数表矩陣在測量計算中的应用

〔苏联〕H·И·莫德林斯基著

汪鴻生　胡国理　杜烽光譯

中国工业出版社

译 者 的 話

本书系根据苏联测绘书籍出版社 1959 年出版的“Применение Краковянов в геодезических вычислениях”一书譯出，原书作者是莫德林斯基（Н.И.Модринский）。俄文：“Краковян”，系来自波兰文：“Krakowiany”，我們譯为“克拉科夫揚”。克拉科夫揚为数表矩陣的一种，它首先被波兰天文学家 T.巴拿海維奇（Banachiewicz T. 1882—1954 年）創立，并运用到最小二乘法及測量計算中。为了与其他矩陣区别，巴拿海維奇以其工作所在地——克拉科夫（Krakow）城予以命名。这样，克拉科夫揚就成了这种矩陣的专用名詞，并广泛地为世界各国公認而运用。为了使讀者对本书內容能一目了然，故我們把本书的书名譯为：“数表矩陣在測量計算中的应用”，这里的数表矩陣即指克拉科夫揚而言，但在本书內都采用“克拉科夫揚”这一譯名，以不失原作之精神。

本书第二次重印之际，根据讀者意見，在附录一中，对根号內数字个数的奇偶作了进一步的注释；并根据实际經驗，編写了“用逐次除法求精确的平方根”，作为附录二載于书后，以供讀者参考。

鉴于譯者水平有限，錯誤与不妥之处在所难免，希讀者提出意見和批評，以便提高。

譯 者

1964.4.

中 文 版 序

“数表矩陣（克拉科夫揚）在測量計算中的应用”一书能用中文出版，我感到很荣幸。該书与1959年的俄文版比較有如下几处較大的修改：在§3中指出了克拉科夫揚按“行乘行”規則相乘的次序；在§15中进一步闡明了克拉科夫揚根法解綫性方程的所属权問題；在§23中补述了Ю. 米列夫基斯提出簡化普兰尼斯-普兰涅維奇多組平差法的建議。

此外，还对1959年版中存在的一些細小的不确之处及誤刊进行了修正。其中一部份系由汪鴻生同志很仔細閱讀本书后提出的，对此表示衷心地感謝。

1962年3月

原　　序

从十八世紀起，在計算工作中数表-数組的运算开始发生很大作用。由于在运算中，用普通代数符号来表記非常笨拙，因此萊布尼茨(Leibniz G.)于1693年和克兰姆(Cramer G.)于1750年都独立地創造了行列式，而在十九世紀中叶凱利(Cayley)奠定了矩陣理論的基础。

在今天由于越来越广泛地应用計算机械，所以数表的运算有着特别重要的意义。我們是矩陣理論发展及其应用在各种数理和技术科学中的見証人。

矩陣的另一支形即是所謂的克拉科夫揚❶，它是波兰天文学家塔代烏史·巴拿海維奇(Banachiewicz T. 1882—1954)所提出的。克拉科夫揚比凱利矩陣有較簡单的相乘規則：即在凱利矩陣中第一因子的行与第二因子的列相乘，而在克拉科夫揚中两因子的列（或行）相乘。同时在克拉科夫揚的运算中还可进行象除法及开平方等的运算，而在凱利矩陣里就沒有。

T. 巴拿海維奇曾指出："克拉科夫揚的出发点（1916年）是为了解决理論天文学中有关坐标多次换算的难题。由于克拉科夫揚的产生，使这些問题的解算变得比較簡单了。"（[11]，26頁）❷。

由于克拉科夫揚产生的原因，就預定了它在天文学上的应用，当然这只是应用它的一个方向。

自1923年起在波兰科学院学报和克拉科夫天文台通报上所发

---

❶ 名詞克拉科夫揚（Krakowiany）（俄文譯音为"Краковяны"而不是象某些作者誤写为"Краковианы"）是巴拿海維奇給他矩陣的命名，是为了紀念他工作所在地克拉科夫(Краков)城。自1919年起至逝世为止，他一直在該城工作。

❷ 方括号中的数字表示所用参考文献的編号，据此可在本书末尾所附的参考文献中找到。

表的巴拿海維奇作品中最出色的是：Les relations fondamentales de Polygonoméurie sphérique❶和 Voies nouvelles dans l'astronomie mathématique❷；这些文章中曾用克拉科夫揚推算了球面多边形的普遍公式，而其特殊情况为球面三角的所有公式。这些作品在世界文献中都得到了广泛地反映（奥地利、英国、比利时、德国、丹麦、意大利、西班牙、中国❸、苏联、美国、法国和南非）。这里按年代列举出在苏联书刊上曾經发表过的一些評述。

1931 年喀山天文学家 И. В. 别利考維奇（Белькович）曾写道："克拉科夫揚这种矩陣还是在不久以前才开始出現，因此很难对它作出最后的估价。但很明显，它在天文学上对某些問題的应用是很有利的。我相信在不久的将来它将会深入数学天文学的其他領域。"❹

1941 年 M.Φ.苏包金（Субботин）曾指出"把矩陣应用到計算工作中的功劳应属于T.巴拿海維奇，他建議把列与列相乘的矩陣叫做克拉科夫揚。"❺然后苏包金引用了計算太阳座标之巴拿海維奇的克拉科夫揚公式和决定其軌道位置的方向正弦之克拉科夫揚公式。

1949年 H. C. 沙莫洛娃-亚恒道娃（H. C. Самойлова-Яхонтова）❻在分析各种改正軌道的方法后，得出結論說，最好的是巴拿海維奇提出的那种克拉科夫揚形式。

---

❶ Circ. Obs. Cracovie, 25, 1927。

❷ Bull. Acad. Pol., 1927。

❸ 据了解 1936 年在中国上海徐家汇的"Bulletin de l'Universite l'Aurore, Année scol"上曾載过E.維萊馬克（E.Villemarqué）的文章："Calcul numérique par la méthode des bandes mobiles"——譯者注。

❹ "矩陣-克拉科夫揚及其在天文学中的应用"，"天文学杂志"，1931 年第 8 期，第150—160頁。

❺ 天体力学教程，第一卷，国家技术出版社，列宁格勒—莫斯科1941年版，第86、87、93頁。

❻ 关于椭圓軌道元素的改善問題，"苏联科学院理論天文研究所学报"，1949 年卷Ⅳ，第 6 期，第255—264頁。

1951年 A.A.涅費捷夫(A.A.Нефедьев) 曾写道："……目前的問題在于处理月球天平动观测时，采用巴拿海維奇提出的所謂克拉科夫揚法。这种方法已被考捷尔(Koziel K.)在对星—Гартвиг的一系列观测处理中应用了。用这种方法来进行处理可以消去'亚考夫金效应'（Эффект Яковкина）对求物理天平动元素时的影响。因此……采用新方法对观测进行处理，在今后能更有效地解决这里所述的問題。" ❶

应用克拉科夫揚的第二方向是平差計算。在这方面正式应用是从1933年才开始，此时巴拿海維奇用德文发表了一篇有关克拉科夫揚在最小二乘法中应用的文章（[6],393—404頁）。在該文中巴拿海維奇証明了解綫性方程組即等于将其未知数系数的克拉科夫揚分解成两个正則克拉科夫揚（参看§14）。1938年巴拿海維奇又发表了一篇用未知数系数克拉科夫揚开（正則）平方法解法方程組的文章，在这以后克拉科夫揚在平差計算中才得到了广泛的应用。波兰著名大地測量学家K.溫格尔（Wejgel K.）的說法，可以証实这一点，他說：在1938年4月巴拿海維奇发表了克拉科夫揚平方根法以后，他才决定把解法方程的克拉科夫揚法列入其所編的大地測量学教科书內，因为"法方程所含的未知数越多，該法越有利"（[66]445頁）。

1939到1957年間，在許多国家（英国、比利时、德国、意大利、中国、苏联、美国、捷克斯洛伐克、法国、瑞士、瑞典、南斯拉夫、日本）曾发表了一系列有关在平差計算中应用克拉科夫揚的文章。其中有一些材料已經編入某些大地測量学及数学教科书中。

在苏联的文献里有关在平差計算中应用克拉科夫揚的文章計有：H.A.烏尔馬耶夫([62]14—16頁)、Ю.Г米列夫斯基❷([48]2—63頁）和С.Г.馬考維尔（[45]434—435頁）。由烏尔馬耶夫

---

❶ 月球的物理天平动."国立喀山大学B.П.恩格利加尔特天文台通报" 1951年第26期，第255頁。

❷ 譯文載于"測量制图譯报"1958年第2期——譯者注。

的文章中第15頁上可以看出，他只讀了巴拿海維奇的文章〔5〕，因此他在涉及克拉科夫揚时非常小心："巴拿海維奇矩陣——克拉科夫揚可能在实际运算中比較方便，但在理論推証时，它就多少要繁杂一些。因为"克拉科夫揚的'乘法既沒有交換律，也沒有結合律。"

关于这一点必須指出，H. A.烏尔馬耶夫所参考的、在1933年发表的巴拿海維奇的文章以后，克拉科夫揚运算法已經远远的前进了。这不但是巴拿海維奇本身的功劳，而且还有他的遵从者〔主要的，在波兰有S.郝斯布朗脫（Hausbrandt S.）和T.考赫曼斯基(Kochmański T.)；在比利时和法国有S.阿連德(Arend S.)和J.道滿泽（Dommanget J.)〕。可以說如在目前所有已知的解綫性方程組的方法中，克拉科夫揚根法是記数最少，而又最精确的解法，再加上用該法时，能非常巧妙地求得权系数。Ю. Г.米列夫斯基曾指出克拉科夫揚約化法較之高斯約化法有更大的优越性。С.Г.馬考維尔也指出应用克拉科夫揚乘法規則借凱利矩陣解法方程較为适宜。

当然不能認为克拉科夫揚运算法已經完整无缺了。可以看出T.巴拿海維奇不急于发表自己的一生的巨著"Rachunek krakowianowy"❶（克拉科夫揚运算法）一书幷非偶然。根据他的最亲密的同事K.考捷尔教授和K.考尔迪列夫斯基博士所了解的，巴拿海維奇至死为止一直在修改他的手稿。

本书的目的是使苏联讀者对克拉科夫揚运算法基础及其在測量和平差計算中的应用，能較全面地了解，当然在刊物上这是办不到的。

本书由两部份組成：第一篇講述克拉科夫揚运算法的基础至解算綫性方程为止；第二篇主要是談克拉科夫揚在平差計算中的应用。

作者在本书的叙述中尽量使那些对行列式初步理論及最小二

---

❶ 該书已于1959年在华沙出版。

乘法有所了解的讀者能独立地研究克拉科夫揚运算法，以便能解算一些比較普遍的問題。所以本书中基本問題的叙述都有实例說明，并在每章結束后附有自修用的习題。

用俄文写出克拉科夫揚运算法在測量和平差計算中应用的意見是莫斯科測绘工程学院測量教研室主任、技术科学博士 A. C. 契巴塔廖夫教授所提出的，并将这一課題列入他所領导的科学研究班的工作計划中，同时也热情地为本书作了审校。

为此，作者謹向 A.C.契巴塔廖夫教授表示衷心的感謝。

博士、工程师 C.瓦尔哈洛夫斯卡娅-凱特林斯卡娅教授；博士 Ю.維特考夫斯基教授；博士、工程师 S.郝斯布朗脫教授；博士、工程师 Cz.卡曼 (Kamela Cz)教授；博士、工程师 T.考赫曼斯基教授；博士K.考捷尔教授；博士、工程师 T.良扎林娅教授；博士、工程师 M.奥德良尼茨斯基-泡乔布特教授；博士K.考尔迪列夫斯基講师；碩士、工程师Г.别尔西乔涅克；碩士、工程师B.克劳泡秦斯基；碩士、工程师R.考洛諾夫斯基(Koronowski R.)；碩士、工程师W.謝尼松 (SenissonW.) 以及比利时烏克尔(Уккл)天文台的天文学家、博士、S.阿連德教授都表現了高度的热情，給本书作者提供許多有关克拉科夫揚运算法的最新資料，使本书的編写工作得到方便。作者謹向他們致以眞摯的謝忱。

用本书来紀念克拉科夫揚运算法的創造者 塔代烏史·巴拿海維奇。

H.莫德林斯基

1957 年 7 月莫斯科

原序补述：在本书手稿完成并經評閱后，工程师Γ.Ε.曼普里史維利（Γ. Ε.Мепуришвили）应测繪出版社之委托发表了以下文章：

1.关于在平差計算中应用凱利矩陣和巴拿海維奇矩陣（克拉科夫揚）的問題❶。

2.关于在矿山測量及大地測量控制网的平差中应用巴拿海維奇矩陣（克拉科夫揚）的問題。❷

遺憾的是，这些資料在图书舘里出現的时候已是1958年2月了，因此在本书中都未涉及。

H.莫德林斯基

1958年4月

❶ 苏联高教部高等学校通报，“測量学和航空摄影学”部分，1957年第一卷，第101—106頁。

❷ 莫斯科矿山学院出版，1957年，共53頁（非卖品）。

目　　录

第二篇　数表矩陣（克拉科夫揚）在測量計算中的应用

第一篇 数表矩陣(克拉科夫揚)的运算基础

第一章 概述。克拉科夫揚的运算

§1. 基本定义和标记。克拉科夫揚的类型

克拉科夫揚 这是用一定方式排列在矩形表內的一組数字，这些数字叫做元素。

克拉科夫揚的元素按列与行的次序排列，列与行的数目称为克拉科夫揚之大小。列的排号一般由左至右，而行的排号則由上而下。

为使克拉科夫揚与其它类型的数表（行列式，凱利矩陣）有所区别，用大括弧来表示，例如：$\left\{\begin{matrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{matrix}\right\}$。該克拉科夫揚由三列二行組成：$\begin{smallmatrix}3\\6\end{smallmatrix}$元素組成第一列、$\begin{smallmatrix}-4\\2\end{smallmatrix}$为第二列、$\begin{smallmatrix}5\\1\end{smallmatrix}$为第三列；3 -4 5元素組成第一行、6 2 1 为第二行。

克拉科夫揚元素一般用两种方法表示：

1. 所有的元素用同一个字母表示，并在字母下方标上列与行之号数，例如

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}a_{21}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{k1} \\ a_{12}a_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{k2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}a_{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{kn} \end{matrix}\right\}. \qquad (1)$$

2. 各列元素用不同字母表示，而在字母下方只标上行之号数，例如

$$\left\{\begin{matrix} a_1 b_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots g_1 \\ a_2 b_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n b_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots g_n \end{matrix}\right\}. \tag{1'}$$

这里：k——列数；n——行数。

第一种表示法較清楚地表示了克拉科夫揚之大小，因此在以后的叙述中将广泛采用这种表示法。第二种表示法常用来表示某些綫性方程之系数表，例如誤差方程系数表。

为了代替克拉科夫揚的展开式（1）和（1′），而用其第一列中的一个字母来簡单表出。为了与表示克拉科夫揚元素的字母有所区別，該字母用黑体印刷。而在书写时，在該字母下划一横綫，并在該字母下的小括弧中标出克拉科夫揚的大小，例如克拉科夫揚（1）和（1′）可簡写为：

$$\underset{(k,n)}{\boldsymbol{a}} \text{或} \underset{(k,n)}{\underline{a}}. \tag{2}$$

假如視克拉科夫揚中之一列为克拉科夫揚，則仍用該列元素之字母表示。此时若克拉科夫揚中所有元素均用同一个字母表示，則在表示列克拉科夫揚的字母下注上該列之号数。

例如：若 $\underset{(3,2)}{\boldsymbol{a}} = \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 6 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right\}$,

則 $\left\{\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{a}_1$, $\left\{\begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{a}_2$ 和 $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{a}_3$.

又若 $\underset{(3,2)}{\boldsymbol{a}} = \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{matrix}\right\}$,

則 $\left\{\begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{a}$, $\left\{\begin{matrix} 0 \\ 7 \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{b}$ 和 $\left\{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{c}$.

克拉科夫揚的一行被看作克拉科夫揚时的表示法和原克拉科夫揚相同，但是須将行的号数用小括弧括起。例如克拉科夫揚

$\underset{(3,2)}{\boldsymbol{a}}$ 的第一行为行克拉科夫揚时：$\boldsymbol{a}_{(1)}=\{-2\ 0\ 3\}$，第二行則是：$\boldsymbol{a}_{(2)}=\{4\ 7\ 1\}$。

依据列数 k 和行数 n 之間的关系，并依据元素的值来区分下列形式的克拉科夫揚：

1. 水平形克拉科夫揚：即 $k>n$，例如：

$$\underset{(3,2)}{\boldsymbol{a}}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{Bmatrix}. \qquad (3)$$

2. 垂直形克拉科夫揚：即 $k<n$，例如：

$$\underset{(2,3)}{\boldsymbol{a}}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{Bmatrix}. \qquad (4)$$

3. 正方形克拉科夫揚：[1] 即 $k=n$，例如：

$$\underset{(k,k)}{\boldsymbol{a}}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots\cdots a_{i1}\cdots\cdots a_{k1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots\cdots a_{i2}\cdots\cdots a_{k2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1k} & a_{2k}\cdots\cdots a_{ik}\cdots\cdots a_{kk} \end{Bmatrix}. \qquad (5)$$

4. 对称正方形克拉科夫揚：其对角綫元素为 a_{11}、a_{22}、… a_{kk}[2]，它两側各元素之値对称相等；即 $a_{ij}=a_{ji}$，例如：

$$\underset{(3,3)}{\boldsymbol{a}}=\begin{Bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{Bmatrix}.$$

高斯法方程組的系数克拉科夫揚是典型的对称克拉科夫揚。

5. 三角形克拉科夫揚：一般为正方形克拉科夫揚，其中有

---

[1] T.巴拿海維奇（〔11〕29頁）称这样的克拉科夫揚为平方的(Kwadrastym)。我們認为对行数列数相同的克拉科夫揚叫做正方形克拉科夫揚为佳，这样的叫法得到很多波兰的作者如E.瓦尔哈洛夫斯基（〔65〕219頁），Cz.卡曼 （〔31〕539頁），M.甫捷列維奇（〔52〕11頁）等的支持。

[2] 这样的对角綫叫主对角綫。

一个对角綫的元素值均不为零，在該对角綫之一側的元素值全应为零，而其另一側的元素值可为任意值。

三角形克拉科夫揚之例：

$$a=\begin{Bmatrix}4&0&5\\0&3&2\\0&0&1\end{Bmatrix},\quad b=\begin{Bmatrix}3&0&0\\1&8&0\\6&2&1\end{Bmatrix},\quad c=\begin{Bmatrix}1&7&6\\0&2&0\\4&0&0\end{Bmatrix},$$

$$d=\begin{Bmatrix}0&0&7\\0&3&1\\2&0&5\end{Bmatrix}.$$

在各种三角形克拉科夫揚中，主对角綫元素不为零的三角形克拉科夫揚，在平差計算中占重要地位。在上例中a和b即所謂这种克拉科夫揚，同时a称为上数表，而b称为下数表。

有时会遇到 $k>n$ 的变形三角形克拉科夫揚，即所謂截三角形克拉科夫揚，例如：

$$e=\begin{Bmatrix}2&3&-1&4\\0&5&7&12\\0&0&3&3\end{Bmatrix}.$$

6. 正則克拉科夫揚：其中每行內最少有一个元素不为零，而在零元素之列中以下各元素皆为零。这种不为零的元素叫做支柱元素或基础元素。

从正則克拉科夫揚定义中得知，行数不应多于列数。

正則克拉科夫揚的行数叫做它的秩（Ранг）。在正則克拉科夫揚的某一行中仅有一个支柱元素时，則称之为全秩克拉科夫揚。

下面的克拉科夫揚均为正則的：

$$\underset{(3,3)}{a}=\begin{Bmatrix}3&4&5\\7&1&0\\2&0&0\end{Bmatrix},\qquad \underset{(4,3)}{b}=\begin{Bmatrix}2&1&5&3\\4&3&2&0\\0&8&6&0\end{Bmatrix}.$$

上面两个克拉科夫揚的秩皆为三，但是克拉科夫揚 b 不是全

秩克拉科夫揚，因为在它的第三行中有两个支柱元素。

在克拉科夫揚的运算中，三角形正則克拉科夫揚具有特殊重要作用，其中支柱元素在主对角綫上时，这样的克拉科夫揚称为有順序的，它与无順序的正則克拉科夫揚的区别在于后者的支柱元素以另一种次序排列。有順序的正則克拉科夫揚可为截三角形式。

有順序的正則克拉科夫揚之例：

$$\underset{(4,4)}{\mathbf{c}} = \left\{\begin{matrix} 4 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right\}, \qquad \underset{(4,3)}{\boldsymbol{d}} = \left\{\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{matrix}\right\}.$$

7． 对角綫克拉科夫揚：为正方形克拉科夫揚，其中只有在主对角綫上的元素不为零，例如：$\left\{\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}\right\}$或用更簡化的形式 $\left\{\begin{matrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{matrix}\right\}$。

对角綫克拉科夫揚为三角形克拉科夫揚的一种对称形式。

8． 单位克拉科夫揚：为对角綫克拉科夫揚。在其中主对角綫上的元素均等于 1，而其他元素皆为零（若有的話）。因此单位克拉科夫揚乃是对角綫克拉科夫揚的个别情况。

单位克拉科夫揚用拉丁字母 J[1] 或希腊字母 τ[2] 来表示，后者称为克拉科夫揚τ。在以后的敘述中将用克拉科夫揚运算法的首創者T．巴拿海維奇所引用的τ（〔11〕，28頁）表示之。

克拉科夫揚τ的大小之选择应根据能否进行必要的运算。

单位克拉科夫揚之例：

$$\underset{(3,3)}{\tau} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \qquad \underset{(2,2)}{\tau} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\}, \qquad \underset{(1,1)}{\tau} = 1.$$

---

[1] 波兰詞jednostkowy的首字母。

[2] 希腊詞$\tau\rho\epsilon\pi\omega$的首字母。