

数理化学丛书

代

数

第

二

册

22

7

1

文

学

出

版

社

数 理 化 自 学 丛 书

代 数

第 二 册

51.22

667

2:1

数理化自学丛书

代

数

第 二 册

数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编

310526/07

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

代 数 (第二册)

数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

北 京 出 版 社 重 印

北京市新华书店发行

北京印刷二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 13.875 字数 306,000

1964年2月第1版 1979年1月第1次印刷

书号: 13119·561 定价: 0.91 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书代数的第二册,内容包括一元一次方程,一元一次不等式,一次方程组,方根,实数,根式,有理数指数幂,一元二次方程,二元二次方程组等九章,书中对重点、难点以及关键性的内容力求反复详细说明,并有大量例题和习题,以适应自学的需要。书中带有*号的题目较难些,初次练习时可以暂时不做。

本书供学完代数第一册的青年工人、在职干部及知识青年自学之用,也可供中等学校青年教师参考。

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的。计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册。这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用。这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎。但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版。

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”。我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗。许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》。根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要。

十多年来，科学技术的发展是很快的。本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的。同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐。这些，要请读者在阅读时加以注意。

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考。

一九七八年一月

34109

目 录

重印说明

第一章 一元一次方程和可

以化为一元一次方

程的分式方程1

§1.1 等式1

§1.2 方程3

§1.3 同解方程6

§1.4 方程的两个基本性质... 8

§1.5 一元一次方程的解法...16

§1.6 列出方程来解应用题...30

§1.7 分式方程.....51

§1.8 列出分式方程来解应

用题.....59

本章提要.....64

复习题一.....65

第二章 一元一次不等式69

§2.1 不等式.....69

§2.2 不等式的性质.....72

§2.3 一元一次不等式和它

的解法.....77

本章提要.....86

复习题二.....86

第三章 一次方程组89

§3.1 二元一次方程的意义...89

§3.2 二元一次方程组的意

义.....92

§3.3 用代入消元法解二元

一次方程组.....94

§3.4 用加减消元法解二元

一次方程组.....98

§3.5 含有字母系数的二元

一次方程组的解法 ...104

*§3.6 二元一次方程组的解

的三种情况107

§3.7 三元一次方程和三元

一次方程组的意义 ...110

§3.8 用代入消元法解三元

一次方程组111

§3.9 用加减消元法解三元

一次方程组113

§3.10 可以化为二元一次方

程组或者三元一次方

程组来解的分式方程

组117

§3.11 列出方程组解应用

题124

本章提要133

复习题三134

第四章 方根137

§4.1 方根的意义137

§4.2 方根的性质139

§4.3 方根的记法141

§4.4 算术根143

§4.5 完全平方数的开平

方148

§4.6 开平方的一般方法 ...150

§ 4.7 近似平方根	158
§ 4.8 平方根表和它的用法	161
§ 4.9 立方根表和它的用法	167
本章提要	169
复习题四	170
第五章 实数	173
§ 5.1 无理数	173
§ 5.2 实数	178
§ 5.3 近似数概念	183
§ 5.4 近似数的加法和减法	191
§ 5.5 近似数的乘法和除法	194
§ 5.6 近似数的乘方和开方	197
§ 5.7 近似数的混合运算	199
§ 5.8 几个常用的求近似值的公式	206
本章提要	210
复习题五	211
第六章 根式	213
§ 6.1 根式的意义	213
§ 6.2 根式的基本性质	216
§ 6.3 同次根式	219
§ 6.4 乘积的算术根	220
§ 6.5 分式的算术根	223
§ 6.6 根号里面和外面的因式的移动	225
§ 6.7 化去根号里的分母	228
§ 6.8 最简根式	231
§ 6.9 同类根式	235
§ 6.10 根式的加减法	237
§ 6.11 根式的乘法	240

§ 6.12 根式的乘方	245
§ 6.13 根式的除法	248
§ 6.14 把分母有理化	250
§ 6.15 根式的开方	256
§ 6.16 $a \pm 2\sqrt{b}$ 的算术平方根	257
本章提要	261
复习题六	263
第七章 有理数指数幂	266
§ 7.1 正整数指数幂	266
§ 7.2 零指数幂	268
§ 7.3 负整数指数幂	269
§ 7.4 分数指数幂	274
本章提要	283
复习题七	284
第八章 一元二次方程和可以化成一元二次方程来解的方程	286
§ 8.1 一元二次方程	286
§ 8.2 不完全一元二次方程的解法	288
§ 8.3 完全一元二次方程的解法 (一)——因式分解法	295
§ 8.4 完全一元二次方程的解法 (二)——配方法	299
§ 8.5 完全一元二次方程的解法 (三)——公式法	302
§ 8.6 一元二次方程的根的判别式	306
§ 8.7 列出方程解应用题	311
§ 8.8 一元二次方程的根与系数的关系 (韦达定	

理).....	316
§ 8.9 韦达定理的应用	320
§ 8.10 二次三项式的因式分解	327
§ 8.11 利用十字相乘法分解二次三项式的因式	332
§ 8.12 二元二次多项式的因式分解	337
§ 8.13 双二次方程	339
§ 8.14 可以化成一元二次方程来解的其他特殊的整式方程	342
§ 8.15 分式方程	346
§ 8.16 无理方程	351
本章提要	361
复习题八	362
第九章 二元二次方程组 ...	365
§ 9.1 二元二次方程组	365
§ 9.2 由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组的解法	367
§ 9.3 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(一)——可以消去	

二次项的	376
§ 9.4 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(二)——可以消去一个未知数的	380
§ 9.5 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(三)——一个(或者两个)方程可以分解成两个一次方程的	383
§ 9.6 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(四)——两个方程都没有一次项的	386
§ 9.7 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(五)——可以用除法降低方程的次数	388
本章提要	391
复习题九	391
总复习题	394
习题答案	402

第一章 一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程

§1.1 等 式

在代数第一册里,我们已经学过代数式。我们知道,用运算符号把由数字或者字母表示的数连结起来所得的式子,叫做代数式。例如, $3a$, $-\frac{1}{2}x^2y$, $5x+7$, $\frac{5}{x-2}$, $(x+y)^2$ 等。我们还知道,单独的一个用数字或者字母表示的数,例如, x , a , 3 , 5.4 等,也可以看做是代数式。

用等号连结两个代数式所成的式子,叫做等式。例如,

$$\begin{aligned} m+2m &= 3m; & \frac{4x^2}{2x} &= 2x; \\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2; & a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2); \\ x-5 &= 8; & x^2 &= 9 \end{aligned}$$

等都是等式。

在等式里,等号左边的代数式,叫做左边;等号右边的代数式,叫做右边。例如,在等式 $m+2m=3m$ 里,左边是 $m+2m$, 右边是 $3m$ 。

我们来看上面的几个等式。在等式 $m+2m=3m$ 里,不论 m 等于任何数值,左边和右边的值总是相等的。

等式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是代数第一册里已经学过的乘法公式,它是多项式乘法的结果,不论 a 和 b 等于任何数

值,左边和右边的值总是相等的.例如,当 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$ 时,左边等于 $\frac{1}{4}$,右边也等于 $\frac{1}{4}$.

等式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 是因式分解中常用的一个立方和公式,不论 a 和 b 等于任何数值,左边和右边的值也总是相等的.

等式 $\frac{4x^2}{2x}=2x$,这是根据分式的基本性质,从约分所得的结果.当 $x=0$ 时,分母 $2x$ 等于0,分式没有意义,所以 x 的数值不允许等于0.但是除了 $x=0$ 时分式没有意义以外,不论 x 等于其他任何数值,左边的值总是等于右边的值.

这就是说,在上面的四个等式里,不论用任何允许取的数值代替其中的字母,等式总是成立的.

一个等式,不论用任何允许取的数值代替其中的字母,它的左右两边的值总是相等的,这样的等式叫做恒等式.例如,上面所讲的四个等式都是恒等式.

由数字组成的等式,也都是恒等式.例如,下面这些等式,都是恒等式:

$$\begin{aligned}-(7-2) &= -7+2; & (-2)^3 &= -8; \\ 3^2+4^2 &= 5^2; & (7+3\times 2-3)\div 2 &= 4+1.\end{aligned}$$

我们再来看等式 $x-5=8$ 和 $x^2=9$.在等式 $x-5=8$ 里, x 并不是可以取任何数值都能使左右两边的值相等.例如,当 $x=1$ 时,左边等于 -4 ,而右边等于 8 ,两边的值就不相等.所以 $x-5=8$ 虽然是等式,但不是恒等式.

同样,在等式 $x^2=9$ 里, x 也不是可以取任何数值都能使等式成立.例如,当 $x=-5$ 时,左边等于 25 ,而右边等于 9 ,两边的值就不相等,所以 $x^2=9$ 也不是恒等式.

例 判别下列等式是不是恒等式:

(1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

(2) $2x+5=3x-1$.

【解】 (1) 因为不论 a 和 b 等于任何数值, 左右两边的值总相等. 所以 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 是恒等式.

(2) 因为 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等, 例如, 当 $x=5$ 时, 左边等于 15, 而右边等于 14, 两边的值就不相等. 所以 $2x+5=3x-1$ 不是恒等式.

习 题 1.1

1. 等式和代数式有什么区别? 举两个例子来说明.

2. 什么叫做恒等式? 举两个例子.

3. 指出下列等式中, 哪些是恒等式? 哪些不是恒等式?

(1) $4+7=11$;

(2) $x+7=11$;

(3) $3x-5=-2$;

(4) $-(x-4)=4-x$;

(5) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

(6) $x^2 = x \cdot x$;

(7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

(8) $x^2 = 2x$;

(9) $9-2x=x-6$;

(10) $3x-y=1$;

(11) $x+y=y+x$;

(12) $x^2+y=x+y^2$;

(13) $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$;

(14) $(x-2)(x+1)=0$;

(15) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

(16) $x^3-y^3=1$.

§1.2 方 程

我们来看下面这个问题:

什么数减去 2 等于 3?

如果用 x 表示这个数, 那末可以写出等式

$$x-2=3.$$

因为这里 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等, 所以 $x-2=3$ 不是恒等式.

在这个等式里, 2 和 3 是问题中已经告诉我们的数, 这种数叫做已知数. 而字母 x 的值, 需要根据它与等式里的已知数 2 和 3 之间的关系来确定的.

等式里字母的值, 需要根据它与等式里的已知数之间的关系来确定的, 这样的字母叫做未知数.

含有未知数的等式, 叫做关于这个未知数的方程, 简称方程. 方程中不含未知数的项叫做常数项.

例如, $x-2=3$ 就是方程. 又如, $5y=2$, $x^2=9$, $x+y=10$ 等也都是方程.

在方程 $x-2=3$ 里, 如果用 5 代替未知数 x , 那末方程左右两边的值相等.

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值, 叫做方程的解.

例如, 5 是方程 $x-2=3$ 的解. 又如, 在方程 $5y=2$ 里, 用 $\frac{2}{5}$ 代替未知数 y , 方程左右两边的值相等, 所以 $\frac{2}{5}$ 是方程 $5y=2$ 的解. 在方程 $x^2=9$ 里, 用 3 或者 -3 代替未知数 x , 方程左右两边的值都相等, 所以 3 和 -3 都是方程 $x^2=9$ 的解.

只含有一个未知数的方程的解, 也叫做方程的根. 例如, 方程 $x-2=3$ 的解是 5, 我们也可以说, 方程 $x-2=3$ 的根是 5. 同样可以说, 方程 $5y=2$ 的根是 $\frac{2}{5}$; 方程 $x^2=9$ 的根是 3 和 -3.

求方程的解或根的过程, 叫做解方程.

例 1. 根据下面所说的数量关系, 列出方程,

- (1) x 加上 3 等于 7;
 (2) x 的 4 倍减去 2 等于 x 的 2 倍;
 (3) x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8.

【解】 (1) $x+3=7$;

(2) $4x-2=2x$;

(3) $5x-3x=8$.

说明 x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8, 就是说, x 的 5 倍减去 x 的 3 倍等于 8.

例 2. 检验下列各数是不是方程 $x^2=x+2$ 的根:

- (1) 1; (2) -1; (3) 2.

【解】 (1) 用 1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x , 这时,

左边 $= 1^2 = 1$, 右边 $= 1 + 2 = 3$,

$\therefore$ 左边 $\neq$ 右边, $\therefore$ 1 不是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(2) 用 -1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x , 这时,

左边 $= (-1)^2 = 1$, 右边 $= -1 + 2 = 1$,

$\therefore$ 左边 $=$ 右边, $\therefore$ -1 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(3) 用 2 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x , 这时,

左边 $= 2^2 = 4$, 右边 $= 2 + 2 = 4$,

$\therefore$ 左边 $=$ 右边, $\therefore$ 2 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

注 符号“ $\neq$ ”读做“不等于”. 有些书上写成“ $\neq$ ”, 是通用的.

习 题 1.2

1. 用方程来表示下列数量关系:

- (1) x 减去 6 等于 3;
 (2) x 的 4 倍加上 5 等于 13;
 (3) x 的 2 倍加上 7 等于它的 5 倍减去 8;
 (4) x 的 3 倍比 x 的 5 倍小 4;

(5) y 比 y 的 $\frac{1}{4}$ 大 12;

(6) x 的 $\frac{1}{3}$ 与 x 的 $\frac{2}{5}$ 的和等于 22;

(7) x 与 2 的差的 5 倍等于 15;

(8) x 与 3 的和平方的平方等于 x 的 10 倍与 6 的和.

2. 什么叫做方程的根? 用下列方程后面括号里的数值一一代替方程中的未知数, 指出哪些是方程的根? 哪些不是方程的根?

(1) $x+2=0$, (2, -2);

(2) $2x-5=1$, (3, 4);

(3) $2x=6$, (3, -3);

(4) $x^2=9$, (3, -3);

(5) $x^2-x=6$, (3, -2);

(6) $(x-3)(x+3)=0$, (-3, 3, 0);

(7) $3x+8=\frac{x}{4}-14$, (8, -8);

(8) $2x(3x+2)=0$, $(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$;

(9) $x(x-2)=8$, (-2, 2, -4, 4);

(10) $x^2-7x=6$, (1, 2, -3).

§1.3 同解方程

我们来看下面的两个方程:

$$3x-2=4, \quad (1)$$

$$3x=6. \quad (2)$$

如果用 $x=2$ 代入方程(1)时, 方程两边的值都等于 4, 所以 2 是方程(1)的根. 如果用 2 以外的任何数值代替方程(1)里的 x , 例如用 5 代替 x , 左边的值等于 13, 右边的值等于 4, 这时方程两边的值就不相等, 所以 5 不是方程(1)的根. 因此, 方程(1)只有一个根 2.

用同样的方法, 我们可以知道方程 (2) 也只有一个根 2. 这就是说, 方程 (1) 的根和方程 (2) 的根完全相同.

两个方程, 如果第一个方程的根都是第二个方程的根, 并且第二个方程的根也都是第一个方程的根, 那末这两个方程叫做同解方程.

例如, 方程 (1) 和方程 (2) 是同解方程.

又如, 在习题 1.2 的第 2 题里, 我们已经做过, 知道方程 $2x-5=1$ 的根是 3, 方程 $2x=6$ 的根也是 3, 所以方程 $2x-5=1$ 和方程 $2x=6$ 是同解方程.

方程 $x^2=9$ 有两个根 -3 和 3 , 方程 $(x-3)(x+3)=0$ 也有两个根 -3 和 3 , 所以方程 $x^2=9$ 和方程 $(x-3)(x+3)=0$ 是同解方程.

但是, 方程 $x+2=0$ 的根是 -2 , 方程 $x^2-x=6$ 的根是 -2 和 3 , 虽然方程 $x+2=0$ 的根是方程 $x^2-x=6$ 的根, 但是方程 $x^2-x=6$ 的两个根里, 只有一个根 -2 是方程 $x+2=0$ 的根, 而另一个根 3 却不是方程 $x+2=0$ 的根, 所以这两个方程就不是同解方程.

例 已知方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有而且只有两个根: -2 和 $\frac{1}{2}$, 方程 $2x^2+3x=2$ 有而且只有两个根: $\frac{1}{2}$ 和 -2 , 判别这两个方程是同解方程吗?

【解】 因为方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有两个根, 它们都是方程 $2x^2+3x=2$ 的根, 并且方程 $2x^2+3x=2$ 有两个根, 它们也都是方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 的根, 所以这两个方程是同解方程.

习 题 1.3

1. (1) 什么叫做同解方程?

(2) 方程 $5x=10$ 和方程 $x+1=3$ 是不是同解方程?

2. (1) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 5 和 3, 这两个方程是不是同解方程?

(2) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 3 和 -5 , 这两个方程是不是同解方程?

(3) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 5, 这两个方程是不是同解方程?

(4) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 3, 5 和 6, 这两个方程是不是同解方程?

3. 下列方程后面的括号里的数是这个方程全部的根, 指出下列方程中哪些是同解方程:

(1) $2x-3=x$, (3);

(2) $2x-1=3x$, (-1) ;

(3) $(x+1)(x-3)=0$, $(-1, 3)$; (4) $5x-8=2x+1$, (3);

(5) $x^2-3x=0$, $(0, 3)$; (6) $x^2-3=2x$, $(3, -1)$.

[解法举例: 方程 $2x-3=x$ 的根是方程 $5x-8=2x+1$ 的根, 方程 $5x-8=2x+1$ 的根也是方程 $2x-3=x$ 的根, 所以这两个方程是同解方程.]

4. (1) $\frac{1}{2}$ 和 -3 是方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 的根吗?

(2) 方程 $2x-1=0$ 和方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 是不是同解方程?

(3) 方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 和方程 $x+3=0$ 是不是同解方程?

5. (1) 5 是方程 $2x+1=3x-4$ 的根吗? 4 是方程 $2x+4=3x-1$ 的根吗?

(2) 方程 $2x+1=3x-4$ 和方程 $2x+4=3x-1$ 是不是同解方程?

§1.4 方程的两个基本性质

在上一节里, 要判别一个方程和另一个方程是不是同解方程, 我们需要把两个方程的根一一代入检验, 这样的方法是很麻烦的. 为了解决这个问题, 并且能够正确地掌握解方程的方法, 我们先来研究方程的两个基本性质.

1. 方程的第一个基本性质 我们看下面一个问题:

什么数减去 3 等于 7?

如果设某数为 x , 可以列出方程

$$x-3=7.$$

我们如果用算术方法来考虑: 某数减去 3 所得的差是 7, 大家都知道, 这个某数(即被减数)等于差 7 与减数 3 的和. 列出方程, 可以得到

$$x=7+3.$$

这里, 当 $x=10$ 的时候, 方程 $x-3=7$ 的两边都等于 7, 方程 $x=7+3$ 的两边都等于 10. 这就是说, 10 是方程 $x-3=7$ 的根, 也是方程 $x=7+3$ 的根. 所以方程 $x-3=7$ 和方程 $x=7+3$ 是同解方程.

从这个例子, 我们可以得出一个性质:

方程的两边都加上(或者都减去)同一个数, 所得的方程和原方程是同解方程.

再看下面这个方程:

$$3x-2=10.$$

从这个方程的两边都减去同一个整式 $2x-1$, 得到

$$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1).$$

当 $x=4$ 的时候, 方程 $3x-2=10$ 的两边相等, 这时 $2x-1=7$, 所以两边都减去整式 $2x-1$, 实际上就是两边都减去 7, 因此方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 的两边也相等. 所以我们知道方程 $3x-2=10$ 和方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 也是同解方程.

根据上面所说的, 我们得到方程的第一个基本性质:

方程的两边都加上(或者都减去)同一个数或者同一个整式, 所得的方程和原方程是同解方程.