或部分给出题目的条件,要求给出或补充使题目结论成立的条件.

例 4 试探求一元二次方程 $x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$ (a、b、c、$d\in\mathbf{R}$) 有两个实数根的充要条件.

(C) 给出一些特殊情况,要求归纳、猜测一般结论并给出证明.

例 5 观察下列等式: $1=1$, $1-4=-(1+2)$, $1-4+9=1+2+3$, $1-4+9-16=-(1+2+3+4)$, $\cdots$. 由此猜想一般的结论,并用数学归纳法加以证明.

(D) 先给出一个封闭性问题,然后改变题设条件探讨结论将会发生怎样的变化,或改变题目结论探讨其条件需发生怎样的变化.

例 6 已知抛物线 $y^2=4ax\,(a>0)$ 的焦点为 A,以 $B(a+4,\,0)$ 为圆心,以 $|AB|$ 为半径在 x 轴上方作半圆交抛物线于不同两点 M、N,P 为线段 MN 的中点.

(1) 求 $|AM|+|AN|$ 的值.

(2) 是否存在这样的实数 a,使 $|AM|+|AN|=2|AP|$.

例 7 若 $a_1>a_2>a_3>a_4>0$,且 a_1、a_2、a_3、a_4 成等差数列,试证明 $\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}>\sqrt{a_1}+\sqrt{a_4}$. 若 a_1、a_2、a_3、a_4 成等比数列,这个不等式还成立吗? 并说明理由.

(E) 题设条件和结论都是知道的,解题需要经历观察、试验、归纳、猜测、推断的探索过程.

例 8 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n,且 $S_n=\left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2(n\in \mathbf{N})$,若 $b_n=(-1)^nS_n$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

这里列举了五种具有不同特征的数学探索性问题,并不是数学探索性问题的全部. 但是从列举的一些探索性问题中可发现,数学探索性问题具有这样一个共同特点;构成数学问题的要素中至少有一个要素需要由解题者通过观察和比较、分析与综合、试验与归纳、猜测的探索过程来加以明确的. 据此特点我们还可以认识更多形式的数学探索性问题.

二 解数学探索性问题基本思路的探讨

由数学探索性问题的特点决定了它的求解缺乏现成的套路和方法,解题的思考方向有很大的不确定性,况且数学探索性问题内容广泛,形式多种多样,会给解题者带来一定困难. 但就高中数学中的探索性问题而言,对一些常见形式的探索性问题,在其解题思路上还是可进行归纳并找到一些规律的.

为了便于讨论和表述,我们将具有上节所列举特征的数学探索性问题,按它们经常出现的表述形式,列举出几种题型来介绍解题的基本思路.

1. 存在型

这类问题一般具有上节中列举的特征(A)或(B)或(D),通常讨论的是在给出的题设条件下,是否存在某个数学对象(可以是数值、性质、点、直线、曲线或其他图形等)或成立某个数学结论的数学问题.这类问题的具体提法常常是:某个数学事物或某种特性是否存在?若存在,求出这个事物或特性;若不存在,请说明理由.

事实上,“是否存在”包含着三种可能的情况:

一种情况是“存在”的情况.“存在”就是指具有适合某种条件或某种特性的对象.对于这种情况无论用什么方法只要找出一个存在的实例,就说明了存在性.

第二种情况是“不存在”的情况.“不存在”是指无论用什么方法都找不出一个适合某种条件或某种特性的对象.这样的情况一般需要推理论证.

第三种情况是可能“存在”,也可能“不存在”.这类情况通常是因题设中有不确定因素或含有在某一范围内变化的参数.当可变因素或参数变化在某些范围时得到存在的结论,当变化在另外一些范围时得到不存在的结论.这种情况需用分类讨论的方法来处理.

由于存在型问题存在与否的结论是未知的,有时还有多种情况存在,解题时往往难以直接用演绎推理的办法着手.对这类问题一般可采用这样的解题策略:先假设所探求的对象存在或结论成立,以此假设为前提条件进行运算或逻辑推理,若由此推出矛盾,则假定不成立,从而得到“否定”的结论,即不存在.其中推理得出矛盾的过程就是得出不存在结论的理由.若推理不出现矛盾,能求得在题设范围内的数值或图形 ,就得到肯定的结论,即得到存在的结果.事实上,这种解题策略是借用反证法的思路.

2. 归纳型

这类问题一般具有上节中列举的特征(A)或(C)或(E).通常讨论的是给出一些特殊情况的结论,要求推判出一般的或普遍性的结论的问题,或者是由题设条件列举出一些特殊的结论,要求由此归纳出一般情况结果的问题.这类问题大多是涉及到自然数的数学命题,如含自然数 n 的等式、不等式、整除性问题和有关的几何问题等.

解这类问题的基本策略是:通常从题设条件出发,通过观察、试验、分析、比较、归纳、猜想,探索出一般性的规律,然后对所归纳、猜想的结论进行证明.对一些较为复杂的问题,可将问题分类分步进行讨论,然后进行分析归纳成一般性的规律,从而得到问题的解答.解这类题的关键是正确的归纳和猜想.探索规律的方法,可以用试验的方法,甚至可采用多次试验来探索规律,也可根据问题的特点用直觉猜想规律.证明猜想规律的正确性的常用方法是:如果是关于含自然数 n 的命题,可采用数学归纳法,与自然数 n 无关的命题可采用演绎推理的方法.

3. 比较型

这类问题一般具有上节中列举的特征(A)或(D)或(E).通常讨论的是若干数学对象之间的关系或某些性质上的异同的问题.经常出现的形式是判断几个代数式或某些数值的大小,比较几个函数、几条曲线之间的异同,比较数列之间的差异性等.

这类问题涉及到数、式及性质等不同类的比较,因此求解时要视比较的对象采用相应的策略:

对比较数、式大小的一类问题可采用作差、作商、代数基本不等式、函数单调性等方法来处理.从逻辑方法角度考虑,可视具体问题的特点,选用综合法、分析法、反证法或数学归纳法等方法.

对比较几个数学对象(如函数、曲线、数列等)性质的问题,一

般先分析所比较数学对象性质的特征，然后用类比与联想方法来作出分析与比较．如对函数的比较，可采用形数结合、特殊化等方法，在通过研究性质的基础上作出比较、分析、对比来获得结论．如对曲线性质的比较，可采用几何特征和对应的方程比较与分析来获得结论．数列性质的比较，可采用化成等差数列或等比数列然后作出比较．

4. 讨论型

这类问题一般具有上节中列举的(A)或(C)或(D)或(E)的特征，通常是讨论题设中包含的多种可能的情形或题设中含有在某一范围内变化的参数，导致探索结果有多种可能的情形．有时这类题的题设中所包含的多种可能情况比较隐蔽，不易发现，这时这类问题常常以前三类问题中某一类型的形式出现．

解这类问题的基本策略是：首先要去发现题设包含的多种可能的情形，然后采用分类讨论的办法来处理．如果当这类问题是以上述三类题型中的某一类出现时，一般可先按所出现题型的解题策略设计解法，当解中遇到所用题设条件有多种情形或遇到可变参数时，就采用分类讨论方法，对各种情况分别求解．例如：

例 1 如图0.1，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$，问底面 BC 上是否存在一点 E，使 $PE \perp DE$？证明你的结论．

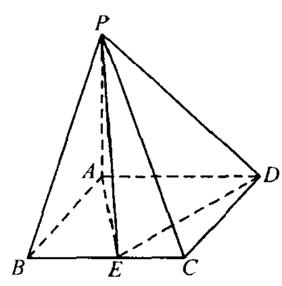


图 0.1

这例是以存在型形式出现的讨论型探索性数学问题．可先采用存在型问题的解题策略，设在 BC 上存在 E 点，使 $PE \perp DE$，则由三垂线定理可得出，$AE \perp DE$．这样 E 点既在 BC 上，又必在以 AD 为直径的圆周上，也就是在以 AD 为直径的圆与 BC 的交点上．那么是否存在交点呢？由于题设只给出 $ABCD$ 是矩形，AB 与 AD 的长度关系没有

指明,可以有多种情况.所以以 AD 为直径的圆是否与 BC 相交也不确定,这就影响到 E 点的存在性.为此要就 AD 与 AB 的长度关系作分类讨论.当 $AD \geqslant 2AB$ 时,以 AD 为直径的圆与 BC 有交点,所以 E 点存在;若 $AD < 2AB$,则以 AD 为直径的圆与 BC 没有交点,那么 E 点就不存在.

例 2 设 $z_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 是复数,且 $|z_k|=r(r>0)$.试比较 $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right|$ 与 $|z_1+z_2+\cdots+z_n|$ 的大小.

事实上,这例既是比较型探索题,又是讨论型探索题.尽管该题的题设条件比较简单,但其中 r 在 $r>0$ 的范围内的可有多种取值的情况而导致问题的结果也有多种情况,解题者往往忽视这一点,而把这题作为比较型探索题.因此,对题设条件中出现用字母表示的条件,都要考虑字母取值的多种可能情况,并观察和分析多种可能的取值情况是否会导致结果的变化,从而作出正确的解题对策.

像此例,如果一开始未能认识到它也是讨论型探索题,只认为是比较型探索题,那么在按比较型探索题解题策略求解时,在作差运算时就要充分注意所用题设条件是否会有多种可能的情况出现,即当运算得到 $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right|=\frac{1}{r^2}|z_1+z_2+\cdots+z_n|$ 时,就要注意到,在 $r>0$ 的范围内,r 的三种取值:$r\in(0, 1)$,$r=1$,$r\in(1, +\infty)$ 会使 $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right|$ 与 $|z_1+z_2+\cdots+z_n|$ 有不同的大小关系.因此,作差后,要按 r 的三种取值分别作出比较的结果.

从这两例可得到这样的启示,讨论型探索题往往又属其他类型的探索题.而讨论型探索题又往往在解题过程中,在应用题设条件进行推理时,才发现条件存在多种可能性,然后用分类讨论的方法得出最后结果.因此,在解数学探索性问题时,要充分注意题设条件是否存在多种可能的情况,尤其是在解题过程中应用题设条件时,更要注意条件是否存在多种可能情况,如存在多种可能情

况，必须进行分类讨论.

这里只列举四种常见的数学探索性问题的类型和解题策略，目的是想对读者阅读本书以后各章的例题和解练习题有所帮助.同时也希望读者仿此能总结阅读本书后获得感悟，积累解数学探索性问题的策略和大致方法.

三　高考中的数学探索性问题

从 20 世纪 80 年代初开始，高考数学试卷中就出现了探索性命题，只是当时没有给这种命题给出探索性命题的名称. 例如 1981 年全国高考数学试卷理工农医类第九题：

设定双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(1) 过点 $A(2, 1)$的直线与此双曲线交于 P_1、P_2 两点，求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程.

(2) 过点 $B(1, 1)$能否作直线 m，使 m 与此双曲线交于 Q_1、Q_2 两点，且使点 B 成为 Q_1Q_2 的中点？这样的直线 m 如果存在，求出它的方程；如果不存在，说明理由.

这题属存在型探索性命题. 在 80 年代的高考数学试卷中，曾多次出现探索性命题的题型，如 1985 年全国高考数学试卷理工农医类第八大题，1987 年广东省高考数学试卷理工农医类第二卷第五大题，1988 年全国高考数学试卷理工农医类第五大题，1988 年广东省高考数学试卷理工农医类第二卷第五大题，1989 年全国高考数学试卷理工农医类第 23 题，1989 年上海市高考数学试卷理工农医类第六题，1989 年广东省高考数学试卷理工农医类第二卷第五题等，这些命题主要是考查学生的分析问题和解决问题的能力，考查学生逻辑推理的能力. 进入 20 世纪 90 年代，随着科技的发展和社会的进步，我国改革开放力度的加大，加大了教育改革的力度. 在数学教育改革中，为全面落实培养学生逻辑思维能力的目