算學叢書

第八種

級數概論

日本林鶴一 小倉金之助著
歐陽祖綸譯

目 次

附　錄

級數概論

第一章　數列之極限

§1. 無限數列之極限.

與正整數 n 相對應,而依一定之規則,以定一數 a_n; 則得與一列正整數

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

相對應之一列之數

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

此一列之數,謂之**無限數列**或單稱**數列**,而以 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ 或 (a_n) 表之,其 a_n 謂之數列 (a_n) 之**項**, a_n 之 n 謂之**添數**.

一直線上取一定點 O, 又以一定之長爲長之單位. 而 a_1, a_2, a_3 $\cdots$ 爲表單位之倍數,則於直線上取

$$a_1=OA_1,\quad a_2=OA_2,\quad a_3=OA_3,\quad \cdots\cdots,\quad a_n=OA_n,\quad \cdots\cdots$$

以定 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 點. 則此一列之點乃表數列 (a_n).*

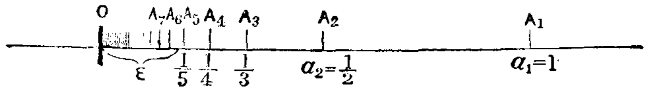
例 (1). 與 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 之規則,則

$$a_1=\frac{1}{1},\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{1}{3},\quad \cdots\cdots,\quad a_n=\frac{1}{n},\quad \cdots\cdots$$

即得 $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots\right)$ 之數列.

---

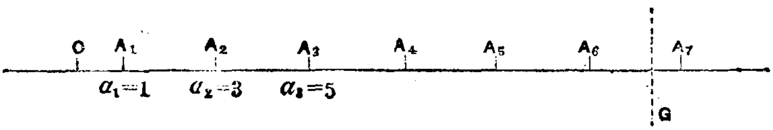
*凡幾何學的量如直線之長等,及數之關係之研究,因在本章範圍以外,故不與以充分之說明.



今設 n 逐漸增大,則 $\frac{1}{n}$ 漸次減小. 例如 n 大於 100, 則 $\frac{1}{n}<0.01$, 又如 $n>10000$, 則 $\frac{1}{n}<0.0001$. 故設 ϵ 雖爲任何小之正數,然取 n 爲十分大時,亦能得 $\frac{1}{n}<\epsilon$, 是以由 $n>\frac{1}{\epsilon}$ 而能得 n 之值. 再申言之,卽使 $\frac{1}{\epsilon}$ 之整數部爲 $m-1$, 因 $m-1\leqq\frac{1}{\epsilon}<m$, 故取 n 爲大於 m 之正整數,而能確定 $\frac{1}{n}<\epsilon$.

卽 ϵ 爲所與任何小之正數, m 爲選得與之相當之正整數,取添數 n 大於 m, 則 $a_n=\frac{1}{n}$ 及 0 之差得小於 ϵ.

例 (2). 凡奇數 1, 3, 5, 7, 9, …, 乃從 $a_n=2n-1$ 之規則而成之數列. 於此種情形,其 n 增加, $2n-1$ 亦因之增加. 今取 G 爲任何大之正數,而取整數 $n>\frac{G+1}{2}$, 則 $2n-1>G$, 卽 $a_n>G$.



再申言之, G 雖爲任何大之正數,當 m 爲 $\frac{G+1}{2}$ 之整數部時,則取添數 n 大於 m, 而 a_n 尙得大於 G.

定義. ϵ 雖爲任何小之正數,而所得與之相應之正整數爲 m, 若對大於 m 之任何値 n 而得

$$l-\epsilon<a_n<l+\epsilon.$$

則數列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ 之極限爲 l.

若以 $|x|$ 表 x 之絕對值,則［對於大於 m 之任何值 n, 而得 $l-\epsilon<a_n<l+\epsilon$］之意,可以

$$|l-a_n|<\epsilon, \qquad l>m$$

表之,或書爲

$$\lim_{n=\infty} a_n=l, \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} a_n=l.$$

更略之,可書爲

$$\lim a_n=l, \quad 及 \quad a_n\to l.$$

定義. G 雖爲任何大之正數,而所得與之相應之正整數爲 m, 若對大於 m 之任何值 n 而得

$$a_n>G, \qquad n>m.$$

則數列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ 謂之有無限極限.

可書爲 $\lim_{n=\infty} a_n=\infty$, 或 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.

以同樣之意旨,而有 $\lim_{n=\infty} a_n=-\infty$, 故對此則前者當區別之,而書爲 $\lim_{n=\infty} a_n=+\infty$.

定義. 若數列有極限 l, 則此數列謂之收斂,謂爲傾向於極限 l, 謂爲收斂於 l. 若數列有無限極限,則此數列謂之發散,謂爲發散於 $+\infty$, 或 $-\infty$. 凡數列收斂或發散,則於廣義的謂之極限存在.

於前例 (1) $\qquad a_n=\frac{1}{n}, \qquad \lim_{n=\infty} a_n=0,$

卽數列 $\left(\frac{1}{n}\right)$ 收斂於零.

又於例 (2) $\qquad a_n=2n-1, \quad \lim_{n=\infty} a_n=+\infty,$

卽數列 $(2n-1)$ 發散於 $+\infty$.

定義. 若數列旣不收斂於 l, 又不發散於 $+\infty$ 或 $-\infty$, 卽於廣義的極限不存在時, 此數列謂之**振動**.

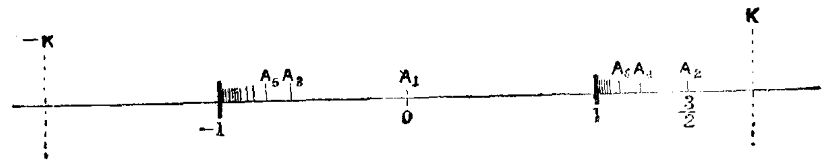
數列 (a_n) 爲振動, 而選得適當之正數 K, 若對於任何值 n 而得 $|a_n|<K$ 時, 則此數列謂之**有限的振動**. 若對於 n 之任何值而不得 $|a_n|<K$, 則此數列謂之**無限的振動**.

一數在二定數之間, 則此數謂之有限數列, 爲收斂或有限的振動, 則此數列謂之**得止於有限之值**.

例 (3). 設 $a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$, 則

$$a_1=-1+1, \quad a_2=1+\frac{1}{2}, \quad a_3=-1+\frac{1}{3}, \quad a_4=1+\frac{1}{4},$$

$$a_5=-1+\frac{1}{5}, \quad a_6=1+\frac{1}{6}, \quad \cdots\cdots$$



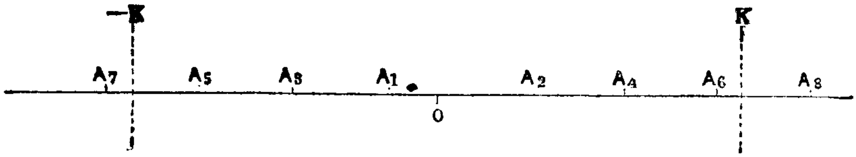
故 n 增加, 則 a_n 因 n 爲奇數而近於 -1, n 爲偶數而近於 $+1$, 卽 (a_n) 不能收斂於一定之極限, 然 a_n 無論 n 值如何, 皆在 -1 與 $\frac{3}{2}$ 之間, 故不能發散於 $+\infty$ 或 $-\infty$. 是以此數列爲

振動，然因其對於 n 之任何值而得 $|a_n|\leqq\frac{3}{2}$，故得取 K 爲大於 $\frac{3}{2}$ 之值，則對於 n 之任何值而得 $|a_n|$ 小於 K，是以此數列爲有限的振動．

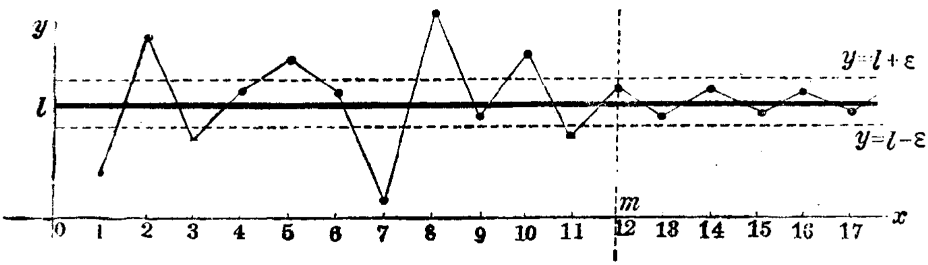
例 (4). 設 $a_n=(-1)^n n$，則

$$a_1=-1,\quad a_2=+2,\quad a_3=-3,\quad a_4=+4,$$
$$a_5=-5,\quad a_6=+6,\quad \cdots\cdots$$

故 n 增加，則 a_n 因 n 之爲奇數而爲負數，因 n 爲偶數而爲正數，然其絕對值得大於任何正數 K，是以此數列爲無限的振動．

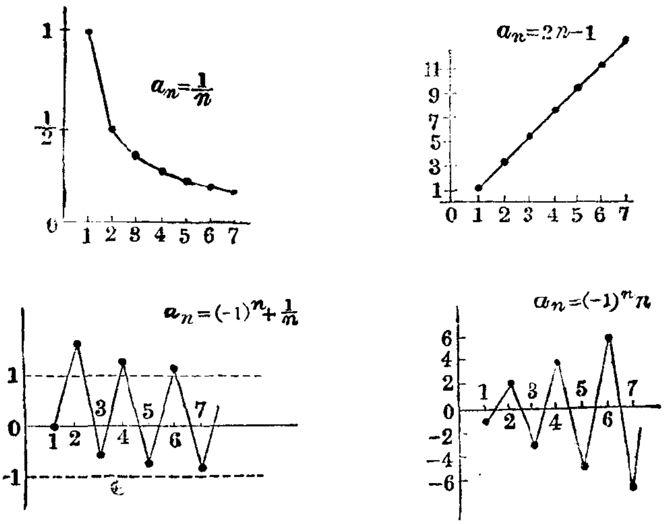


吾人倘欲明瞭數列之收斂，發散，及振動之現象，則 Ox，Oy



爲直交軸，於 x 軸上計 n，y 軸上計 a_n，則數列卽以此一列之點表之，而此等點順次聯接之，則得一折線，若數列收斂於 l，而 n 大於 m 時，其諸列點悉在 $y=l+\epsilon$ 及 $y=l-\epsilon$ 二直線之間，卽夾在 2ϵ 廣之一雙平行線間，若數列發散於 $+\infty$，則

當 n 大於 m 時, 其列點均在直線 $y=G$ 之上部, 又發散於 $-\infty$ 亦同樣.



上四圖乃表前所舉之四例.

§2. 關於數列極限之注意.

I. 於前節之定義, $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ 之 $n=\infty$ 者, 乃謂 [m 雖得爲任何大, 而 n 尙得大於任何大之正整數] 之意, 卽 $n=\infty$ 者, 乃 [n 爲大於任何大之整數] 之略詞也, 非謂有確定之 ∞ 整數存在.

同樣 $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\infty$ 者, 乃謂 [G 雖得爲任何大之正數, 然 a_n 對於 n 大於 m 之任何值, 尙得大於 G] 之意, 卽 [$a_n(n>m)$ 爲大於任何大正數之數] 之意, 而以略詞 $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\infty$ 表之, 非謂有確定之 ∞ 正數存在也. $\lim\limits_{n=\infty} a_n=-\infty$ 之意亦同.

II. 數列 (a_n) 之收斂於 l，乃對於大於 m 之任何值 n 而得 $|l-a_n|<\epsilon$，非僅對於大於 m 之數個值 n，或從某規則對於整數數列而得 $|l-a_n|<\epsilon$ 也．發散及振動之情形亦同．

例如數列 (a_n)，當 n 爲 100 之倍數時，$a_n=n$，n 非 100 之倍數時，$a_n=\frac{1}{n}$，則 n 爲 100 之倍數而爲十分大時，$a_n>G$．但 $\lim\limits_{n=\infty} a_n \neq \infty$，此因 n 非 100 之倍數，則不能得 $a_n>G$ 故也．同樣，n 非 100 之倍數而爲十分大時，a_n 雖得小於 ϵ，然不能得 $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$.

又如前節例 (3)，$a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$，則數列 $(a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2k-1}, \cdots)$ 收斂於 -1，此因 $a_{2k-1}=(-1)^{2k-1}+\frac{1}{2k-1}=-1+\frac{1}{2k-1}$.

則
$$a_{2k-1}-(-1)=\frac{1}{2k-1}.$$

是以
$$\lim_{k=\infty}[a_{2k-1}-(-1)]=\lim_{k=\infty}\frac{1}{2k-1}=0.$$

又數列 $(a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2k}, \cdots)$ 收斂於 $+1$，此因 $a_{2k}=1+\frac{1}{2k}$.

則
$$\lim_{k=\infty}[a_{2k}-1]=\lim_{k=\infty}\frac{1}{2k}=0.$$

然數列 $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots)$ 決非收斂．

III. 一數列 a_n 不能同時收斂於相異之極限 l 及 l'，此因同時若
$$\lim_{n=\infty} a_n=l, \qquad \lim_{n=\infty} a_n=l'.$$

則 ϵ 雖爲任何小正數，亦同時能得

$$|a_n-l|<\frac{1}{2}\epsilon, \qquad n>m,$$

$$|a_n-l'|<\frac{1}{2}\epsilon, \qquad n>m,$$

其 m 必存在. 然因

$$l'-l=(a_n-l)-(a_n-l').$$

故 $$|l'-l|\leqq|a_n-l|+|a_n-l'|.$$

由是知同時不能得

$$|a_n-l|<\frac{1}{2}|l'-l|,$$

$$|a_n-l'|<\frac{1}{2}|l'-l|.$$

故 $l'-l$ 不得不為零.

IV. $\lim\limits_{n=\infty} a_n=l$ 時, 即 $|l-a_n|<\epsilon,\quad n>m.$

設 p 為任意之正整數, 則 $n+p>m.$

故 $|l-a_{n+p}|<\epsilon$, 因而 $\lim\limits_{n=\infty} a_{n+p}=l.$

即數列 (a_n) 收斂於 l 時, 數列 (a_{n+p}) 亦收斂於 l.

數列非收斂時亦同.

V. 數列之極限, 不定為數列內之數.

例如 $a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=0,\ a_4=0,\ \cdots,\ a_n=0,\ \cdots$, 則 $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0.$ 此極限 0 乃為數列內之數, 又如 $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n},\ \cdots$, 則 $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$, 此極限零乃非數列內之數. 何則, 因與 n 以任何值, 其 $\frac{1}{n}$ 決不能等于 0 也.

注意 I 亦即注意 V 之特例,蓋數列之極限可得 ∞, 然 ∞ 決非數列中所取得之值.

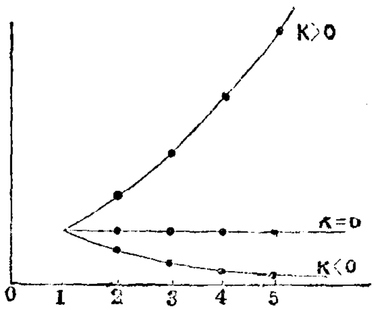
又如於 $a_n=\frac{1}{n}sin\frac{n}{2}\pi$ 之數列 (a_n), 因 $|sin\frac{n}{2}\pi|\leqq 1$, 故 $\lim\limits_{n=\infty}\frac{1}{n}sin\frac{n}{2}\pi=0$. 然 n 爲偶數時, $sin\frac{n}{2}\pi=0$. n 爲奇數時, $sin\frac{n}{2}\pi=+1$ 或 -1. 故上數列之極限 0, 當 n 爲偶數時, 乃爲數列內之值. n 爲奇數時, 則爲非數列內之值.

VI. 由注意 V 知正數項之數列, 其極限不定爲正數, 有時得爲零, 如 $a_n=\frac{1}{n}$ 卽其一例也, 但決不能爲負數, 因 a_n 旣大於零, $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 若設 $\lim\limits_{n=\infty}a_n=-l$, $l>0$. 則 ϵ 雖爲任何小之正數, 亦能得 $a_n+l<\epsilon$, $n>m$. 是與假定不合矣.

故 $a_n>0$, $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 則 $\lim\limits_{n=\infty}a_n\geqq 0$.

VII. $\lim\limits_{n=\infty}a_n=l$, 又 A 爲常數, ϵ 爲與 l 及 A 無關係任何小之正數, 若 $\lim\limits_{n=\infty}a_n<A+\epsilon$, $n>m$ 時, 則 $\lim\limits_{n=\infty}a_n\leqq A$.

此因 $\lim\limits_{n=\infty}a_n=l>A$, 則 $O<l-A<\epsilon$, 當 m 爲任何大而與之相應之 ϵ 得爲任何小, 然決不能小於一定之正數, 故 $l\leqq A$.



§3. 例題.

例 (1). 設 $a_n=n^k$, 但 k 爲正或負之有理數.

(i) 若 $k>0$, 則 G 雖爲任何

大之數，亦能得 $n^k>G$，卽 n 得比 $\sqrt[k]{G}$ 大，故 $\lim\limits_{n=\infty} a_n=+\infty$，$(k>0)$.

(ii) 若 $k<0$，則設 $k=-k'$，而 $k'>0$，由 (i) 知 $n^{k'}>G$，卽 $n^k<\frac{1}{G}$，然 $\frac{1}{G}$ 爲任何小之正數，卽 $n^k<\epsilon$，故

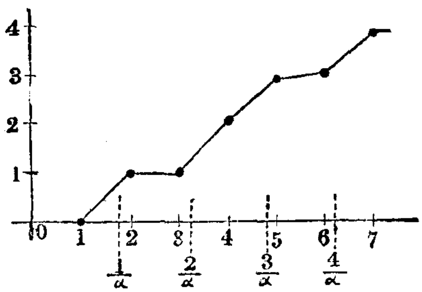
$$\lim_{n=\infty} n^k=0, \qquad (k<0).$$

(iii) 若 $k=0$，則無論 n 爲何數，均得 $n^k=1$，故

$$\lim_{n=\infty} n^k=1, \qquad (k=0).$$

例 (2). 設 $[a]$ 表不大於正數或負數 a 之最近整數，而 a 爲任意之正數，求數列 $([a][2a],[3a],\cdots,[na],\cdots)$ 之極限.

設 $0\leqq n<\frac{1}{a}$，則 $0\leqq an<1$，故 $[na]=0$，卽 $0\leqq n<\frac{1}{a}$ 時，$a_n=0$，又 $\frac{1}{a}\leqq n<\frac{2}{a}$，則 $1\leqq an<2$，故 $[an]=1$，卽 $a_n=1$，同樣 $\frac{2}{a}\leqq n<\frac{3}{a}$，則 $a_n=2$，$\frac{3}{a}\leqq n<\frac{4}{a}$，則 $a_n=3$，……



故
$$\lim_{n=\infty} a_n=+\infty.$$

玆作 $a=\frac{1}{1.53}$ 之圖於右，至於 $a\leqq 0$ 之情形，讀者可自推之.

例 (3). 試證明 $a_n=n^2+(-1)^n n$ 發散於 $+\infty$.

因 $a_n=n^2+(-1)^n n\geqq n^2-n=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，故 a_n，因 n 增加而