

算 學 叢 書

第 八 種

級 數 概 論

日本林鶴一 小倉金之助著

歐 陽 祖 綸 譯

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

目 次

第一章 數列之極限..... 1-46

無限數列之極限. 關於數列極限之注意. 例題.
關於極限基本的計算. 單調數列. 例題. 無理數.
豫先應習之不等式. 指數函數及對數函數. 第一章之問題.

第二章 數列極限之他諸定理..... 47-88

數列之上限及下限. 數列之上界及下界. 數列收斂之普通原則. 史多爾士之定理. 柯西之定理.
亞培耳之豫備定理. 卡兒之定理. 函數之極限.
例題. 第二章之問題.

第三章 無限級數..... 89-165

無限級數之收斂. 級數收斂之定理. 正項級數收斂之定理. 級數比較之原則. 例題. 柯西之收斂判定條件. 提倫培之判定條件. 柯西及提倫培兩種基礎判定條件之比較. 樸林枯斯呵模之定理. 柯西之凝集判定條件. 正項級數各項次序之變更. 正負項級數之絕對收斂及條件收斂. 絕對收斂之判定條件. 交番級數. 正負數級數各項順序之變更. 絕對收斂級數之乘法. 指數函數. 對數函數. 例題. 第三章之問題.

第四章 正項級數收斂之判定條件... 166-212

對數無限大之標準. 克拉墨之判定條件. 勒伯之判定條件. 哥斯定理. 哥斯及溪耶墨之判定條件. 亞培耳·培脫蘭之級數. 第一種對數的判定條件. 第二種對數的判定條件. 凝集判定條件之擴張. 指數的判定條件. 例題. 第四章之問題.

第五章 正項級數系統的研究..... 213-262

收斂判定之原則. 對數的關係式. 發散級數之標準形式. 收斂級數之標準形式. 樸林枯斯呵模之第一種判定條件. 第二種判定條件. 一系判定條件所不能判定之級數. 關於正項級數之注意. 第五章之問題.

第六章 正負項之級數..... 263-300

項之順序之變更. 威爾斯脫拉司之判定條件. 亞培耳及狄利失勒之判定條件. 西薩羅之判定條件. 級數之乘法. 例題. 第六章之問題.

第七章 二重級數..... 301-342

二重級數之極限. 累次極限. 單調二重數列. 二重級數及累次級數. 正項二重級數. 正項二重級數收斂判定之條件. 絕對收斂及條件收斂. 柯西之二重級數定理. 級數之變形. 重數列及重級數. 第七章之問題.

第八章 無限乘積 343-376

無限乘積之收斂. 正因數之乘積. 一般乘積之收斂. 無限乘積之絕對收斂. 無限乘積之條件收斂. 無限乘積之變形. 「敢麻」函數. 例題. 第八章之問題.

第九章 微積分學之基礎定理. 無限積分 377-429

函數極限之注意. 函數之連續. 函數之微分. 微分法之基礎計基. 函數之積分. 積分之基礎定理. 無限積分之收斂. 正函數之積分收斂之判定條件. 無限積分及無限級數之比較. 馬格老臨之積分判定條件. 愛魯馬覺夫之判定條件. 無限積分及無限級數之極限. 重積分. 重級數之積分判定條件. 第九章之問題.

第十章 變數項之級數 430-480

函數列之一樣收斂. 一樣收斂函數列之定理. 級數之一樣收斂. 級數之連續. 級數一樣收斂之判定條件. 丹南利之定理. 級數之積分. 級數之微分. 例題. 無限乘積之一樣收斂. 丹南利關於乘積之定理. 無限乘積之對數微分. 無誘導函數之連續函數之例. 第十章之問題.

第十一章 冪級數 481-546

收斂之範圍. 冪級數之連續性. 未定係數法之原則. 係數爲變數者. 亞培耳之定理. 冪級數之代入. 級數之除法. 冪級數之反轉. 戴勞之級數. 冪級數之微分及積分. 關於戴勞級數之樸林枯斯呵模定理. 拉果蘭諸之級數. 冪級數之擴張. 第十一章之問題.

第十二章 複素數項之級數 547-608

複素數. 複素數列. 複素數之指數函數及對數函數. 複素數之一般冪及三角函數. 複素項級數之收斂. 絕對收斂及條件收斂. 複素因數無限乘積. 複素數級數絕對收斂之一般的判定條件. 對數之判定條件. 條件收斂之判定條件. 冪級數之威爾斯脫拉司之判定條件. 複素變數之函數. 函數之平均值. 級數之一樣收斂. 例題. 第十二章之問題.

第十三章 複素數範圍內之冪級數... 609-645

收斂圓. 冪級數計算之例. 戴勞之級數. 冪級數之微分及積分. 亞培耳之定理. 例題. 柯西之係數定理. 威爾斯脫拉司之二重級數定理. 前節定理之應用. 第十三章之問題.

第十四章 不收斂之級數 646-686

序說. 漸近級數. 冪級數與漸近級數之換置. 漸近級數之除法. 漸近級數之微分及積分. 西薩羅之平均總和法. 關於冪級數之西薩羅及布羅伯留士之定理. 列題. 平均總和法之擴張. 賀烈爾之指數總和法. 賀烈爾之積分總和法. 指數總和與積分總和之關係. 最後之注意. 第十四章之問題

附 錄

複素項級數之項之次序變換 687-695

級數概論

第一章 數列之極限

§1. 無限數列之極限.

與正整數 n 相對應, 而依一定之規則, 以定一數 a_n ; 則得與一系列正整數

$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

相對應之一列之數

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

此一系列之數, 謂之無限數列或單稱數列, 而以 $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ 或 (a_n) 表之, 其 a_n 謂之數列 (a_n) 之項, a_n 之 n 謂之添數.

一直線上取一定點 O , 又以一定之長爲長之單位. 而 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 爲表單位之倍數, 則於直線上取

$$a_1 = OA_1, \quad a_2 = OA_2, \quad a_3 = OA_3, \quad \dots, \quad a_n = OA_n, \quad \dots$$

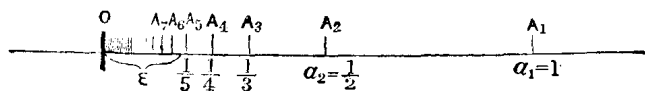
以定 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 點. 則此一系列之點乃表數列 (a_n) .*

例 (1). 與 $a_n = \frac{1}{n}$ 之規則, 則

$$a_1 = \frac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad \dots$$

即得 $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ 之數列.

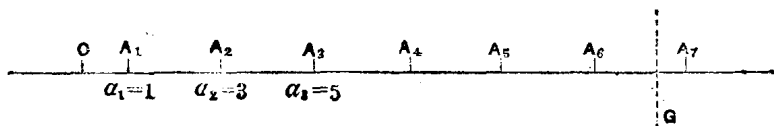
*凡幾何學的量如直線之長等, 及數之關係之研究, 因在本章範圍以外, 故不與以充分之說明.



今設 n 逐漸增大, 則 $\frac{1}{n}$ 漸次減小. 例如 n 大於 100, 則 $\frac{1}{n} < 0.01$, 又如 $n > 10000$, 則 $\frac{1}{n} < 0.0001$. 故設 ϵ 雖為任何小之正數, 然取 n 為十分大時, 亦能得 $\frac{1}{n} < \epsilon$, 是以由 $n > \frac{1}{\epsilon}$ 而能得 n 之值. 再申言之, 即使 $\frac{1}{\epsilon}$ 之整數部為 $m-1$, 因 $m-1 \leq \frac{1}{\epsilon} < m$, 故取 n 為大於 m 之正整數, 而能確定 $\frac{1}{n} < \epsilon$.

即 ϵ 為所與任何小之正數, m 為選得與之相當之正整數, 取添數 n 大於 m , 則 $a_n = \frac{1}{n}$ 及 0 之差得小於 ϵ .

例 (2). 凡奇數 1, 3, 5, 7, 9, ..., 乃從 $a_n = 2n-1$ 之規則而成之數列. 於此種情形, 其 n 增加, $2n-1$ 亦因之增加. 今取 G 為任何大之正數, 而取整數 $n > \frac{G+1}{2}$, 則 $2n-1 > G$, 即 $a_n > G$.



再申言之, G 雖為任何大之正數, 當 m 為 $\frac{G+1}{2}$ 之整數部時, 則取添數 n 大於 m , 而 a_n 尚得大於 G .

定義. ϵ 雖為任何小之正數, 而所得與之相應之正整數為 m , 若對大於 m 之任何值 n 而得

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon.$$

則數列 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ 之極限為 l .

若以 $|x|$ 表 x 之絕對值, 則 [對於大於 m 之任何值 n , 而得 $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$] 之意, 可以

$$|l - a_n| < \epsilon, \quad l > m$$

表之, 或書為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l, \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l.$$

更略之, 可書為

$$\lim a_n = l, \quad \text{及} \quad a_n \rightarrow l.$$

定義. G 雖為任何大之正數, 而所得與之相應之正整數為 m , 若對大於 m 之任何值 n 而得

$$a_n > G, \quad n > m.$$

則數列 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ 謂之有無限極限.

可書為 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

以同樣之意旨, 而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 故對此則前者當區別之, 而書為 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

定義. 若數列有極限 l , 則此數列謂之收斂, 謂為傾向於極限 l , 謂為收斂於 l . 若數列有無限極限, 則此數列謂之發散, 謂為發散於 $+\infty$, 或 $-\infty$. 凡數列收斂或發散, 則於廣義的謂之極限存在.

於前例 (1) $a_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$

即數列 $\left(\frac{1}{n}\right)$ 收斂於零。

又於例 (2) $a_n = 2n - 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$

即數列 $(2n - 1)$ 發散於 $+\infty$ 。

定義. 若數列既不收斂於 l , 又不發散於 $+\infty$ 或 $-\infty$, 即於廣義的極限不存在時, 此數列謂之振動。

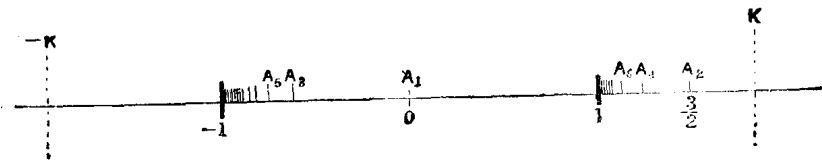
數列 (a_n) 爲振動, 而選得適當之正數 K , 若對於任何值 n 而得 $|a_n| < K$ 時, 則此數列謂之有限的振動。若對於 n 之任何值而不得 $|a_n| < K$, 則此數列謂之無限的振動。

一數在二定數之間, 則此數謂之有限數列, 爲收斂或有限的振動, 則此數列謂之得止於有限之值。

例 (3). 設 $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, 則

$$a_1 = -1 + 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad a_3 = -1 + \frac{1}{3}, \quad a_4 = 1 + \frac{1}{4},$$

$$a_5 = -1 + \frac{1}{5}, \quad a_6 = 1 + \frac{1}{6}, \quad \dots\dots$$



故 n 增加, 則 a_n 因 n 爲奇數而近於 -1 , n 爲偶數而近於 1 , 即 (a_n) 不能收斂於一定之極限, 然 a_n 無論 n 值如何, 皆在 -1 與 $\frac{3}{2}$ 之間, 故不能發散於 $+\infty$ 或 $-\infty$. 是以此數列爲

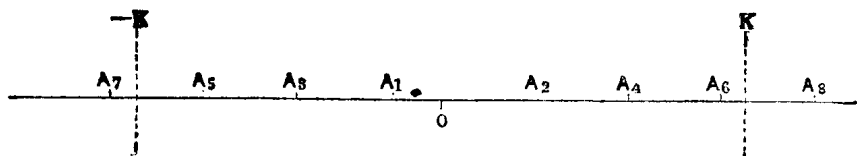
振動, 然因其對於 n 之任何值而得 $|a_n| \leq \frac{3}{2}$, 故得取 K 為大於 $\frac{3}{2}$ 之值, 則對於 n 之任何值而得 $|a_n|$ 小於 K , 是以此數列為有限的振動.

例 (4). 設 $a_n = (-1)^n n$, 則

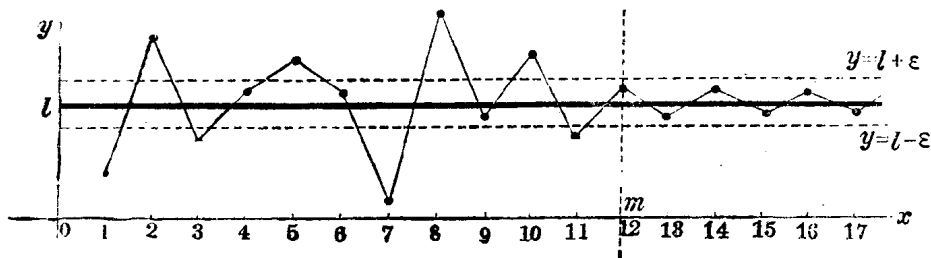
$$a_1 = -1, \quad a_2 = +2, \quad a_3 = -3, \quad a_4 = +4,$$

$$a_5 = -5, \quad a_6 = +6, \quad \dots\dots$$

故 n 增加, 則 a_n 因 n 之為奇數而為負數, 因 n 為偶數而為正數, 然其絕對值得大於任何正數 K , 是以此數列為無限的振動.

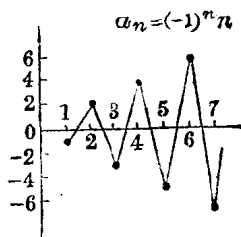
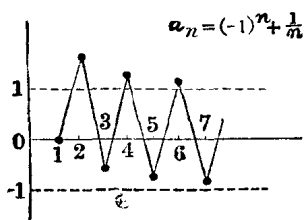
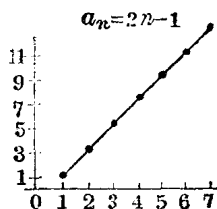
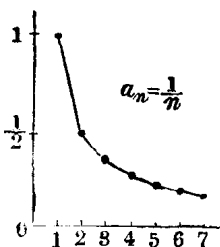


吾人尙欲明瞭數列之收斂, 發散, 及振動之現象, 則 Ox, Oy



為直交軸, 於 x 軸上計 n , y 軸上計 a_n , 則數列即以此一系列之點表之, 而此等點順次聯接之, 則得一折線, 若數列收斂於 l , 而 n 大於 m 時, 其諸列點悉在 $y=l+\epsilon$ 及 $y=l-\epsilon$ 二直線之間, 即夾在 2ϵ 廣之一雙平行線間, 若數列發散於 $+\infty$, 則

當 n 大於 m 時, 其列點均在直線 $y=G$ 之上部, 又發散於 $-\infty$ 亦同樣.



上四圖乃表前所舉之四例.

§2. 關於數列極限之注意.

I. 於前節之定義, $\lim_{n=\infty} a_n$ 之 $n=\infty$ 者, 乃謂 [m 雖得為任何大, 而 n 尚得大於任何大之正整數] 之意, 即 $n=\infty$ 者, 乃 [n 為大於任何大之整數] 之略詞也, 非謂有確定之 ∞ 整數存在.

同樣 $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$ 者, 乃謂 [G 雖得為任何大之正數, 然 a_n 對於 n 大於 m 之任何值, 尚得大於 G] 之意, 即 [$a_n (n > m)$ 為大於任何大正數之數] 之意, 而以略詞 $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$ 表之, 非謂有確定之 ∞ 正數存在也. $\lim_{n=\infty} a_n = -\infty$ 之意亦同.

II. 數列 (a_n) 之收斂於 l , 乃對於大於 m 之任何值 n 而得 $|l - a_n| < \epsilon$, 非僅對於大於 m 之數個值 n , 或從某規則對於整數數列而得 $|l - a_n| < \epsilon$ 也. 發散及振動之情形亦同.

例如數列 (a_n) , 當 n 為 100 之倍數時, $a_n = n$, n 非 100 之倍數時, $a_n = \frac{1}{n}$, 則 n 為 100 之倍數而為十分大時, $a_n > G$. 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$, 此因 n 非 100 之倍數, 則不能得 $a_n > G$ 故也. 同樣, n 非 100 之倍數而為十分大時, a_n 雖得小於 ϵ , 然不能得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

又如前節例 (3), $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, 則數列 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2k-1}, \dots)$ 收斂於 -1 , 此因 $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1}$.

$$\text{則} \quad a_{2k-1} - (-1) = \frac{1}{2k-1}.$$

$$\text{是以} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} [a_{2k-1} - (-1)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k-1} = 0.$$

又數列 $(a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k}, \dots)$ 收斂於 $+1$, 此因 $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$.

$$\text{則} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} [a_{2k} - 1] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} = 0.$$

然數列 $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ 決非收斂.

III. 一數列 a_n 不能同時收斂於相異之極限 l 及 l' , 此因同時若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l'.$$

則 $\bullet$ 雖為任何小正數, 亦同時能得

$$|a_n - l| < \frac{1}{2}\epsilon, \quad n > m,$$

$$|a_n - l'| < \frac{1}{2}\epsilon, \quad n > m,$$

其 m 必存在, 然因

$$l' - l = (a_n - l) - (a_n - l').$$

故
$$l' - l \leq |a_n - l| + |a_n - l'|.$$

由是知同時不能得

$$|a_n - l| < \frac{1}{2} |l' - l|,$$

$$|a_n - l'| < \frac{1}{2} |l' - l|.$$

故 $l' - l$ 不得不爲零.

IV. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ 時, 即 $|l - a_n| < \epsilon, \quad n > m.$

設 p 爲任意之正整數, 則 $n + p > m.$

故 $|l - a_{n+p}| < \epsilon,$ 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+p} = l.$

即數列 (a_n) 收斂於 l 時, 數列 (a_{n+p}) 亦收斂於 $l.$

數列非收斂時亦同.

V. 數列之極限, 不定爲數列內之數.

例如 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = 0, \dots, a_n = 0, \dots,$ 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

此極限 0 乃爲數列內之數, 又如 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots,$

$a_n = \frac{1}{n}, \dots,$ 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$ 此極限零乃非數列內之數. 何則,

因與 n 以任何值, 其 $\frac{1}{n}$ 決不能等於 0 也.

注意 I 亦即注意 V 之特例，蓋數列之極限可得 ∞ ，然 ∞ 決非數列中所取得之值。

又如於 $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n}{2} \pi$ 之數列 (a_n) ，因 $|\sin \frac{n}{2} \pi| \leq 1$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n}{2} \pi = 0$ 。然 n 為偶數時， $\sin \frac{n}{2} \pi = 0$ ， n 為奇數時， $\sin \frac{n}{2} \pi = +1$ 或 -1 。故上數列之極限 0，當 n 為偶數時，乃為數列內之值。 n 為奇數時，則為非數列內之值。

VI. 由注意 V 知正數項之數列，其極限不定為正數，有時得為零，如 $a_n = \frac{1}{n}$ 即其一例也，但決不能為負數，因 a_n 既大於零， $(n=1, 2, 3, \dots)$ ，若設 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -l, l > 0$ 。則 ϵ 雖為任何小之正數，亦能得 $a_n + l < \epsilon, n > m$ 。是與假定不合矣。

故 $a_n > 0, (n=1, 2, 3, \dots)$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ 。

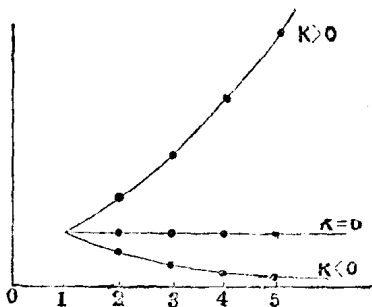
VII. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ，又 A 為常數， ϵ 為與 l 及 A 無關係任何小之正數，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < A + \epsilon, n > m$ 時，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq A$ 。

此因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l > A$ ，則 $0 < l - A < \epsilon$ ，當 m 為任何大而與之相應之 ϵ 得為任何小，然決不能小於一定之正數，故 $l \leq A$ 。

§ 3. 例題.

例 (1). 設 $a_n = n^k$ ，但 k 為正或負之有理數。

(i) 若 $k > 0$ ，則 G 雖為任何



大之數，亦能得 $n^k > G$ ，即 n 得比 $\sqrt[k]{G}$ 大，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ，
($k > 0$)。

(ii) 若 $k < 0$ ，則設 $k = -k'$ ，而 $k' > 0$ ，由 (i) 知 $n^{k'} > G$ ，即
 $n^k < \frac{1}{G}$ ，然 $\frac{1}{G}$ 為任何小之正數，即 $n^k < \epsilon$ ，故

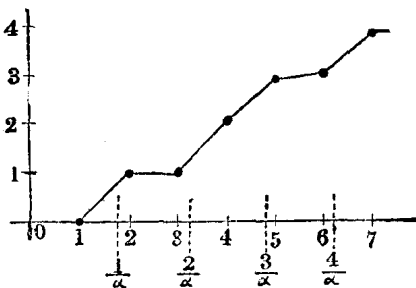
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = 0, \quad (k < 0).$$

(iii) 若 $k = 0$ ，則無論 n 為何數，均得 $n^k = 1$ ，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = 1, \quad (k = 0).$$

例 (2). 設 $[a]$ 表不大於正數或負數 a 之最近整數，而 a 為任意之正數，求數列 $([a][2a], [3a], \dots, [na], \dots)$ 之極限。

設 $0 \leq n < \frac{1}{a}$ ，則 $0 \leq an < 1$ ，故
 $[an] = 0$ ，即 $0 \leq n < \frac{1}{a}$ 時， $a_n = 0$ ，
又 $\frac{1}{a} \leq n < \frac{2}{a}$ ，則 $1 \leq an < 2$ ，故
 $[an] = 1$ ，即 $a_n = 1$ ，同樣 $\frac{2}{a} \leq n < \frac{3}{a}$ ，
則 $a_n = 2$ ， $\frac{3}{a} \leq n < \frac{4}{a}$ ，則 $a_n = 3$ ，……



故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 。

茲作 $a = \frac{1}{1.53}$ 之圖於右，至於 $a \leq 0$ 之情形，讀者可自推之。

例 (3). 試證明 $a_n = n^2 + (-1)^n n$ 發散於 $+\infty$ 。

因 $a_n = n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ，故 a_n ，因 n 增加而