科學圖書大庫

高等工程數學

（第三冊）

譯者 黃友訓

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十日再版

高等工程數學
(第三冊)

基本定價　1.60

譯者　黃友訓　私立逢甲學院教授

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

譯 者 序

本叢書共有六冊原名 Ingenieur-Mathematik ，內容具有許多優點。例如（1）材料新穎而豐富，適合工程師在大學研究高深學問之需要；（2）本書的重點，不在證明許多定理，而在鼓勵讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立解答各習題；（3）介紹新的數學觀念，培養純粹數學的思考方式；（4）各章附有問題與實例，切於實際的應用；（5）每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題之求解更爲重要；（6）本書頗適合於我國各大學工學院所訂新的課程標準。按照新的規定，微積分與微分方程均屬工學院一年級必修科目；讀完微積分與微分方程，接着讀這本書，在程度上有相當的啣接。

本叢書直譯之名，應爲“ 工程師數學 ”，根據原著者介文所說，這六冊叢書是由教工學院的講義整理而成；在證明方面不夠嚴密，但對於工程上的應用特別注重。所以用於工學院比較適合；因此本人決定改用“ 高等工程數學 ”此一比較符合原著者數學目的之書名。

本叢書第一冊原著頗多在文字上不能自圓其說（譯者按：原著者本人之德文亦並不高明）與排版錯誤之處，均經譯者逐次予以訂正。

黃友訓謹識

民國五十九年七月於逢甲學院土木工程學系。

弁 言

本叢書第一冊開始就講到級數，而將級數戴上"工程師數學"的頭銜者，其用意並非對工程師所指定的一種特殊數學，以表示與自然科學家所用的數學，或與所謂純粹數學有相反的內容之意；本書第一冊所講的級數，主要是針對工科各學系的學生可能應用之問題；就是自然科學的定律也應該就其重點加以說明。決定這一個目標，一則是為了對教材有所選擇，而此教材主要是滿足直至特許工程師前期考試(Diplomvorprüfung ；譯者按：德國之 Diplom 學位等於英美之碩士學位）所需要之普通數學講授者。二則本書第一冊中也為此包含一些工業大學第一學期一開始就習慣採用的教材；於是對於所有———好比由於工業實習———高中畢業後不立即繼續深造的學生而言，容易使之進入高深數學而尋求自修的門徑。

除了對教材有所挑選之外，本人認為尚有重要的一點，即本叢書與一般數學教授所用的書籍，在數學的方法上大有區別。譬如按照目前的習慣，研讀數學時特別就其通俗性着重於觀念的澄清，進而加以分析，並且劃分其有效境界；但初入世的工程師與自然科學家所面對的問題，是有計劃的或有效驗的觀念問題；從他們感興趣的狹窄領域而言，此觀點對於他們自然較為親切，而且對於他們日後的任務總要作為有所依據的準繩。這是為了工程師數學（簡稱工程數學）所能做的明顯結論，應該在此處就函數觀念中一個例子予以說明。工程學生對於一般的函數觀念，是絲毫不感覺興趣的；通常所觀察病理上的情形，據他們看來，自始就無年興趣或者甚至令人討厭的稀奇古怪之事物。但此處使適合而有效的進入分析的函數，却以解剖（即外科手術，俗稱開刀；在數學上則稱為運算）為出發點；借助於運算才產生許多不同的函數：由四則法（即加減乘除之總稱）導致多項式及有理函數；由多項式利用趨於極限的解析運算遂產生冪級數；由積分運算導入特別的超越函數（對數）；又由構成逆函數（或稱反函數）的運算，則以解析的方式導致指數函數與三角函數。然後由三角函數所組成的級數（即福里哀級數）有效的產生進入任意函數的廣大途徑。此外，具有歷史性的分析法，其過程直入十九世紀休

然不生變化；我們也要注意“functio”這個字，它與“operatio”一字相同，都是由並不古老的拉丁文而來，具有“功用”，“作用”，或“機能”（德文稱為 Verrichtung ）之意義。然而有效驗的觀點並非陳腐的老生長談，在現代的基本學理探討上（以 Lorenzen 一人為例）（譯者按：Dr. Paul Lorenzen 為西德 Erlangen 大學之數學教授，著有“數學”一書，共一百七十三頁），業已指出：Lorenzen 博士在數學上對基本理論發生困難的克服，做了有用的一種列式假設，使該理論的確能夠成立。———再則在大部份數學教科書中作為基礎的函數觀念，對許多應用方面的目的而言，也還是過於狹隘：二十世紀中所引用的一般化函數（例如分配律）已成為不可或缺的數學理論，而在工程數學的圖示方面亦不能無之；本書決定把一般化函數附加於福里哀級數（ Fouriersche Reihen ）作有效驗的運用。

於是對於純粹數學的思考方式，自然不應該隨便剝奪其所賦與之權利；但如果到處適用的說法以及抽象的澄清有其必要的話，這種思考的方式總是不可付諸闕如的。凡特許工程師（ Diplomingenieur ；譯者按：凡在德國工業大學各工程學系畢業之學生，均稱為特許工程師，或稱為國授工程師）按其地位的固有意義，均負有發展新方法的使命（但非應用陳舊的方法；如用老的方法，那就沒有進大學研讀的必要了！）；他對數學的抽象批評方面所需要者，與對積極有效方面所需要者完全相同。本書中有關利用德得欽氏綫段分割法（ Dedekindsche Schnitte ）對實數的引用各章，不應該當作教育的裝飾品看待；各該章節乃帶來重要的思考方式！尤其每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題的解答求得若干方法更為重要。附錄的內容絕對不是多餘的。但讀者對各章所附一大堆實際例題，一定要等到融會貫通之後，才好徹底從事於該附錄內容之研讀。為使讀者百尺竿頭再對各論題作進一步之研究起見，本叢書每冊最後尚且介紹若干參考書籍，以便讀者選購。

本工程數學叢書並不缺乏精良優美的圖形表示。這些圖示，除了具備任何教科書所應有的目的外，對於後起之秀的工程師（讀者按：應指正在大專院校肄業之學生而言）尚有參考研讀之功用。本叢書是屬於袖珍小冊子的性質，因為作者在此處有意遷就適先所提及的二功用之一：對課堂聽教授講解之領悟應該有所幫助。此時如果它的結構與體裁有若干地方與剛才的聽講稍有偏差時，那是無關宏旨的；對於同一論題從多方面去認識與了解，總屬有益之舉。本書各章末了所附的問題與實例，乃為了加深讀者的理解而加工修訂的。其目的在使讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立自主的去求解各

課題！

最後，主要是 C. Schmieden 教授對作者所給予寶貴而親切的規勸與忠告，令人萬分感激。又教育委員H.J. Vollrath博士，候補工程師 H.Bött-Chen，及候補數學家 G.W. Thiel 諸位先生對原稿的共同閱讀與脩改，以及對附圖之謄清與描繪，均有莫大之贊助。還有對出版書局的熱誠合作，亦須在此表示感謝之忱.

Detlef Laugwitz 1963年暑假期間於西德 Darmstadt

目次

第一章 微分方程之基本觀念與幾何解釋……1
第二章 一階特殊微分方程……8
第三章 一階微分方程之幾何觀察……28
第四章 解答的存在和單一性問題……42
第五章 二階微分方程……49
第六章 線性方程組與行列式……61
第七章 含常係數之線性微分方程……74
第八章 含可變係數之線性微分方程……85
第九章 含常係數之線性微分方程組……92
第十章 二階線性微分方程之奇異位置……105
第十一章 二階線性微分方程之邊值問題……111
第十二章 線性微分方程各種解法中之零位分配法……118
附錄 存在和單一性定理……124
參考文獻……138

第一章　微分方程之基本觀念與幾何解釋

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, BEGRIFF UND GEOMETRISCHE DEUTUNG

所謂微分方程（在德文方面，單數爲 DGl，多數爲DGln；以下即以此簡寫代表微分方程，或稱微分方程式）乃指除了含有一個函數之外，而且含有該函數到達某一階 n 之導來式的方程而言。我們已經認識許多例題，好比：

$$y' = \lambda \cdot y \qquad \text{公式(1.1)}$$

是一種 DGl（即微分方程之德文簡寫），只有指數函數 $y = C\,e^{\lambda x}$ 才能滿足其要求者（參看本叢書第二冊第　　頁）；按照第二冊第　　頁所講，適用於一個彈簧擺的振動過程之微分方程，應爲

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = P(t). \qquad \text{公式(1.2)}$$

就這兩種情形而言，其微分方程是一種方程式，其函數只含有一個變數者，即 $y = y(x)$ ，或 $x = x(t)$ 。然後我們所要討論的就是"常微分方程"（gewöhnliche DGl＝英文之ordinary differential equation）之問題；所謂"偏微分方程"（partielle DGL）者，乃指微分方程適用於幾個自變數的函數者而言，亦即在其中出現偏導數之微分方程，如同本叢書第二冊所講的絃振動之微分方程：

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

在一微分方程中出現導來式的最高階，同時稱爲微分方程之階；因此，公式(1.1)就是一階微分方程，公式(1.2)則爲二階微分方程。此外，這兩種微分方程具有一種十分特別的共同特性：它們在函數 $y(x)$ 或 $x(t)$ 及導來式之內是線性的（即一次的）。所以如此微分方程的本身亦叫做線性微分方程（或稱一次微分方程）。

凡屬微分方程，即不論常微分方程以及偏微分方程也好，線性微分方程以及非線性微分方程也好，對物理與工程方面的用途而言，毫無疑問的是高等數學分析法中最爲重要的一部分。其所以如此重要者，實因基本的自然律

（或稱自然法則）通常可作成微分方程的形態之緣故。這種情形業已肇端於牛頓的運動方程式，按照這個方程式凡屬地點對時間的第二導來式是與其他數量發生某種聯帶關係的；根據如此關係而論，二階微分方程在動力自然界的所有問題方面乃扮演特別重要的角色。

由於應用有關微分方程所產生的各種課題，一般是以決定所有函數爲目的，這些函數是要使由問題所發生的微分方程獲得滿足的。由此可見，此處的微分方程乃扮演定數方程式（Bestimmungsglcichung）的角色，如同好比一個代數方程式可以令人了解爲決定其根的方程式；不過此處等待決定的數量不復爲數字，却是函數而已。自從代數方程式以來，我們就已經知道，一般適用於精確求解的公式僅在特殊情形，例如在低次方程式方面有之；在許多場合是依賴近似求解的方法。有一種類似的眞實情形，亦存在於微分方程所有求解的複雜問題中；就在這個地方我們也有若干類的微分方程，我們可以針對此類微分方程規定普通一切求解的方法；幸而恰好這一類的微分方程在應用方面扮演重要的角色。然而並沒有到處適用於求解微分方程的一種方法（實則亦不可能有此方法）；因此，此處所用的近似求解法亦將有其必要。此外，在許多場合，對應用感興趣者並非某一微分方程的所有解法，却只是帶有某種特性的解法，此特性乃由問題的物理性質或技術性質所產生者；這種情形必將導致形成所謂初值問題（Anfangswertaufgaben），邊值問題（Randwertaufgaben），及特徵值問題（Eigenwertaufgaben）。

從以上所述的概要已能令人看出，微分方程乃展示如此廣大之領域，而本叢書只能對最簡單和最重要的問題範圍及求解方法作一介紹而已。因此，我們着手從事於特別簡單一種類型之研究與分析，但就這一種類型已能顯示基本求解的方法，此即所謂一階常微分方程：

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \text{公式 (1.3)}$$

除了公式（1.1）之外，就是不定積分的課題

$$y' = f(x) \qquad \text{公式 (1.4)}$$

亦屬於一階常微分方程之範疇；以上各方程式之解均爲：

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi + C. \qquad \text{公式 (1.5)}$$

由此可見，在公式（1.1）與公式（1.4）兩種情形之下，所有解法均取決於

一個公式，在此公式內出現一個積分常數C，而此常數C的值可以隨意假定者。由於這種揣測乃顯而易見者，即就一般情形而言，如此說法對公式(1.3)的規定是相當切合的。這種情形可用曲線圖來說明，即解法曲線 $y = y(x)$ 是毫無缺憾而單純平滑的掩蓋於 $x \cdot y$ 平面的相當界域；意即恰好一條解法曲線通過坐標平面的任何一個點（見第一及第二圖）。此外，從特殊情形（1.4）中接受若干符號，而轉用於一般情形：一個微分方程之解稱爲微分方程的積分；解微分方程的一般公式稱爲一般積分（或稱通解，又稱全解）；特殊的一種解法則叫做特別積分（或稱特解）；在解法公式中出現的自由常數C，

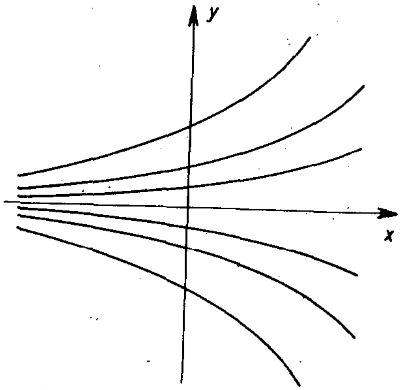

圖1： 微分方程 $y'=\lambda y$ 之解

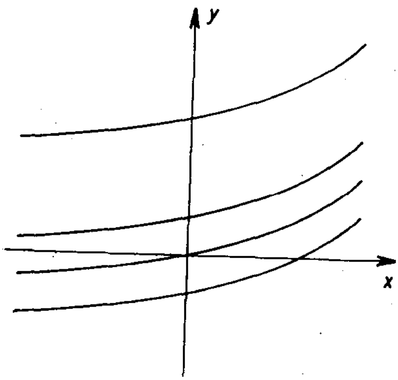

圖2： 微分方程 $y' = f(x)$ 之解

亦以積分常數名之。

就普通情形而論，如對微分方程的若干正規形式（1.3）加以觀察，亦能獲得滿足；假如依 $y'=\frac{dy}{dx}$ 有其解之可能的話，則微分方程的明顯形態應爲

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y);\qquad \text{公式 (1.6)}$$

在有些情形之下，不宜將 y 定爲 x 之函數，却最好將 x 與 y 之滾動軸（即縱坐標與橫坐標）予以調換；亦即尋求反函數（或稱逆函數）：

$$\frac{dx}{dy}=g(x,y)=\frac{1}{f(x,y)}.\qquad \text{公式 (1.7)}$$

在這種情形之下，所不同者，只是自變數與因變數有所區別而已；如果這樣做法感覺不大相宜時，亦可將下面的形態予以確定，而使之成爲基本的式子：

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0\qquad \text{公式 (1.8)}$$

在上式中是包含（1.6）與（1.7）兩個公式作爲特殊情形看待。

我們着手研究對積分法有所幫助的幾何問題，同時也得應用微分方程的明顯形態（1.6）；此公式的含義，乃指通過 (x_0,y_0) 點的一條積分曲線在這一點內具有由微分方程所規定的斜率〔即 $f(x_0,y_0)$〕而言。那末，假如我們就平面上具有足夠多的點內，以各該時的斜率畫成許多一小段一小段的直線時，則可獲得積分曲線用作切線的變跡圖形；同時亦可由此求得積分曲線本身的進行全貌。這種情形是在第三圖中針對微分方程

$$y'=x^2+y^2\qquad \text{公式 (1.9)}$$

予以說明，就中乃將通過坐標原點（0,0）之積分曲線用黑色描成實線。此一幾何圖形另一方面可使下述的情形有所根據，即就一般情況而論，凡屬積分曲線必將毫無缺憾而單純平滑的掩蓋平面的界域。爲了要使幾何上的考慮實際比較方便付諸實施起見，乃引用所謂等斜線（或稱等向線）k：

$$f(x,y)=k$$

這是對於任何 k 均爲一條曲線，剛巧是等斜線（Isokline）的明顯方程式。假如我們現在對於一條積分曲線通過一點 (x_0,y_0) 的進展情形有意求得一個

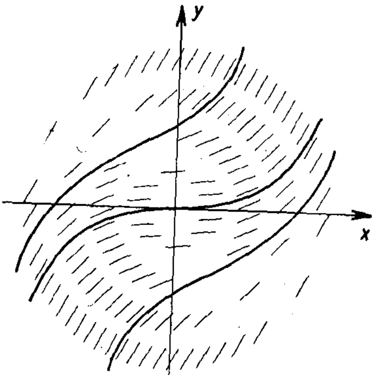

圖3：微分方程 $y' = x^2 + y^2$ 之方向場

大概的輪廓時（實際上這種想法往往非常重要！），便可利用以下所述的"等斜線法"（Isoklinenverfahren）：在許多等斜線中間描繪若干中心線，而且由(x_0, y_0)這一點出發作成一條曲折線段的圖形，該曲折線段的轉角是位於中心線之上，而且每一線段所具有的斜率，皆取決於與各該線段相交之等斜線。在第四圖中，是一再的就微分方程（1.9）的例子，將此情形予以說明；此處之等斜線都是圓。

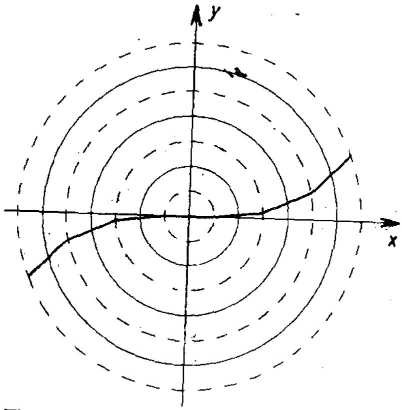

圖4：　微分方程 $y' = x^2 + y^2$ 之等斜綫

借助於上述的等斜線法，不但對於積分曲線的定性過程可以獲得極爲有用的一目了然，而且由此亦可求得近似的解法；這些近似解法又可利用以數字表示而重複爲之的方法繼續加以改善的。

無煩提起，立即要謹防一種錯誤的結論，這是由於幾何的解釋顯而易見的：有好幾條積分曲線通過一個點 (x_0, y_0)，而向前進行時自然必須相遇於這個點；這是絕對可能發生的事情，因爲所有積分曲線均具有相同的斜率 $f(x_0, y_0)$ 之故；假如 $f(x, y)$ 表面看去是一種十分合理的函數時，也可能發生上述的情形。當作一個例子，我們觀察下面的微分方程：

$$y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}, \qquad \text{公式（1.10）}$$

上式右邊對 $x-y$ 平面上所有點而言，是僅含一個意義，並不模稜兩可的；如此解釋，當無問題發生；等斜線均爲與 x 軸互成平行的直線。微分方程可以按照本叢書第二册所講的分離變數法（Methode der Trennung der Veranderlichen；英文則爲 Separation of Variables）進行積分：令 $y \neq 0$，可以求得

$$\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy = dx,$$

上式左右兩邊又可予以積分 $y^{\frac{1}{3}} = x + C,$

結果應爲：
$$y = (x + C)^3.$$

如此求得的積分曲線屬於抛物撓線（或稱三次抛物線），此種抛物線乃由曲線 $y = x^3$ 利用 x 方向的平行移動所產生，而且毫無缺憾與單純平滑的把 $x-y$ 平面予以掩蓋者。但附帶還有上面認爲不可能之情形 $y = 0$，亦有一解；這種情形如果直接代入微分方程之內，便可令人看出來的。此處是有好幾條解法曲線通過 x 軸上任何一個點。（此外，尚能令人看出者，即 x 軸本身亦屬於等斜線之一種，而且其斜率與其自己的斜率完全符合！）

讀者必將加以揣測者，即"就一般情形而論"，一階微分方程之解雖然具有單一性（或稱獨特性），總會經過一個已知點而存在的。下面到了第四章，我們還要對其應該具有之條件進行討論。

此外，不僅有一曲線族屬於任何一種微分方程，而且反過來亦可將一階

微分方程配屬於任何一種單參數曲線族；其中有一組曲線，只要它決定於含有一個自由常數（即所謂"參數"者）的方程式：

$$F(x,y,C)=0.$$

它就叫做單參數的曲線族。我們以含有半徑＝1的所有圓族（Kreisschar；英文稱爲 Family of ciacles）爲例，其中心點是位於 x 軸之上者，加以觀察；此處圓族之方程式應爲：

$$F(x,y,C)=(x-C)^2+y^2-1$$

如將方程式 $F(x,y,C)=0$ 對於 x 進行微分，則得

$$(x-C)+y\,y'=0,$$

又由以上二方程式連合一起來看，便可消去常數 C；然後求得微分方程如下：

$$y^2\,y'^2+y^2-1=0. \qquad \text{公式（1.11）}$$

按照求導運算的方法可知，此微分方程的成立，對一曲線 $y=y(x)$ 屬於預先假設的一個"族"（Schar）而言，應爲必要的條件；因爲該微分方程的成立確實是從"族曲線"（Scharkurve）的方程式針對此族曲線導引而來之故。但反過來說，該微分方程的成立，對 $y(x)$ 眞正是族曲線而言，不一定總是充分的條件：有許多直線 $y=\pm 1$ 也一樣能滿足該微分方程之要求，這是立即可加以證實的。此外，這些直線切於所有族曲線，它們是色絡線（Enveloppe）。以後將再討論及之。

此處對於所求得的微分方程，我們僅僅還要拿來作爲深入研究其所屬顯明的形式之動機，此形式如對 y' 求解，便可獲得如下：

$$y'=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}.$$

由此可見，上式的右邊是 $f(x,y)=\pm\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-1}$；意即：對 $|y|>1$ 而言，是無法求得實數之解的。對 $0<|y|<1$ 而言，各按正負號的選擇，可以求得兩種不同的微分方程；而且事實上眞正通過任何一個所屬之點者，是兩個上述的圓。在這種情形之下，該色絡線乃分成兩個界域的。

第二章　一階特殊微分方程

SPEZIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

本章所要討論者，爲若干類型的微分方程，由此導致連續積分法之存在的問題。從前我們已有一部分嫻熟於這一類的微分方程，好比含有分離變數的微分方程，其寫法如下：

$$P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{公式 (2.1)}$$

由不定積分法可立即提供上式的解法：

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = C. \qquad \text{公式 (2.2)}$$

至此已將該微分方程予以積分。一切求積手續自然尚未十分完備，仍須進行下面的幾個步驟：第一步驟應將不定積分眞正付諸實施；第二步驟，即假如具體的問題作如此要求的話，那末還得把解算公式對 y 予以解答。這兩個步驟是不屬於微分方程的理論範圍以內的。此外如果有一個問題能使之還元而成爲曲線形求積問題（Quadratur），我們總要感覺滿意的。一俟“積分”（Integral）這個名詞一般用作微分方程之解以後，現在就以比較適當的方式稱爲定積分及不定積分。

這種分離變數法（Separation der Variablen）的特別重要之用途，應爲齊次線性微分方程（Homogene lineare DGL）的積分。

$$y' = a(x)\,y \qquad \text{公式 (2.3)}$$

以 y 除之（如 $y=0$，這顯然是無法加以理解的）即得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = a(x)\,\mathrm{d}x,$$

亦即

$$\ln|y| = \ln|C| + \int_{x_0}^{x} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

或者最後便可寫成下面的形式：

$$y = C \exp \int_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi. \qquad \text{公式 (2.4)}$$

在這種一般積分（或稱通積分）之內，如令 $C=0$，自亦包含上面所講無法理解的 $y=0$ 在內。我們還要加以證實者，即所有函數（2.4）均爲微分方程之解！此外，顯然令人看出，宜將積分常數寫成自然對數；這種小小的技巧本來是沒有必要的，因爲我們亦可寫成下面兩個式子：

$$\ln |y| = c + \int_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi$$

或

$$|y| = e^{c} \exp \int_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi.$$

如將 $\pm e^{c}$ 寫成 C，則 C 之所有值可爲正，亦可爲負；而我們仍然求得與公式（2.4）相同的式子。

根據以上所說，我們進而處理非齊次線性微分方程的問題，如同下式所列者：

$$y' = a(x)\, y + b(x) \qquad \text{公式 (2.5)}$$

如用一種方法，即從前在非齊次線性問題方面，亦可設法使之還元爲所屬齊次問題，此處自能照樣達成相同之目的。玆設 y_0 代表非齊次微分方程（2.5）之任何一種特別解法，

$$y_0' = a\, y_0 + b, \qquad \text{公式 (2.6)}$$

則令（2.5）與（2.6）兩個式子相減，可得

$$(y - y_0)' = a(y - y_0),$$

因此，$y - y_0$ 等於所屬齊次微分方程（2.3）的一個積分，那是有其必要的，非如此不可得：

$$y'_{\mathrm{h}} = a(x)\, y_{\mathrm{h}}.$$

但同時亦有其充分理由的：每一函數 $y = y_0 + y_{\mathrm{h}}$ 均爲非齊次微分方程（2.5）之解，這種情形就有待於讀者自己加以證實的。至此便可說明下面一個定理：

定理 2.1：所有非齊次線性微分方程 $y' = a\,y + b$ 之解 y，其求得是當作此非齊次微分方程所屬一種特別解法的和數；而這種微分方程乃含有所屬齊次微分方程 $y'_h = a\,y_h$. 的一般積分 y_h 者。

爲了完全處理非齊次微分方程的問題，我們還缺少一種尋求非齊次微分方程之特解的方法。在此可利用常數變值法（Variation der Konstanten）以達目的：意即在解算公式（2.4）內以函數 $v(x)$ 取代積分常數 C，

$$y_0 = v(x)\;Y(x),\;\; Y(x) = \exp\int_{x_0}^{x} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

同時設法決定 $v(x)$ 之大小，結果 y_0 便成爲非齊次微分方程之解。是則我們以試探的方式令

$$y'_0 = a\,y_0 + b$$

由於 $Y' = a\,Y$，便可求得

$$v'\,Y + v\,Y' = v'\,Y + v\,a\,Y = a\,v\,Y + b.$$

此條件之獲得滿足，必須寫成下面的式子：

$$v' = b \cdot Y^{-1}$$

亦即

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} b(\xi)\;Y^{-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

至此就已求得非齊次微分方程之一特解：

$$y_0 = v(x)\cdot Y(x) \qquad \text{公式（2.7）}$$

$$= \exp\int^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int^{x} \frac{b(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\exp\int^{\xi} a(t)\,\mathrm{d}t}.$$

吾人最好不必死記這個明顯公式，却要了解用於導引這個公式的方法。請看下面一個例子就能明白：

$$y' = y + x.$$