研究生教材

小波变换与分数傅里叶变换理论及应用

冉启文 著

XIAOBO BIANHUAN YU FENSHU FULIYE BIANHUAN LILUN JI YINGYONG

哈尔滨工业大学出版社

小波变换与分数傅里叶变换理论及应用

冉启文 著

哈尔滨工业大学出版社
哈 尔 滨

内 容 简 介

《小波变换与分数傅里叶变换理论及应用》重点介绍小波分析基本方法、基本思想、基本工具和它的几个典型的应用领域。内容包括小波分析与傅里叶分析的对比，积分小波变换，正交多尺度分析及正交小波，紧支正交小波，小波和小波包的分解及合成算法，时间-频率分析及相应算法等内容。考虑到分数傅里叶变换也是傅里叶变换的一种近几年才得到发展的改进形式，本书在最后三章介绍分数傅里叶变换的发展状况和基本理论，为了读者使用方便特意将分数傅里叶变换的离散算法用矩阵形式进行了详细讨论，期望在读者了解和使用分数傅里叶变换的时候发挥一点作用。

本书适合高等学校相关专业博士和硕士研究生作为教材使用，也可供数学、物理、信号处理、图像处理、数据分析、故障诊断、测量分析、计算机应用、经济管理和金融分析等领域的研究人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

小波变换与分数傅里叶变换理论及应用/冉启文著.-哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2001.3

ISBN 7-5603-1603-4

Ⅰ.小… Ⅱ.冉… Ⅲ.①小波分析-高等学校-教材②傅里叶变换-高等学校-教材 Ⅳ.0174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 02220 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真 0451—6414749
印　　刷 黑龙江省教委印刷厂
开　　本 850×1168　1/32　印张 9.75　字数 279 千字
版　　次 2001 年 3 月第 1 版　2001 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-1603-4/O·117
印　　数 1~3000
定　　价 14.60 元

前　言

小波分析是一种新的分析方法。它是继傅里叶分析以后纯粹数学与应用数学殊途同归的又一范例，素有“数学显微镜”的美称，是纯粹数学家和研究数据处理、量子场论、声学、计算机科学、视觉科学等领域的应用数学家、工程师各自独立发现的，并由于他们的共同努力而得以迅速发展，现已经引起了整个科学研究和工程技术应用研究领域专家和学者的极大关注。分数傅里叶变换是傅里叶变换的另一种推广，在光学领域得到了比较深入的研究，在其他领域的理论研究和应用研究都刚刚起步。

近几年来，小波分析在国内的影响日渐扩大，正吸引着许多学科的科研工作者走向学习、研究和使用小波分析方法的道路。鉴于此，本书力图用通俗易懂的语言来介绍和研究小波分析的基本理论和方法，以便使非数学专业的学生能很好地接受它。由于小波分析是一种新兴的方法，它既有精深的数学理论，又有着十分广泛的应用背景，而且，在它从提出到发展成基本完善的方法的过程中，又受惠于数学、物理、计算机科学、石油勘探、图像处理、信号处理等领域的科学家们的共同努力，因而，它的题材异常广泛，内容相当丰富。《小波变换与分数傅里叶变换理论及应用》侧重介绍小波变换的基本方法、基本思想、基本工具和它的几个典型的应用领域。本书在最后三章介绍分数傅立叶变换的发展状况和基本理论，为了读者使用方便特意将分数傅立叶变换的离散算法用矩阵形式进行了详细讨论，期望在读者了解和使用分数傅立叶变换的时候发挥一点作用。

《小波变换与分数傅里叶变换理论及应用》的出版得到哈尔滨工业大学研究生院的经费资助，同时，在本书出版过程中得到了哈尔滨工业大学出版社的支持，在此一并表示衷心的感谢。

本书适合高等学校相关专业博士和硕士研究生作为教材使用，也可供数学、物理、信号处理、图像处理、数据分析、故障诊断、测量分析、计算机应用、经济管理和金融分析等领域的研究人员参考。

冉启文

2001．2．于哈尔滨工业大学

目　录

第0章 绪 论

0.1 小波变换简要回顾

小波变换是一种新的变换分析方法，它的主要特点是通过变换能够充分突出问题某些方面的特征，因此，小波变换在许多领域都得到了成功的应用，特别是小波变换的离散数字算法已被广泛用于许多问题的变换研究中。

从小波变换的数学理论来说，它是继傅里叶变换之后纯粹数学和应用数学完美结合的又一光辉典范，享有“数学显微镜”的美称[1~2]。从纯粹数学的角度来说，小波变换是调和分析（包括函数空间、广义函数、傅里叶分析和抽象调和分析等）这一重要学科大半个世纪以来的工作结晶[3]；从应用科学和技术科学的角度来说，小波变换又是计算机应用、信号处理、图像分析、非线性科学和工程技术近几年来在方法上的重大突破[4~7]。实际上，由于小波变换在它的产生、发展、完善和应用的整个过程中都广泛受惠于计算机科学、信号和图像处理科学、应用数学和纯粹数学、物理科学和地球科学等众多科学研究领域和工程技术应用领域的专家、学者和工程师的共同努力，所以，现在它已经成为科学研究和工程技术应用中涉及面极其广泛的一个热门话题[8]。

从小波变换的发展过程来说，大致可分成三个阶段。

（1）孤立应用时期。主要特征是一些特殊构造的小波在某些专业领域的零散应用。这个时期最典型的代表性工作是法国地质学家 J.Morlet 和 A.Grossmann 第一次把“小波”用于分析处理地质数据，引进了以他们的名字命名的时间-尺度小波，即 Grossmann-Morlet 小波[9~10]。这个时期的另一个代表性工作是 1981 年 J.Strömberg 对 A.Harr 在 1910 年所给出的 Haar 系标准正交小波产生的正交基的改进[11]。同时，著名的计算机视觉专家 D.Marr 在他的“零交叉”理论中使用的可按“尺度大小”变化的滤波算子，现在称为“墨西哥帽”的小波也是这个时期有名的工作之一[12]，这部分工作与后来成为 S.Mallat 的小波分析构造理论支柱的“多尺度分析”或“多分辨分析”有密切联系。这个时期

一个有趣的现象是各个领域的专家、学者和工程师在完全不了解别人的研究工作的状态下巧妙地、独立地构造自己需要的“小波”。虽然如此，但通观全局可以发现，这些专家、学者和工程师所从事研究的领域广泛分布于科学和技术研究的许多方面，因此，这个现象从另一个侧面预示小波分析热潮的到来，说明了小波理论产生的必然性。

（2）国际性研究热潮和统一构造时期。真正的小波热潮开始于 1986 年，当时法国数学家 Y.Meyer 成功地构造出了具有一定衰减性质的光滑函数ψ，这个函数（算子）的二进尺度伸缩和二进整倍数平移产生的函数系构成著名的函数空间 $L^2(R)$的标准正交基[13]。这项成果标志“小波分析”新时期的到来。在此之前，学术界普遍认为不会存在性质如此之好的函数。实际上，不仅数学家这样，其他领域的学者也有此倾向，比如前述提到的那些科学家或者放弃进一步的研究或者放弃对小波性质的特殊要求，比如 I.Daubechies、A.Grossmann、Y.Meyer 在此之前就是研究函数ψ和常数 a 与 b，使函数系

$$\left\{a^{-\frac{j}{2}}\psi\left(a^{-j}x-kb\right);\ (j,k)\in Z\right\}$$

构成函数空间 $L^2(R)$的框架[14]。进入这个时期之后，P.Lemarie[15]和 G.Battle[16]又分别独立地构造得到了这样“好的”小波。之后 Y.Meyer 和计算机科学家 S.Mallat 提出多分辨分析概念[17~18]，成功地统一了此前 J.Strömberg、Y.Meyer、P.Lemarie 和 G.Battle 的各别的小波构造方法。同时，S.Mallat 还简洁地得到了离散小波的数值算法即 Mallat 分解和合成算法，并且将此算法用于数字图像的分解与重构[19~20]。几乎同时，比利时数学家 I.Daubechies 基于多项式方式构造出具有有限支集的正交小波基[21]，C.K.Chui 和中国籍学者王建忠基于样条函数构造出单正交小波函数，并讨论了具有最好局部化性质的尺度函数和小波函数的一般构造方法[22~24]。这个时期的结束标志之一是国际性综合杂志《IEEE Transaction on Information Theory（信息论）》在 1992 年 3 月份的“小波分析及其应用”的专刊上，比较全面地介绍了在此之前小波分析理论和应用在各个学科领域的发展。

（3）全面应用时期。从 1992 年开始，小波分析方法进入全

面应用阶段。在前一段研究工作基础上，特别是数字信号和数字图像的 Mallat 分解和重构算法的确定，使小波分析的应用迅速波及科学研究和工程技术应用研究的许多领域。编辑部设在美国 Texas A&M 大学的国际杂志《Applied and Computation Harmonic Analysis》从 1993 年创刊之日起就把小波分析的理论和应用研究作为其主要内容，编辑部的三位主编 C.K.Chui、R.Coifman 与 I.Daubechies 都在小波分析的研究和应用中有独到的贡献。时至今日，小波分析的应用范围还在不断扩大，许多科技期刊都刊载与小波分析相关的文章，各个学科领域的地区性和国际性学术会议都有涉及小波分析的各种类型的论文、报告，同时，在国际互联网 INTERNET 和其他有较大影响的网络上，与小波有关的书籍、论文、报告、软件随时随地都可以找到并可以免费下载，甚至颇有国际影响的软件公司像 MathWorks 在它的"科学研究和工程应用"软件 MATLAB 中，特意把小波分析作为其"ToolBox"的单独一个工具箱。这样的局面使得任何人都不可能完全了解小波分析全面的研究和应用情况，而只能择其中相关的内容进行跟踪、消化和展开深入研究。

随着小波变换理论研究的不断深入和实际应用的日益广泛，小波分析的各种优势也在不断明确，但同时，一些常用的小波包括其相应的算法在某些特殊应用上的局限性也渐渐为人们所认识[25~26]。比如在小波变换用于信号分离时经常出现的频率混叠现象给信号分析带来麻烦，本书后面的分析将说明这种现象产生的根源在于常用小波之离散小波变换特殊的时-频分析性质，即"频域分割不到位"。

关于小波变换，本书选择与计算机应用技术密切相关的涉及数字信号处理、数字图像处理及压缩、图像纹理分析、数值计算等多个方面的离散小波数值计算之理论和算法展开论述，包括为了缓解小波变换"频域分割不到位"造成的频率混叠现象和特殊应用需要的小波构造方法，离散正交小波的算法分析以及小波算法与分数傅里叶变换理论及算法的全面比较等基本内容。

0.2 傅里叶变换和分数傅里叶变换

傅里叶变换是一个十分重要的工具，无论是在一般的科学研

究中，还是在工程技术的应用研究中，它都发挥着基本工具的作用。从历史发展的角度来看，自从法国科学家 J.Fourier 在 1807 年为了得到热传导方程简便解法而首次提出著名的傅里叶分析技术以来，傅里叶变换首先在电气工程领域得到了成功应用，之后，傅里叶变换迅速得到了越来越广泛的应用，而且，理论上也得到了深入研究，特别是进入 20 世纪 40 年代之后，由于计算机技术的产生和迅速发展，以离散傅里叶变换形式出现的 FFT 以频域分析、谱分析和频谱分析的形式在极短的时间内迅速渗透到现代科学技术的几乎所有领域，无人不知无人不晓！时至今日，甚至于发展到：在理论研究和应用技术研究中，分别把傅里叶变换和 FFT 当作最基本的有效的经典工具来使用和看待。正是这些深入的研究和广泛的应用，逐渐暴露了傅里叶变换在研究某些问题时的局限性以及 FFT 在处理一些特殊数据时的局限性。因为各种科学问题研究的特殊需要，对傅里叶变换的改进也选择了完全不同的方向。

D.Gabor 在 1946 年给出的现在以他的名字命名的 Gabor 变换代表了改进傅里叶变换的一个方向，即信号加窗或基函数加窗，有时也称为窗口傅里叶变换[27]。这是一种信号局部分析的新思想，这个方向的深入研究最终导致小波分析的出现。

V.Namias 在 1980 年首先进行研究的分数傅里叶变换（Fractional Fourier Transformation 即 FRFT）是改进傅里叶变换的另一个方向[28]。当时他的问题是要求出在量子力学研究中出现的一个特殊偏微分方程的解析解。抽象地说，他是把分数傅里叶变换作为傅里叶变换算子的非整数次幂运算结果来引进的。基本的想法是把经典傅里叶变换的特征值作为一般的复数进行幂次运算，将所得结果作为一个新变换的特征值并利用傅里叶变换的特征函数二者合一，从而构造得到与前述幂次相同的分数傅里叶变换。因此，V. Namias 研究的分数傅里叶变换是经典傅里叶变换在分数级次上的推广，它同 Gabor 变换和小波变换一样，都是把研究对象变换成维数更高的新对象来进行处理。所以从一般的科学研究方法来看，小波变换和分数傅里叶变换都是升维方法。

1987 年，A. C. Mcbride 和 F. H. Kerr 用积分形式从数学上严格定义了分数傅里叶变换[29]。1993 年，光学专家 A.W.Lohmann 利用傅里叶变换相当于在 Wigner 分布函数相空间中角度为 $\pi/2$

的旋转这一性质，阐释了分数傅里叶变换的物理意义，即幂次α的分数傅里叶变换相当于 Wigner 分布函数相空间中角度是$\alpha\pi/2$的旋转，这里α是分数傅里叶变换的幂次[30]。从此，因为 A.W.Lohmann 的杰出工作使分数傅里叶变换的研究首先在光学领域得到了应用，特别是在傅里叶光学及相关领域的研究中吸引了各国学者的注意。在 1993 年底，D.Mendlovic 和 H.M.Ozaktas 首次利用负二次型渐折射率介质（GRIN）来实现光学分数傅里叶变换[31~33]，他们的工作还包括利用分数傅里叶变换进行分数傅里叶变换域滤波以及分数傅里叶变换的计算机仿真方法和计算结果。到 1994 年初，D.Mendlovic、H.M.Ozaktas 和 A.W.Lohmann 三人联合研究了分数傅里叶变换和自傅里叶变换函数的关系，明确了自傅里叶变换函数的分数傅里叶变换仍是自傅里叶变换函数的事实，并给出了自分数傅里叶变换函数的定义[34]。在随后的文章中他们又给出了自分数傅里叶变换的几种可能应用[35]。3 月，T.A.lieva 等人将光线传播和分数傅里叶变换联系起来，指出可利用分数傅里叶变换来研究光线传播问题[36]。1994 年 6 月，A.W.Lohmann 研究了分数傅里叶变换和 Radon-Wigner 函数的关系，并证明了用 GRIN 介质实现的光学分数傅里叶变换和 Wigner 分布函数相空间旋转定义的光学分数傅里叶变换是完全等价的，同时提出可利用透镜和自由空间组合来实现光学分数傅里叶变换，并且给出了两个简单的结构[37~38]。分数傅里叶变换在光学研究中的实现给光学信息处理带来了新的活力。另外，针对分数傅里叶变换的积分定义，Y.B.Karasik 研究了分数傅里叶变换积分核的一些基本性质[39]。

1994 年 8 月，在苏格兰爱丁堡（Edinburgh）举行的光计算国际会议上，H.M.Ozaktas 等人提出了可利用分数傅里叶变换进行分数傅里叶域的空间变化性滤波[40]。L.M.Brnardo 等人提出利用分数傅里叶变换制作光学相关器的构想[41]。Soo-Young.Lee 等人将分数傅里叶变换同自适应神经网络模型进行类比，得到一种基于分数傅里叶变换的自适应神经网络模型结构[42~43]。这些可能的应用使人们对分数傅里叶变换有了更新的认识。同时，G.S.Agarwal 和 R.Sinon 把分数傅里叶变换同谐振子的格林函数联系起来，并推出了分数傅里叶变换同菲涅尔变换的关系[44]。9 月，P.P.Finet 利用代数法讨论了分数傅里叶变换同菲涅尔衍射的

关系，给出了一种基于菲涅尔衍射的分数傅里叶变换结构[45~46]。L.M.Brnardo 和 O.D.D.Soares 研究了分数傅里叶变换结构与成像的关系[47~48]。11 月，Rainer G.Dorsch 等人给出了利用分数傅里叶变换进行“Chirp”滤波的数值模拟结果和实验结论[49]。H.M.Ozaktas 指出，分数傅里叶变换可用来研究光学传播及球面谐振腔成像问题[50]。A.W.Lohmann 将光学分数傅里叶变换应用于时间信号的变换与分析之中，提出可利用光电调制器和光纤来构造基于分数傅里叶变换的光学信息处理系统[51]。同时，L.B.Alnoida 研究了时间-频率表象同分数傅里叶变换的关系，指出一个信号的分数傅里叶变换可以表示为一系列“Chirp”信号的叠加[52]。S.Abe 等人则从数学上研究了分数傅里叶变换在相空间的旋转特性，指出可以利用分数傅里叶变换进行波前的分析和校正[53]。

1995 年，D.Mendlovic、H.M.Ozaktas 和 A.W.Lohmann 三人利用分数傅里叶变换的概念，提出了分数相关的定义，并给出了可能的实现结构和相应的数值模拟结果[54]。A.W.Lohmann 采用调焦透镜组合结构实现分数傅里叶变换和 Y.Bitran 等人提出的利用非对称结构实现分数傅里叶变换的构想，使分数傅里叶变换的实验实现更为方便[55]。刘树田和张岩等人研究了光学分数傅里叶变换级联的尺度问题，给出可实现光学分数傅里叶变换的推广结构[56~58]。4 月，H.M.Ozaktas 和 D.Mendlovic 总结了光学分数傅里叶变换的发展过程，研究了菲涅尔衍射和光学分数傅里叶变换的关系[59]。与此同时，S.Abc 等人也提出了菲涅尔衍射和光学分数傅里叶变换的关系[60]。5 月，D.F.Mcalister 等人运用相空间背投影（分数傅里叶变换的相空间旋转）得到光场的 Wigner 函数分布，并利用其研究光场的相干强度[61]。R.G.Dorsch 提出了利用分数傅里叶变换指导透镜设计的构想[62]。C.C.Shih 利用矩阵光学分解的方法得到了复数级傅里叶变换的实现结果[63]，并于当年 8 月提出了一种新的分数傅里叶变换的定义形式，即态函数叠加的方法[64]。D.Mendlovic 和 A.W.Lohmann 等人报道了利用透镜组合分数傅里叶变换结构和计算全息方法实现分数相关的实验结果，指出分数相关可解决平移变化的模式识别问题[65]。9 月，S.Granier 将光学分数傅里叶变换研究同自成像现象联系起来，指出可利用它来定义光学分数傅里叶变换[66]。10 月，O.Aytur 和 Ozaktas 研

究了量子光学相空间非正交区域变换和分数傅里叶变换的关系，并且给出了相空间各种变换的具体形式[67]。A.Sahin 则提出在两个正交轴上分别实现不同级次的分数傅里叶变换以增加信息通道的构想[68]。11 月，D.Mendlovic 等人给出了基于分数傅里叶变换的新表象——线性空间表象，在另一篇文章中，他们报道了两正交轴实现不同级次分数傅里叶变换的实验结果[69~70]。基于分数傅里叶变换的思想，J.Shamir 和 N.Cohon 提出在光学中实现开方和乘幂运算的设想，并指出这些操作可用于光学设计、光学信息处理和光计算机的研究等领域[71]。12 月，蒋志平利用分数傅里叶变换的尺度性质提出单一结构实现不同级次分数傅里叶变换的构想，并给出了结构参数[72]。

1996 年 2 月，A.W.Lohmann 利用分数傅里叶变换的思想，将光学希尔伯特变换分数化，并给出了相应的模拟结果和基于分数傅里叶变换结构的实现结构[73]。

1995 年 8 月，C. C. Shih 提出了一种新的分数傅里叶变换的定义形式——态函数叠加的方法[64]，利用经典傅里叶变换整数幂运算的四周期性质将新的分数傅里叶变换定义成四个态函数的线性组合，其组合系数是分数傅里叶变换幂次的函数。从此，一些新的问题产生了，比如各种分数傅里叶变换定义之间的关系是什么；分数傅里叶变换的多样性；分数傅里叶变换的数学描述；分数傅里叶变换与傅里叶变换的关系；考虑到实际应用和数值计算的需要，还有一些问题比如分数傅里叶变换的离散采样算法；离散分数傅里叶变换如何定义；离散分数傅里叶变换能否利用离散傅里叶变换的快速算法比如 FFT 实现快速数值计算等。

0.3 小波变换与分数傅里叶变换的相似性

小波变换和分数傅里叶变换都是从经典傅里叶变换发展起来的，它们是从不同的角度改进了傅里叶变换。另外，从数字信号处理、数字图像处理的时-频分析和空-频分析的角度来看，小波变换和分数傅里叶变换都是一种特定的时-频分析或空-频分析方法。

0.3.1 小波变换与傅里叶变换

实际上，经典傅里叶变换是定义在函数空间或信号空间 $L^2(R)$上的连续线性算子。具体地说，对于空间 $L^2(R)$中的任何信号或函数 $f(t)$，它的傅里叶变换定义为

$$F(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-\mathrm{i}vt)\,\mathrm{d}t \qquad (0.3.1)$$

有时也称傅里叶变换 $F(v)$为 $f(t)$的谱。从傅里叶变换发展到小波变换的中间阶段是 D.Gabor 变换或称为窗口傅里叶变换，其 Gabor 变换定义的基本形式是

$$G_f(b,v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_a(t-b)\exp(-\mathrm{i}vt)\mathrm{d}t$$

其中 $g_a(t)=\exp\left(-t^2/4a\right)/2\sqrt{a\pi}$ 是 Gaussian（高斯）函数（ $a>0$ 是常数），称为“窗口函数”。对任何 $a>0$，Gabor 变换可以理解为 $f(t)$“在时间点 $t=b$ 处，频率为 v 的频率成分”，就是说，在时间点 $t=b$ 处附近一定窗口范围内用傅里叶变换（谱）进行分析处理。体现了窗口傅里叶变换的时-频分析特点。小波变换也是定义在函数空间或信号空间 $L^2(R)$上，但小波变换的变换因子不再是窗口傅里叶变换的积分因子 $g_a(t-b)\exp(-\mathrm{i}vt)$，而是如下的连续小波函数

$$\psi_{(a,b)}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

如果

$$C_\psi=\int_{R^*}\frac{|\Psi(v)|^2}{|v|}\mathrm{d}v<+\infty \qquad (0.3.2)$$

其中 $\Psi(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\exp(-\mathrm{i}vt)\mathrm{d}t$ 是 $\psi(t)$ 的傅里叶变换，则称 $\psi(t)$ 为允许小波或小波母函数。小波变换的定义是

$$W_f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_R f(t)\overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t \qquad (0.3.3)$$

由此看出，任意信号或函数 $f(t)$的小波变换 W_f（a，b）是一个二元形式的信号，这是和傅里叶变换很不相同的地方。如果小波函

数$\psi(t)$的傅里叶变换$\Psi(v)$在原点 v=0 是连续的，那么$\Psi(0)=0$，即$\psi(t)$的积分等于 0。这说明函数有“波动”的特点。因为$\psi(t)$是L^2（R）的，它只在原点附近才会存在明显的起伏，在远离原点的地方函数值将迅速“衰减”为零，这是称它为“小波”的基本原因。同样，$\psi_{(a,b)}(t)$将在 $x=b$ 的附近才存在明显不为 0 的数值，而这个“附近”范围的大小正比于参数 a。因此，虽然形式上小波变换和窗口傅里叶变换完全不同，但从“在指定时间（空间）点附近，研究信号的波动变化情况”这个意义来看，它们实际上是极其相似的，体现的都是同时考虑时间（空间）和频率的研究思想。一般称之为时（空）-频分析方法。

0.3.2 分数傅里叶变换（A）

现在回顾一下分数傅里叶变换的定义。为了本书后续部分使用的方便，此处将 V.Namias 在 1980 年所给的定义重新整理并按严格的形式复述。

相应于非负整数 m=0,1,2,…，将傅里叶变换对应的特征值写成

$$\lambda_m = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\, m\pi}{2}\right) \tag{0.3.4}$$

同时，相应的标准化特征函数可以写成

$$\phi_m(t)=\frac{1}{\sqrt{2^m m!\sqrt{\pi}}} H_m(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \tag{0.3.5}$$

也就是说，$\phi_m(t)$的傅里叶变换恰好等于它自己与复数λ_m的乘积，标准化的含义是$\phi_m(t)$的 L^2-范数等于 1。在上述公式中出现的记号 $H_m(t)$表示第 m 个 Hermite（埃尔米特）多项式，它随着 m 的递推关系是

$$\begin{cases} H_0(t)=1, \qquad H_1(t)=2t \\ H_{m+1}(t)=2tH_m(t)-2mH_{m-1}(t) \end{cases}, \qquad m=1,2,3,\ldots \tag{0.3.6}$$

利用这些记号，V. Namias 的分数傅里叶变换$(F^\alpha f)(t)$可以表示成傅里叶变换标准化特征函数$\phi_m(t)$的无穷级数和的形式

$$\left(F^{\alpha} f\right)(t)=\sum_{m} h_{m}\, \lambda_{m}(a)\, \phi_{m}(t) \tag{0.3.7}$$

其中，$\lambda_{m}(a)=\exp(-mia\pi/2)$，$m=0,1,2,\ldots$，是傅里叶变换的特征值，组合系数 $h_{m}=\int_{R} f(t)\bar{\phi}_{m}(t)\,\mathrm{d}t$ 是原始信号在傅里叶变换的各个规范化特征函数上的正交投影。因此，分数傅里叶变换和傅里叶变换具有完全相同的特征函数，而它们的特征值之间是幂次关系，所以，分数傅里叶变换是完全不同于傅里叶变换的一种新的变换类，只有幂次取一些特殊数值比如 5、9 时，分数傅里叶变换才返回到经典的傅里叶变换。这就是 V. Namias 的分数傅里叶变换的定义[28]。

A. C. Mcbride 和 F. H. Kerr 在 1987 年给出了 V. Namias 的分数傅里叶变换的积分形式。具体地说，对信号空间 $L^{2}(R)$ 中的任何信号 $f(t)$，它的分数傅里叶变换 $\left(F^{a} f\right)(t)$ 可以写成积分形式

$$\left(F^{a} f\right)(v)=\int_{R} f(t) k(a ; v, t) \mathrm{d} t \tag{0.3.8}$$

其积分核是

$$k(a;v,t)=\begin{cases} c(a)\exp\left[\mathrm{i}\left(v^{2}\cot\phi_{a}-2vt\csc(\phi_{a})+t^{2}\cot(\phi_{a})\right)\right] & a\neq 2n \\ \delta\left(v-(-1)^{n} t\right) & a=2n \end{cases}$$

公式中各记号的含义是

$$c(a)=\sqrt{\frac{1-\mathrm{i}\cot(\phi_{a})}{2\pi}}, \quad \phi_{a}=\frac{a\pi}{2}$$

其中，n 是整数，a 是分数傅里叶变换的幂次，可取任何实数[29]。

A.W.Lohmann 在 1993 年利用傅里叶变换相当于在 Wigner 分布函数相空间中角度为 $\pi/2$ 的旋转这一性质，说明分数傅里叶变换在 Wigner 分布函数之相空间中相当于角度是 $\alpha\pi/2$ 的旋转，这里，α 是分数傅里叶变换的幂次。具体地说，根据 Wigner 分布函数的定义

$$W_{f}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}=\int_{R} f\left(x+\frac{t}{2}\right)\bar{f}\left(x-\frac{t}{2}\right)\exp(-2\pi\, tv\mathrm{i})\,\mathrm{d}t$$

可以直接验证

$$W_{\hat{f}}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}=W_{f}\begin{pmatrix} -v \\ x \end{pmatrix}=W_{f}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}\right)$$