萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

初等代數解析學

斯波勒著
鄭太朴譯

商務印書館發行

初等代數解析學

斯波勒著
鄭太朴譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

初等代數解析學

斯波勒著　鄭太朴譯

發行人　王雲五　上海寶山路五〇一號

印刷所　商務印書館　上海寶山路

發行所　商務印書館　上海及各埠

中華民國二十年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

NIEDERE ANALYSIS
BY BENEDIKT SPORER
TRANSLATED BY CHENG T'AI P'O
PUBLISHED BY Y. W. WONG
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1931

四三八九分

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

目　　次

初 等 代 數 解 析 學

第 一 章

連分 整數無定方程

第 一 節

連 分

1. 連分 凡分數之分母爲分數，其分母又爲分數,如是輾轉直下者，曰連分，

如 $$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4}}}}$$ 或 $$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}}$$

均是． 此中之 $\frac{b}{a}$ 或 $\frac{1}{a}$ 名爲連分之節,其 b 爲節分子，a 爲節分母． 本節內所欲論者，爲前二連分中之第二式，其節分子統爲 1，節分母則統爲正整數．此項連分之寫法,可稍簡之如下:—

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}}$$

或更簡之作

$$(1 : a_1, a_2, a_3, a_4).$$

2. 化尋常分數爲連分法　尋常分數均可化爲連分，其法與求分子及分母之公因子時所用輾轉相除之法無異．例如求 $\frac{157}{283}$ 之連分式，則可用 157 除 283，得 1 餘 126，復以此餘除 157，得 1 餘 31，仍復以此餘 31 除 126，等等，以至於盡，則所得諸商 1，1，4，15，2 卽爲所求連分式之節分母．爲明顯計，更列出如下：—

$$\frac{157}{283}=\cfrac{1}{\cfrac{283}{157}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{126}{157}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{157}{126}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{31}{126}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{126}{31}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{31}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{31}{2}}}}}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{15}+\frac{1}{2}=(1:1,1,4,15,2).$$

3. 化連分爲尋常分數,近似值　求連分之值時,倘祇計其第一節 $\frac{1}{a_1}$ 而將其餘統略去,則所得者爲第一近似值,以 $\frac{z_1}{n_1}$ 表之;如是 $\frac{z_1}{n_1}=\frac{1}{a_1}$ 如將第二節幷計入,則爲第二近似值,以 $\frac{z_2}{n_2}$ 表之,卽 $\frac{z_2}{n_2}=\frac{a_2}{a_1a_2+1}$. 其第三近似值可類推如下:

$$\frac{z_3}{n_3}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{a_2a_3+1}{a_1a_2a_3+a_3+a_1},$$

第四等等亦仿此類推.

此諸近似值中,第一過大,因其分母較眞值爲小;第二反之,稍嫌其過小,因 $\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots$ 故第二之分母 $a_1+\frac{1}{a_2}$ 較其眞值爲大,然第三近似值

則又過大，而第四則又過小，等等；從可知連分之諸近似值，較眞值過大與過小適相間者.

前已得第一二三近似值，今更列之如下:—

$$\frac{z_1}{n_1}=\frac{1}{a_1},\quad \frac{z_2}{n_2}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=\frac{a_2}{a_1a_2+1}=\frac{a_2z_1+0}{a_2n_1+1}$$

$$\frac{z_3}{n_3}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{\left(a_2+\frac{1}{a_3}\right)z_1+0}{\left(a_2+\frac{1}{a_3}\right)n_1+1}$$

$$=\frac{a_3a_2z_1+z_1}{a_3(a_2n_1+1)+n_1}=\frac{a_3z_2+z_1}{a_3n_2+n_1},\quad \frac{z_4}{n_4}$$

$$=\frac{\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)z_2+z_1}{\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)n_2+n_1}=\frac{a_4(a_3z_2+z_1)+z_2}{a_4(a_3n_2+n_1)+n_2}=\frac{a_4z_3+z_2}{a_4n_3+n_2}.$$

普通可推得第 k 近似值爲

$$\frac{z_k}{n_k}=\frac{a_kz_{k-1}+z_{k-2}}{a_kn_{k-1}+n_{k-2}},$$

而如於此式中 a_k 處易以 $a_k+\frac{1}{a_{k+1}}$，則復可得第 $+1$ 近似值之式:—

$$\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}=\frac{\left(a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)z_{k-1}+z_{k-2}}{\left(a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)n_{k-1}+n_{k-2}}=$$

$$\frac{a_{k+1}(a_k z_{k-1}+z_{k-2})+z_{k-1}}{a_{k+1}(a_k n_{k-1}+n_{k-2})+n_{k-1}}=\frac{a_{k+1}z_k+z_{k-1}}{a_{k+1}n_k+n_{k-1}},$$

故知數學上自 k 推至於 $k+1$ 之論證法，於此亦可用，而前式實爲近似值之公式，任何 $k(>1)$ 均合理.

求連分之近似值時，如添設二虛近似值，$\frac{1}{0}$ 及 $\frac{0}{1}$，則其計算可按圖表而索. 例如求 $(1:2, 3, 1, 4, 5, 3, 2)$ 之諸近似值，可得一圖表如次：—

a	—	—	2	3	1	4	5	3	2
z	1	0	1	3	4	19	99	316	731
n	0	1	2	7	9	43	224	715	1654

於此可見諸近似值之分子 z 及其分母 n，於添設二虛近似值後，即可由節分母 a 乘前 z 及 n 并加其更前 z 及 n 得之：—

z:— $1=2\cdot0+1$, $3=3\cdot1+0$, $4=1\cdot3+1$,

$19=4\cdot4+3$, ……

n:— $2=2\cdot1+0$, $7=3\cdot2+1$, $9=1\cdot7+2$,

$43=4\cdot9+7$, ……

(附註： 數目字與數目字間之點爲乘號， 非小數號，以後仿此—小數號則用劈[,])

而其諸近似值，則如表中所示爲

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \frac{19}{43},\ \frac{99}{224},\ \frac{316}{715},\ \frac{731}{1654}.$$

4. 近似值之屬性 由前近似值之式，不難知

$z_2n_1-n_2z_1=-1$, $z_3n_2-z_2n_3=+1$, $z_4n_3-z_3n_4=-1$.

設此式可通用至於 k,

$$z_kn_{k-1}-z_{k-1}n_k=(-1)^{k-1},$$

則卽得

$$z_{k+1}n_k-z_kn_{k+1}=(a_{k+1}z_k+z_{k-1})n_k-(a_{k+1}n_k+n_{k-1})z_k$$
$$=-(z_kn_{k-1}-z_{k-1}n_k)=(-1)^k,$$

因知其於 $k+1$ 亦適用. 前已知 $k=4$ 無誤，故於 $k=5$ 亦必無誤，如是於 6, 7, … 均無誤，而 k 爲任

何數(>1)均可用矣．由此卽得

$$\frac{z_k}{n_k}-\frac{z_{k-1}}{n_{k-1}}=\frac{(-1)^{k-1}}{n_k\,n_{k-1}},$$

是相繼的二近似值之差，等於此二近似值之分母相乘之倒數也．

前旣知連分之諸近似值，較眞值過大過小適相間，而其眞值，則在相繼的二近似值之間．今設以 q 爲連分之眞值，則 $\frac{z_k}{n_k}>q>\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$ 或 $\frac{z_k}{n_k}<q<\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$，故若取連分之第 k 近似值以代眞值時，所差者當小於第 k 及第 $k+1$ 二近似值之差，卽小於 $\frac{1}{n_k\cdot n_{k+1}}$，而更小於 $\frac{1}{n_k^2}$．此卽是：取連分之第 k 近似值以代其眞值時，所差不及此近似值分母之方之倒數；苟 k 愈大，則 n_k 亦愈大，而眞值與近似值間之差乃愈以微．

設如一分數 $\frac{r}{s}$，其值在一連分之相繼的二近似值之間，則此分數之分子與分母，r 及 s，必大於後者之分子與分母．其證如下：—

設 k 為奇數，則有 $\frac{z_k}{n_k}>\frac{r}{s}>\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$,

而 $$\frac{z_k}{n_k}-\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}>\frac{z_k}{n_k}-\frac{r}{s},$$

亦即是 $\frac{1}{n_kn_{k+1}}>\frac{z_ks-n_kr}{n_k\,s}$, 或 $\frac{1}{n_{k+1}}>\frac{z_ks-n_kr}{s}$.

因 $\frac{z_k}{n_k}>\frac{r}{s}$, 故 $\frac{z_ks-n_kr}{n_k\,s}>0$, 而 $z_ks-n_kr\geqq 1$,

於是必有 $\frac{1}{n_{k+1}}>\frac{1}{s}$, 而 $s>n_{k+1}$. 又 $\frac{r}{s}>\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$,

而 $s>n_{k+1}$, 則非 $r>z_{k+1}$ 不可矣.

設 k 為偶數，則證法須稍改動，惟其理仍如此，故略之．從可知連分之近似值，其分子分母均為約盡之最小數而無可再約之使更簡者也.

5. 化連分為級數　化連分為級數之法甚簡，示之如下:—

前已知 $\frac{z_1}{n_1}=\frac{1}{n_1}$, $\frac{z_2}{n_2}-\frac{z_1}{n_1}=\frac{-1}{n_1n_2}$, $\frac{z_3}{n_3}-\frac{z_2}{n_2}$

$$=+\frac{1}{n_2n_3},\quad\cdots\quad\frac{z_k}{n_k}-\frac{z_{k-1}}{n_{k-1}}=\pm\frac{1}{n_kn_{k-1}}.$$

設 $\frac{z_k}{n_k}$ 為連分之最後近似值，即其眞值 q，則將前諸

式加之，卽得所求之級數：—

$$\frac{z_k}{n_k}=q=\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_1n_2}+\frac{1}{n_2n_3}-\frac{1}{n_3n_4}+\cdots\pm\frac{1}{n_{k-1}n_k}.$$

6. **無盡連分及其無理性**　連分之節，其數亦可無窮，是曰無盡連分．無盡連分之節分母有如小數之循環者，曰循環連分；此有二，其週期自第一節分母始者，曰純循環連分，反之，至後始有週期者曰雜循環連分．各舉一例如下：—

非循環無盡連分：$(1:1,2,3,5,7,3,1,4,\cdots\cdots)$

雜循環無盡連分：$(1:4,5,\overline{2,3},2,3,2,3,\cdots\cdots)$

純循環無盡連分：$(1:\overline{2,3,5},2,3,5,2,3,5,\cdots)$

循環連分之值，均不難計之．例如求 $(1:1,2,1,2,\cdots)$ 之值，則可設 x 等於此值，因得方程

$$x=\frac{1}{1}+\frac{1}{2+x}.$$

解之，卽得 $x=\sqrt{3}-1$ 爲所求之值．然此爲純循環連分，若爲雜循環者，則須幷計入不在週期內之各節．設例如下：—

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots=\frac{1}{4+\sqrt{3}-1}=\frac{1}{3+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

凡連分之節分子統爲1, 其節分母統爲正整數者, 其值自必小於一. 今如設

$$\frac{u}{v}=\frac{1}{a_r}+\frac{1}{a_{r+1}}+\cdots, \qquad \frac{u_1}{v_1}=\frac{1}{a_{r+1}}+\frac{1}{a_{r+2}}+\cdots$$

$$\frac{u_2}{v_2}=\frac{1}{a_{r+2}}+\frac{1}{a_{r+3}}+\cdots$$

則有 $\frac{u}{v}=\frac{1}{a_r+\frac{u_1}{v_1}}$, $\frac{u_1}{v_1}=\frac{v-ua_r}{u}$, 因此式二端之分數均爲約盡無可再約者, 故 $v_1=u$; 而由

$$\frac{u_2}{v_2}=\frac{v_1-u_1a_{r+1}}{u_1},$$

復可得 $v_2=u_1$, 等等.

於是 $\frac{u}{v}$, $\frac{u_1}{v_1}$, $\frac{u_2}{v_2}$, $\frac{u_3}{v_3}$, $\cdots$ 一級數, 可易爲

$$\frac{u}{v},\ \frac{u_1}{u},\ \frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_2},\cdots$$

此諸分數之值,均小於一,故得

$$v>u>u_1>u_2>u_3\cdots\cdots$$

設如無盡連分之值,自某節下計之爲有理數,則 u 與 v 即爲有盡有理數,而 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 乃終逼近於 0,是連分不能無盡而爲有盡矣,此即違理. 故知無盡連分之值,自某節下計之不能爲有理數;而無盡連分本身之值,自亦爲無理者矣. 因得:凡無盡連分之值爲無理數.

7. **化平方根爲連分** 今設一例,以明若何將平方根化爲連分:平方根 $\sqrt{31}$ 之值在 5 與 6 之間,故必可以 $5+\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{x_1}\right.$ 爲一眞分數,其值小於 $\left.1\right)$ 之式表之. 今試將 $\sqrt{31}$ 寫作

$$\sqrt{31}=5+\sqrt{31}-5=5+\frac{\sqrt{31}-5}{1},$$

而以 $\sqrt{31}+5$ 乘加於 5 下之分數,則得

$$\sqrt{31}=5+\frac{6}{\sqrt{31}+5},$$