〔英〕P·T·桑德斯 著

灾变理论入门

凌复华 译

上海科学技术文献出版社

灾变理论入门

[英] P. T. 桑德斯 著
凌 复 华 译

上海科学技术文献出版社
1983

An introduction to CATASTROPHE THEORY
P. T. SAUNDERS
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
1980

灾变理论入门
[英] P. T. 桑德斯 著
凌复华 译
*
上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路二号)
新华书店上海发行所发行
宜兴南漕印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 5.75 字数 139,000
1983年7月第1版 1983年7月第1次印刷
印数: 1—5,400

书号: 13192·49 定价: 0.72 元

《科技新书目》 51-236

译 者 的 话

灾变理论(catastrophe theory)是研究不连续现象的一个新兴数学分支，它是由比利时数学家汤姆创立的。汤姆的奠基专著出版于1972年。十年来，灾变理论有了很大的发展，其中齐曼作出了重要贡献。

一般所讲的灾变理论实际上是初等灾变理论，它的主要数学渊源是根据势函数把临界点分类，进而研究各种临界点附近非连续性态的特征，即为有限个数的若干个初等灾变。把这样得到的知识与对不连续现象的理论分析和观察资料相结合，就可以建立数学模型，更深刻地认识不连续现象的机理并作预测。

灾变理论是一种旨在应用的理论。它的出现虽然还不久，却已取得了许多应用成果。在数学、力学和物理学中，借助灾变理论不仅能加深对已有定律的认识，也已得到了一些新的结果，例如找到了光的焦散面的全部可能的形式。特别是在生物学和社会学中，许多现象很难用其他数学方法处理，却可以应用灾变理论。例如对捕食者-被捕食者系统中的群体消长情况，长期以来，用微分方程不能得出满意的解释，而灾变理论的预测却与实验很好地相符。

本书是一本很好的灾变理论入门读物，其中先用初等方法通俗地介绍了灾变理论的数学基础，分析了基本的七种初等灾变，然后用许多典型例子令人信服地说明了灾变理论的应用价值。读者可在本书的基础上进一步学习并试用灾变理论来研究他所感兴趣的实际问题。

目前，国内对灾变理论的了解还不多，希望本书的出版能引起有关科技工作者对这种新理论的注意。

本书承蒙金瑞椿同志认真校阅并提出许多宝贵意见，谨致谢忱。

前　言

几乎每个科学家都听说过灾变理论，也知道环绕这种理论的分歧意见相当多。然而，多数人对灾变理论的了解并不多于他们可能从为一般读者所写的文章所读到的内容。本书的目的是使任何一个只具有中等数学基础的人(仅具有在大学非数学专业一年级课程中通常包括的知识的人)能够对灾变理论有足够的理解，从而能领会应用灾变理论的论文中的论据，并当需要时自己应用这种理论。

大多数读者会发现许多概念对他们来说是新的，如果完全回避新概念，就不可能对理论作出充分的阐述。但是只要可能，我总是力求保持通俗。我的宗旨是解释理论，而不是提供正式的证明；而一种理论若用刚刚引入的概念给予解释，则几乎总是比较难以理解的。正因为如此，虽然有比较精辟的推导方法，有时我仍进行笨拙的计算。但我努力保持数学的精髓，虽然并不总是逐字逐句。这样，读者用这本书作为入门，进而严格地研究其定理时，会发现书中没有他必须抛弃的东西。

本书有一半以上的篇幅致力于应用方面，我对应用的叙述要比通常在应用数学教科书中所包括的内容详细得多。这是因为对于应用灾变理论的数学家来说，把他的分析同原始问题分离开是不可能的，至少肯定现在还不可能。如果我写的是，譬如说，关于处理偏微分方程的新技巧的话，我就不会感到有责任就引出方程的问题做很多叙述，除非也许是为了解释为什么某些方程特别值得注意，或者为了激起读者的兴趣。模型的构造和结果的物理解释可以或多或少地被假定为正确的，而只留下数学

分析被单独地考虑。

但是就灾变理论而言，特别是应用于生物学和社会科学时，情况就大不相同了。典型的是我们没有模型，这是从模型这个词的一般意义来说的；在许多情况下，如果有了这样一个模型，那么我们用传统的技巧就可以解决问题了。正相反，我们面临的是我们没有能力详细分析的复杂系统。我们的目的是尽可能认识事物而不采用我们力所不及的机械论模型。采用的方法则取决于问题的性质和我们处理问题时的独创性，迄今还没有标准的技巧。所以，看来最好的办法是提供一个相当大的不同应用的样本，来说明应用的可能性的范围。

所以包括这么多的应用还有一个原因，就是：鉴于我并未致力于证明作为灾变理论的基础的定理，读者对这些定理必须采取信任的态度。无论如何，他可以感到相当放心：所有不厌其烦而进行证明的数学家似乎都同意它们是正确的。分歧在于应用，读者通过对其中若干问题的研究，应该可以作出自己的判断。

非物理科学的例子应该在这一点上具有最大的价值，因为依我看来，大多数分歧发生的根源在于：在本质上，灾变理论并不象应用数学的大多数分支那样是理论物理的一部分，而是理论生物学的一部分。汤姆写道：生物学家不习惯以理论为依据进行思考，尽管在这一点上我完全同意他，但是我认为他应当再加一句：数学家也不习惯以生物学为依据来进行思考。我们习惯于理论物理，这是一门具有公认非常成功的范例的学科。遗憾的是这种范例不能原封不动地搬到生物学中去。而生物学家也没有把生物学的理论方面发展到足以为我们提供一个现成的系统的地步。结果，任何一个试图应用数学于生物学的人都发现他自己必须在这样一个范例的范围里工作，这个范例不仅不同于他的数学家同行中的大多数人认为那么理所当然以致于几乎不

觉察其存在的那些范例，而且还处在其发展的早期阶段。既然这样，一场关于范例的大争论大概是注定迟早要爆发的，何况灾变理论的起源并不就是理论生物学，而是这门学科中与理论物理在本质上不同的部分，它成为这场争论的焦点就不足为奇了。

当然，关于灾变理论及其应用，还留有许多重大的问题。但是，既承认对于一个只有不足十年历史的理论还存在着争议，而同时又把它看作是一项重大的进展，这决不是矛盾的。这个论点是德·摩根在许多年前阐述的，他写道：

> 有时有这样的一种倾向，所有呈现任何困难的，或在处理明显的矛盾时不能毫无困难地给出所有结论的理论都应被抛弃。如果这意味着那种其结论并不完全正确的理论不应当永久使用并受到盲目的信任，那么我和别人一样，不会对这种合理的方针表示异议。但如果这意味着不可以把任何一种不能被完全接受的理论加以说明或不加说明地教授给学生，那么我将对这种限制恭敬地提出抗议。照我看来，这种限制不仅会对已知的事物给人以假象，还会使发现新事物的过程中止。除开几何学，如果说数学科学的全部（象许多人设想的那样）都是些精确完美的模型，那是不确实的。分析的边界总是被不完全正确地理解，正象超出这条边界的广大领域曾是绝对未知的那样。但扩大已知领域的方法从来不是囿于其中，而是出航探索。我完全相信对学生应该这样训练：除了学习开发内部之外，他们应当学习如何去考察这条边界。因此，我在本书前面部分从不顾虑去运用那样一些方法，那些方法我不愿称之为有疑问的，因为它们是以尚未完成的形式给出的，也因为疑问来自有志学习的人，而不是来自不满

意的批评者。经验常常表明，有缺陷的结论会通过坚持不懈的思考而明确化和严格化，但是谁能对从来不允许见面的东西作出结论呢？

这段文字所辩护的学科实际上是微积分学，它的发明距当时已有约一百五十年，但其基础还没有建立得完全扎实；德·摩根的文章是在柯西的讲稿发表仅二十年后写的，那个讲稿中包括有给极限所下的第一个贴切的定义。那时对微积分学已经有许多强烈的攻击。其中最有名的是伯克利主教在1734年所著的《分析者或对离经叛道的数学家的讲话》，读者会发现看一下这本著作是有教育意义的，即使只是了解到在数学界分歧和论战决非新奇也是好的。很容易这样设想：数学是这样一门很有逻辑性的学科，数学家是这样理智的人，因而每一项重大的进展必然立即受到数学界的欢迎和赞扬，任何没有取得这些的新事物必然是没有价值的。即使只是草草浏览一下数学的历史，就可以说明根本不是那么一回事。

当然，微积分学的对立者所提出的反对意见中有些是有根据的。的确还要做很多工作才能使微积分学的实用性建立在严密分析的牢固基础上。但是，设想攻击的后果是微积分学被全部否定，或者至少是十八世纪的数学家诸如欧拉、达朗贝尔、伯努利兄弟、拉格朗日等等在微积分学的基础建立得象几何学的基础那么坚实之前拒绝钻研这种理论的应用，那损失该是多大。

许多人以不同的方式对本书作出了贡献。我特别要感谢巴青、何梅琐（译音，Mae Wan Ho）和皮尔斯，他们向我提出了改进意见，不过在这些事情上我偶而固执己见，因此，如果还留有任何错误，他们是没有责任的。我也感激齐曼，我是通过他的工作得以熟悉灾变理论的。我尤其感激汤姆。如果本书能鼓励读者利用汤姆的巨大贡献并在其基础上有所建树，本书就达到了目的。

目　　录

第一章 引　　言

自然界中许多最有趣的现象都涉及不连续性。这种不连续性可以体现在时间上，如波的破碎、细胞的分裂或者桥梁的倒塌，也可以体现在空间上，如物体的边界或两种生物组织之间的界面。然而应用数学家可利用的绝大多数技巧是设计用于对连续性态作定量研究的。这些方法主要以微积分学为基础，不过从牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)时代以来已有了很大的精炼和扩展，而使我们对自然界的认识能获得极大的进步。但是他们的重大成就基本上局限于物理科学。当我们转向生物学和社会科学时，我们常常觉得无法构成可应用同样的方法而又是比较完善的模型。不仅如此，作为理论家必须对之进行加工的原料的观察资料，以及他检验其模型的标准，都很少能达到在物理学中可期望的精度。在很多场合，它们只是定性的。在生物学中，没有什么东西可与天体的不可变更并可精确预测的运动相比较。

作为数学的一部分，灾变理论是关于奇点的理论。所以当应用于科学问题时，它直接处理不连续性而不联系任何特殊的内在机制。这就使它特别适用于内部作用尚属未知的系统的研究，并适用于仅有的可信观察具有不连续性的情况。不可否认，数学物理技巧已成功地用于不连续性的分析，但这需要对系统有一定程度的知识，而在“软”科学*领域中的研究者不见得会具

* “软”科学指迄今为止以描述现象为主的社会科学和生物科学。与之相对的“硬”科学指物理科学等。——译者注

有这些知识。例如对于冲击波的经典处理就依赖于对流体连续性态的详尽了解。

灾变理论

考虑一个性态通常是光滑的，但有时(或在有些地方)也呈现出不连续性的系统。我们可以一般地假定系统在任何时刻的状态都可完全地由给定 n 个变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的值来确定，这里 n 是有限的，但可以很大。在大脑的一个模型中，n 可达百万乃至万万的数量级。我们也可以假定系统受到m个独立变量$(u_1, u_2, \cdots, u_m)$的控制，即这些变量的值决定了 x_i 的值，虽然如象我们将看到的那样，并不完全唯一。我们将假定m比较小，通常不大于5，虽然我们也能处理较大的值。这样给出的限制比看起来可能的限制为少，因为我们略去了所有那些对我们所研究的不连续性影响不大的独立变量，而如果一个系统的性态是不连续的，并且与六个或者更多的独立变量密切相关，则用任何办法显然都很难处理它。我们将把 x 叫做状态变量或内部变量，u_i 叫做控制变量或外部变量。

我们还将假定系统的动力学可由一个光滑的势导出，虽则在事实上，有一个势存在的要求比我们实际需要的强得多。例如有一个李雅普诺夫 (Liapounov) 函数 (它与经典势的相似之处是它的极小值确定稳定平衡状态，不同之处是它的梯度并不确定轨迹)就足够了，故这种理论适用于几乎总是位于常微分方程组平衡点处的诸系统，不论其动力学是不是梯度型的。也可以证明灾变理论适用于服从一个变分原理，或受许多通常遇到的偏微分方程所支配的系统，甚至用于存在的是极限环而不是平衡点的情况。我们将会发现，下面几章根据势来讨论是方便的，但这并不意味着其结果只能用于具有梯度动力学的系统。

基于两个互相有关的理由，必须指出势(或较一般地说，

内在的动力学)是光滑的要求。首先，我们对不连续性的起源感兴趣，如果我们简单地假定这些不连续性是嵌入在动力学中的，那么我们并没有很大进展；这意味着我们的研究进行得不够深入。显然，如果我们事先允许动力学中有不连续性，我们很难期望对它的性质有很多可以说的，因为我们可以随心所欲地安排我们喜欢的任何不连续性。

在这些条件下，灾变理论告诉我们的是：可能出现的性质不同的不连续构造的数目并不取决于状态变量的数目(这可能很大)，而取决于控制变量的数目(这一般较小)。特别是如果控制变量的数目不大于4，那么只有七种不同类型的灾变，而且其中没有一种牵涉到两个以上的状态变量。(对后者我们当然是指可能这样地选择一组 n 个状态变量，使得其中与不连续性有关的不会多于两个，我们可以认为这是一种到特征变量的变换。)

这是一个值得注意的结果。设想一下试图用通常的方法分析一个大而复杂的系统。我们得写出 n 个微分方程(记住 n 可以是 10^6 或更大)，提供初始条件，求解，然后试图理解得到的解答。即使我们事先知道哪些变量是我们感兴趣的，也很难有多少进展。耦合的微分方程不能个别地加以处理；必须首先解出 n 个方程，然后找出一个或两个恰当的解。另一方面，灾变理论有可能预测系统的许多定性性态，甚至不知道是一些什么微分方程也行，更不用说不知道如何解它们了，并且这是在少数几个假设的基础上完成的。令人惊讶的是这些假设并非限制性的。

正如可预期的那样，这个断言是不容易证明的，本书不试图做这件事。以下三章将作为介绍导出灾变理论的一些基本思想的引言，并说明七种初等灾变的一览表从何而来，以及其中的每一种有什么样的性质。然后我们将进而讨论应用这种理论的多种方式的例子。

在着手于这个课题之前，我们详细讨论一下两个说明灾变理论的许多基本论点的简单物理系统。特别是它们说明了一个光滑的动力学是怎样引起不连续性态的。

齐曼灾变机构

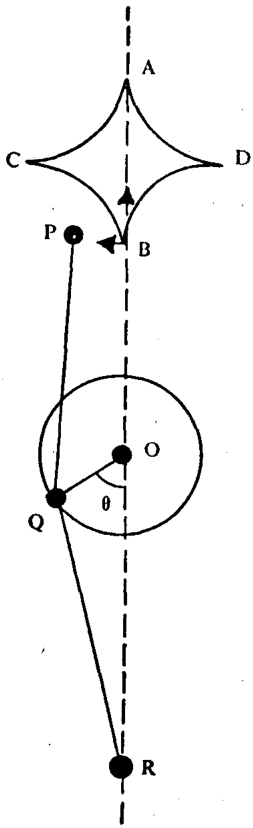

图1.1　齐曼灾变机构

图 1.1 是齐曼 (1972a) 发明的一种示教模型的简图。它很容易制造，我们竭力推荐读者自己做一个。最简单的步骤是找两根几乎完全相同的橡皮筋。取它们未拉伸的长度为单位长度。用卡纸剪一个直径为一个单位长度的圆盘，并在接近周边的 Q 点按一个图钉，使针尖朝上。用第二个图钉穿过圆盘的中心 O，把圆盘装在一块合适的底板上。把两根橡皮筋套在 Q 点的图钉上，并用第三个图钉固定其中一根橡皮筋的另一端于底板上距 O 为两个单位长度的 R 点处。余下的一端 P 则任其自由。尺寸都是近似值，无需搞得很精确。

在灾变机构所在的平面内慢慢移动 P 而使它动作。试验一段时间后，我们会发现一些奇怪的特征。其中最明显的是，P 的位置有微小的改变时，灾变机构的响应几乎总是平稳的，然而它有时也会突跳。如果在底板上标出发生跳跃时 P 的位置，我们会发现它们形成曲边钻石形的轮廓线。但也可使 P 越过轮廓线而不引起跳跃。例如，如果我们使 P 点垂直于机构的对称轴越过钻石形作前后移动，

则在两个方向上都只有一次跳跃，而且它们并不发生在同一位置上。最后，如果 P 在钻石形之外，则圆盘只可能有一个平衡位置，但若 P 在钻石形之内，则圆盘有两个稳定平衡位置，其一是 Q 向左边倾斜，另一是 Q 向右边倾斜。如果我们仔细操作，还能在这两个平衡位置之间找到第三个平衡位置，但它是不稳定的。

在原则上，对"灾变机构"的分析是很简易的。机构在任何时刻的位置完全是由一个变量 θ（线段 OQ 与对称轴之间的夹角）确定的。对于自由端 P 的任何人为的位置，机构会寻找使橡皮筋中贮藏的能量减为最小的一种构形（即 θ 的值）。因为受拉弹性体的能量与拉伸量（拉伸后与拉伸前长度之差）的平方正比，系统的势能是

$$V(\theta)=\frac{1}{2}\mu[(r_1-1)^2+(r_2-1)^2]$$

式中 r_1 和 r_2 是橡皮筋的长度，而 μ 是它们的弹性模数。

由于这种看来简单的表达式不便于进一步处理，最好先考虑 P 只能沿着对称轴移动的特殊情况。设距离 OP 为 s；则（参看图 1.2）

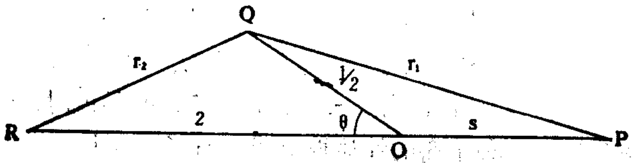

图 1.2

$$r_1^2=s^2+\frac{1}{4}+s\cos\theta,$$

$$r_2^2=4+\frac{1}{4}-2\cos\theta。$$

但这样仍难得到封闭形式的结果，故我们从另一不同的途径着手。由于对称性，在 $\theta=0$ 处必定有一个平衡位置。把 V 展开为 θ 的级数，我们就能确定这个平衡的性质，级数只保留到 θ 的四次项为止，其理由见下文。这样

$$r_1^2 \sim s^2+\frac{1}{4}+s\left(1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{24}\theta^4\right)$$

和
$$r_2^2 \sim \frac{17}{4}-2\left(1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{24}\theta^4\right),$$

于是
$$r_1 \sim \left(s+\frac{1}{2}\right)\left[1-\frac{s\theta^2}{4\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}\left(\frac{s}{3\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{s^2}{2\left(s+\frac{1}{2}\right)^4}\right)\theta^4\right]$$

和
$$r_2 \sim \frac{3}{2}+\frac{1}{3}\theta^2-\frac{7}{108}\theta^4,$$

因此
$$V(\theta) \sim \frac{1}{2}\mu\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{3}-\frac{s(2s-1)}{2(2s+1)}\right]\theta^2\right.$$
$$\left.+\left[\frac{s}{24}-\frac{s}{12(2s+1)}+\frac{s^2}{2(2s+1)^3}+\frac{5}{108}\right]\theta^4\right\}。$$

展开式中无线性项，这一事实告诉我们，$dV/d\theta$ 在 $\theta=0$ 处为零，这证实了我们的断言：当 OQ 顺着机构的轴线时，总有一个平衡位置。这种平衡的性质取决于二阶导数 $d^2V/d\theta^2$ 即

$$\frac{1}{3}-\frac{s(2s-1)}{2(2s+1)}$$

的符号。特别当 s 值是使该表达式为零的那些值时，即当

$$s=(7\pm\sqrt{97})/12$$

时，平衡会从稳定变为不稳定(反之亦然)。负根是无关紧要的，