高等代数

金向新　马承麟
何凤兰　金慧芳　编著

北京科学技术出版社

高 等 代 数

金向新　马承麟
何风兰　金慧芳　编

北京科学技术出版社

内 容 简 介

本书内容包括两部分：多项式理论与线性代数．多项式理论以一元多项式的因子分解唯一性定理为主体，介绍有关多项式与方程的最必要的知识；线性代数则主要介绍两种矩阵的等价关系：矩阵的相似与矩阵的合同．对于线性代数，本书沿用常用的方法，即以引进线性空间着手进行叙述，主要内容是线性空间、线性变换、矩阵的标准型及二次型等．

本书可作为高等院校数学专业的教科书，也可作为学生的参考书．

（京）新登字207号

高 等 代 数

金向新　马承麟
何凤兰　金慧芳　编

*

北京科学技术出版社出版
（北京西直门南顺城街12号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　13.875印张　310千字
1991年12月第一版　1991年12月第一次印刷
印数1—2500册

ISBN7-5304-0909-3/G·24　定价：5.70元

前　言

在高等代数的大部分教材中，主要讲述两方面内容：一是多项式理论，一是线性代数，且后者占绝大部分篇幅。本书是编者在多年教学实践的基础上编写的。线性代数中的很多概念，如向量空间，子空间和线性变换等，都是初学者不易理解的，编者尽量以通俗的语言，并结合自己的体会讲解这些内容.线性代数处理问题的方法与解析几何有些类似,所以在讲述线性代数内容时，尽量体现这一观点。另外，在不影响书中的系统的同时，尽量精简内容。行列式的概念我们采用的是归纳法定义，这不但叙述简捷，且能反映行列式概念的来龙去脉，因而能加深对概念的理解。

本书基本按现行高等代数教学大纲的要求编写，内容浅显，并配有一定数量的习题，可做为师范院校数学专业的教学参考书，也可作为教材。由于水平所限，定有不当之处，请广大读者提出批评指正。本书初稿经过北京工业大学史明仁先生审阅，在这里表示感谢。

编　者

1990年6月30日于哈尔滨

目　　录

第一章 预备知识

高等代数是大学数学系的基础课程。它不但与中学的代数和解析几何联系很密切，并且它又是这些课程的继续和提高。从内容上来说，比以前抽象了，但更深刻了，这主要表现在观点和方法上。

我们先介绍在本课程中常用的概念和方法。这些概念和方法对于今后的学习是必需的。

§1 集　　合

在我们日常的生活中，常常见到若干个确定事物的全体。就像，一班学生，一筐苹果等等。这里，“一班”、“一筐”等都表示一定事物的整体，我们称它们为集合或集。组成集合的东西叫做这个集合的元素。

我们常用大写拉丁字母 A, B, C，……表示集合，而用小写拉丁字母a, b, c，……表示集合中的元素。

如果a是集合A的元素，就称a属于A，记作$a \in A$；或者说A包含a，记作$A \ni a$。如果a不是集合A的元素，就称a不属于A，记作$a \notin A$，或者说A不包含a，记作$A \not\ni a$。

集合的分类是从集合中所含元素的多少来划分。如果一个集合只含有限个元素，就叫做有限集合。如果一个集合是由无限多个元素组成的，就叫做无限集合。

例如　$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$是$m$个元素的有限集合；而

自然数的集合$B=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$是无限集合。

为了讨论问题的需要，我们约定，不含任何元素的集合叫做空集合，记作ϕ。

集合的比较：设A,B是两个集合，如果A的每一元素都是B的元素，那么就说A是B的子集。记作$A\subseteq B$，或者$B\supseteq A$。我们约定空集合为任意集合的子集合，集合A总是它自身的子集合。如果集合A为集合B的子集，而至少有一个B的元素不属于A，则称A为B的真子集，记作$A\subset B$。

如果集合A与B是由完全相同元素组成的，就说A与B相等。记作$A=B$

集合的运算：设A,B是两个集合，由A的一切元素和B的一切元素所组成的集合叫做A与B的并，记作$A\cup B$。

例如。$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4\}$$

由集合A与B的公共元素所组成的集合叫做A与B的交。记作$A\cap B$。

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则

$$A\cap B=\{2,3,4\}$$

两种运算之间的联系：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C$。

证 设$x\in A\cap(B\cup C)$，那么$x\in A$且$x\in B\cup C$，于是$x\in A$，且x至少属于B与C中之一。若$x\in B$，那么因为$x\in A$，所以$x\in A\cap B$；同样，若$x\in C$，则$x\in A\cap C$。不论哪一种情形都有$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$。所以

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

反之，若$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，那么$x\in A\cap B$或者

$x\in A\cap C$. 但$B\subseteq B\cup C$,$C\subseteq B\cup C$，所以不论哪一种情形都有$x\in A\cap(B\cup C)$，所以

$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$ 故 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

两集合的并与交的概念可以推广到任意n个集上去。

给了两个集合A和B，除了上面所定义的交集和并集以外，我们有时还要用到以下两个概念

设A,B是两个集合。令

$$A-B=\{x\mid x\in A但x\notin B\}$$

也就是说，$A-B$是由一切属于A，但不属于B的元素所组成的，称为B在A中的余集，或者称为A与B的差。

注意，竖线将括号分为两部分，表示左边的元素是一切满足右边所指性质的元素。

例如 $R-Q$,其中R表示全体实数所形成的集合,Q表示全体有理数集合.那么$R-Q$就是一切无理数所组成的集合。

例如 $Q-C=\phi$，其中C是全体复数集合。

最后介绍两个集合的积的概念。

设A,B是两个集合，令

$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$称为$A$与$B$的积。

$A\times B$是由一切元素对(a,b)所成的集合，其中第一个位置的元素a取自A，第二个位置的元素b取自B。

两个集合的积对我们来说并不是什么新的东西。例如，取定一个坐标系以后,平面上的点的坐标是一对实数(a,b) 。平面上所有点的坐标的集合就是一切实数集合R与R的积：

$$R\times R=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$$

§2 映　射

映射也是近代数学中最基本的概念。在这一节里，我们将讨论这个概念和它的一些简单性质。

定义 1　设A, B是两个非空集合，A到B的一个映射指的是一个对应法则，通过这个法则，对于集合A中每一个元素x，有集合B中一个唯一确定的元素y与它对应。

我们用字母$f, g, \cdots$表示映射，用记号“$f: A \to B$”表示是A到B的一个映射。

如果通过映射f，与A中元素x对应的B中元素是y，那么就写作

$$f: x \longmapsto y$$

这时y叫做元素x在f之下的象，记作$f(x)$。元素x叫做元素y在f之下的一个原象。

例 1　设$A = \{a, b, c\}$，$B = \{0, 2, 4\}$。

$$f: a \longmapsto 0, b \longmapsto 2, c \longmapsto 2$$

是A到B的一个映射。

例 2　设A是一切非负实数的集合，B是一切实数的集合。对于每一$x \in A$，令$f(x) = \pm\sqrt{x}$与它对应。则f不是A到B的映射，因为当$x > 0$时，$f(x)$不能由x唯一确定。

例 3　设集合$A = B$是一切自然数所成之集合。

$$f: n \longmapsto n - 1$$

不是A到B的映射，因为$f(1) = 1 - 1 = 0 \notin B$，即$A$中的元素1在$f$之下没有象。

例 4　设$A = B$是一切整数所成之集合。

$$f: n \longmapsto n+1$$

是A到B的一个映射。

例 5 令R是一切实数的集合，B是一切非负实数的集合。对于每一$x\in R$，令$f(x)=x^2$与它对应；$f: x \longmapsto x^2$，那么f是R到B的一个映射。

例 6 设A是任意一个集合，对于每一个$x\in A$，令$f(x)=x$与它对应：

$$f: x \longmapsto x$$

这自然是A到A的一个映射。这个映射称为集合A的恒等映射或单位映射，映射这个概念对我们来说并不陌生，它就是我们所熟悉的函数概念的推广，映射就是定义在A上取值在B内的函数。

对于映射概念，经过以上举例我们对定义有一些了解，现在再说明一下关于A到B的映射应该注意以下几点：

1）A与B可以是相同的集合，也可以是不相同的集合。

2）对于A的每一个元素x，需要有B中一个唯一确定的元素与它对应。

3）一般说来，B的元素不一定都是A中元素的象。

4）A中不同的元素的象可能相同。

映射的相等定义：设$f: A\longrightarrow B$，$g: A\longrightarrow B$都是A到B的映射。如果对于每一个$x\in A$，都有$f(x)=g(x)$，那么就说映射f与g是相等的。记作$f=g$

映射的几种类型．设$f: A\longrightarrow B$是一个映射．对于$x\in A$，x的象$f(x)\in B$．一切这样的象作成B一个子集，用$f(A)$表示：

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

叫做A在f之下的象，或者叫做映射f的象。

例如，在例 4 中$f(A)=B$。

定义 2 设f是A到B的一个映射. 如果$f(A)=B$,那么就说f是A到B上的一个满映射(简称满射)。

例 4 和例 5 及例 6 都是满射，但例 1 不是满射。

定义 3 设$f:A\longrightarrow B$是一个映射.如果对于A中任意两个元素x_1和x_2，只要$x_1\neq x_2$，就有$f(x_1)\neq f(x_2)$，那么就称f是A到B的一个单映射(简称单射)。

例 4 和例 6 是单射，但例 1 不是单射。

定义 4 设$f:A\longrightarrow B$是一个映射.如果f既是满射,又是单射，那么就称f是A到B的一个双射(也叫做一一映射)。

例 4 和例 6 是双射，例 1 和例 5 不是双射。

设f是A到B的双射，我们规定记作f^{-1}的法则如下：

$f^{-1}:b\longrightarrow a$,若 $b=f(a)$

因为f为A到B的一个满射，所以B中每一元素b均有原象。又因为f为A到B的单射，所以B中每一元素b只有一个原象a，因此，上述规定的法则f^{-1}为B到A的一个映射。

定义 5 上面的映射f^{-1}称为双射f的逆映射。

下面证明：f^{-1}为B到A的双射。首先证明，f^{-1}为B到A的单射，即要证明，任意$a',b'\in B$，若$a'\neq b'$，则$f^{-1}(a')\neq f^{-1}(b')$。由$f^{-1}$定义：

对$a'\in B$，有$f^{-1}:a'\longrightarrow a$,其中$a'=f(a)$,同样

对$b'\in B$，有$f^{-1}:b'\longrightarrow b$，其中$b'=f(b)$

若$f^{-1}(a')=f^{-1}(b')$,则$a=b$，进而$f(a)=f(b)$

所以$a'=b'$与原设相矛盾。

其次证：f^{-1}为B到A的满射，即要证明，任意$a\in A$，则有$a'\in B$。使$a'=f(a)$

$\therefore f^{-1}: a' \longrightarrow a$，其中 $a'=f(a)$

即任意$a\in A$，存在$a'\in B$，使$f^{-1}(a')=a$，所以f^{-1}为满射，从而f^{-1}为B到A的双射。

映射的运算：设f：$A\longrightarrow B$是A到B的一个映射，而$g: B\longrightarrow C$是B到C的一个映射。因此，对于每一$x\in A$，就有C中唯一确定的元素 $g(f(x))$与它对应，这样就得到 A 到C 的一个映射，这个映射是映射$f: A\longrightarrow B$和$g: B\longrightarrow C$所决定的，称为f与g的合成。记作：$g\circ f$。于是我们有

$g\circ f: A\longrightarrow C$；$(g\circ f)(x)=g(f(x))$，对一切 $x\in A$。

例 7 设 $A=\{1,2,3\}$

$$f: A\longrightarrow A; 1 \longmapsto 2, 2 \longmapsto 3, 3 \longmapsto 1.$$

$$g: A\longrightarrow A; 1 \longmapsto 3, 2 \longmapsto 1, 3 \longmapsto 2.$$

那么： $g\circ f: A\longrightarrow A; 1 \longrightarrow 1, 2 \longmapsto 2, 3 \longmapsto 3.$

例 8 设

$$f: R\longrightarrow R(R\text{全体实数}); x \longmapsto x^2.$$

$$g: R\longrightarrow R; x\longrightarrow \sin x.$$

那么 $g\circ f: A\longrightarrow A; x \longmapsto \sin x^2.$

映射的合成也不是什么新的概念，它是复合函数概念的推广。

上面定义的映射的合成运算满足结合律。设给定映射

$$f: A\longrightarrow B, g: B\longrightarrow C, h: C\longrightarrow D.$$

那么合成映射$h\circ(g\circ f)$与$(h\circ g)\circ f$都是A到D的映射。并且

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

这是因为，对于 A 的任意元素 x，

$$h\circ(g\circ f)(x)=h(g\circ f(x))=h(g(f(x)))$$

$$(h\circ g)\circ f(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$$

所以$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ 成立。
最后我们指出一种很重要的映射。

我们常说，整数的加法是整数的一个"代数运算"。这句话的意思是说，对于任意一对整数(a,b)，有唯一确定的整数$a+b$与它们对应。用映射的语言来说，整数的加法实际上是一个映射。

$$Z\times Z\longrightarrow Z$$

在这个映射之下，对于$(a,b)\in Z\times Z$，

$$(a,b)\longmapsto a+b$$

同样的道理，例如实数的乘法也是一个映射

$$R\times R\longrightarrow R;(a,b)\longmapsto ab$$

一般，设A是一个非空集合。我们把$A\times A$到A的一个映射叫做集合A的一个代数运算。

§3 数学归纳法（完全归纳法）

数学归纳法又称为完全归纳法，它的理论根据就是归纳公理。具体过程是：

1）证明当$n=n_0$时（n_0为命题成立的第一个自然数），这个性质是正确的；

2）假设当$n=m$（其中$m>n_0$）时，这个性质是正确的，而来证明$n=m+1$的时候，这个论断的成立。

下边我们来讨论数学归纳法的几个问题，第一个步骤是递推的基础，第二个步骤是递推的依据，缺少任一步骤都可得出错误的结论。

例如，函数$f(x)=(x^2-5x+5)^2$

当$x=1$时，$f(1)=(1^2-5\times1+5)^2=1$

当$x=2$时，$f(2)=(2^2-5\times2+5)^2=1$

当$x=3$时，$f(3)=(3^2-5\times3+5)^2=1$

如果我们由此就归纳出：x是任何自然数时，$f(x)$的值都是1的结论，那就错了，因为当$x=5$时，$f(5)=(5^2-5\times5+5)^2=25$，而不等于1，这是由于只验证了第一条而缺了第二条，有时就得出错误的结论。同样，如果缺了第一条，而只推导第二条，有时也会得出荒谬的结论。

例如，证明 $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+1$

假设当$n=k$时等式成立，也就是

$$2+4+6+\cdots+2k=k^2+k+1$$

那么当$n=k+1$时， 就有

$$(2+4+\cdots+2k)+2(k+1)$$
$$=k^2+k+1+2(k+1)=(k+1)^2+(k+1)+1$$

即$n=k+1$时上式也成立，这就推出第二个条件了。如果这时我们就得出n为任何自然数时，上式都成立，那就错了，因为当$n=1$时，上式的左端等于2，而右端等于3。为什么会这样呢？是由于缺第一步骤，即没有基础，故不能说等式对全体自然数成立。

下边我们研究第二个问题，在用数学归纳证明一些问题时，看到有许多奇异新颖的等式(当然用数学归纳法证明时是很容易的)，引起我们的思考，这类题是怎样构造的?，下面我们就来探讨这个问题，首先看下列各等式：

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=S_n$$
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}=S_{n-1}$$
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}=S_{n-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_1+a_2+a_3=S_3$$

$$a_1+a_2=S_2$$

$$a_1=S_1$$

由于$S_n-S_{n-1}=a_n, S_{n-1}-S_{n-2}=a_{n-1}, S_{n-2}-S_{n-3}=a_{n-2}, \cdots, S_3-S_2=a_3, S_2-S_1=a_2, S_1=a_1$。这样就启发我们怎样来构思用数学归纳法证明的问题。

先任意写出一个$S_n=\dfrac{n}{2n+1}$，由此得出$S_{n-1}=\dfrac{n-1}{2(n-1)+1}$，所以$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n-1}{2(n-1)+1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，这就是通项公式，从而得出：

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

再举一个例子，取$S_n=\dfrac{n^2-2}{2}$，则$S_{n-1}=\dfrac{(n-1)_2-2}{2}$，所以$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n^2-2}{2}-\dfrac{(n-1)^2-2}{2}=\dfrac{2n-1}{2}$，由这个通项公式就得出：

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{2n-1}{2}=\frac{n^2-2}{2}.$$

我们构造的这个式子并不成立，当$n=1$时，左端等于$\dfrac{1}{2}$，而右端等于$-\dfrac{1}{2}$，出现这种毛病的原因，是来自于通项公式。因为$a_n=S_n-S_{n-1}$，所以

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{2n-1}{2}=(S_1-S_0)+(S_2-S_1)+(S_3$$