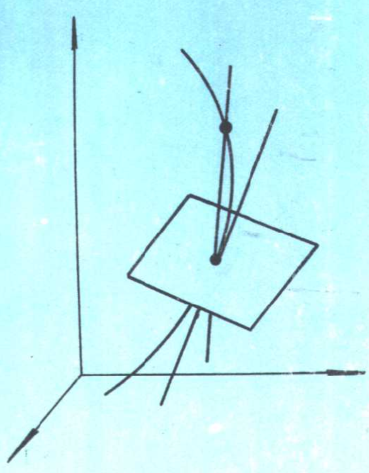
全国高等教育自学考试教材

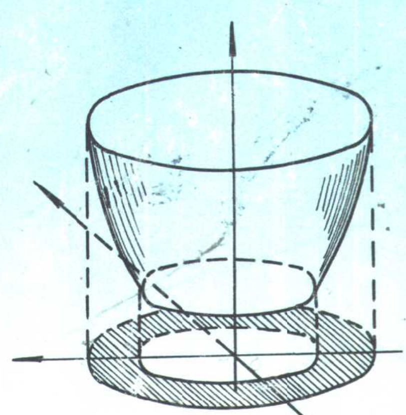
高等数学

（修 订 本）

下 册

陆庆乐 编





西安交通大学出版社

全国高等教育自学考试教材

高 等 数 学

（修订本）

下册

陆庆乐 编

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会1993年修订的机械类本科段高等数学自学考试大纲编写的，教材内容与深广度完全与大纲一致.

全书分上、下两册.上册内容包括函数、极限、连续，导数与微分，导数应用，不定积分，定积分及其应用；下册内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学与积分学，常微分方程，级数.

本书针对自学考试缺少教师进行系统讲授的特点，阐释详细，说理透彻，注意揭示概念的本质和概念之间的联系与区别；对重要定理与公式的推理论证，层次分明，思路清晰；辅以几何直观，进行启发引导，深入浅出，逐步深入，并注意解题训练，及时指出易犯的错误，书中例题较多，配有大量习题，且有答案.每章末都有"小结与学习指导"，便于自学.

本书除供自学考试使用外，也可供一般高等工科院校、职工大学、函授大学、电视大学作为教材或参考书，大专班也可使用.

(陕)新登字007号

高等数学
(修订本)
下册
陆庆乐 编
责任编辑 路江

西安交通大学出版社出版
西安市咸宁西路28号(邮政编码710049)
西安向阳印刷厂印装
陕西省新华书店经销
*
开本787×1092 1/16 印张15 字数:363千字
1994年12月第1版 1995年3月第1次印刷
印数:1—8000
ISBN7-5605-0120-6/O·25 定价:13.50元

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

在中学物理学中我们遇到过向量，它是研究既有大小又有方向的量的有力工具．向量在数学、物理、力学以及工程技术中有着广泛的应用．

本章的主要内容由两部分组成：第一部分是有关向量的概念及其代数运算，即所谓向量代数；第二部分是空间解析几何．向量代数是学习空间解析几何的重要工具，也是进一步学习向量分析等内容的基础．

7-1　向量概念

我们已知物理量有两种：一种是只具有大小的量，称为**数量**（也称**标量**或**纯量**），如时间、温度、功等；另一种是不仅具有大小而且还有方向的量，称为**向量**（也称**矢量**），如速度、加速度、力、位移、电场强度等．在几何上，向量可用空间的一个有向线段来表示，它的长度表示向量的大小，它的方向表示向量的方向．如果一个向量的起点与终点分别记作 A 与 B，那末这个向量便记作$\overrightarrow{AB}$．但为了方便，往往只用一个字母上面加上箭号来表示，如$\vec{a}$．在本书中，一般用黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 来代替 $\vec{a}$（图 7.1）．

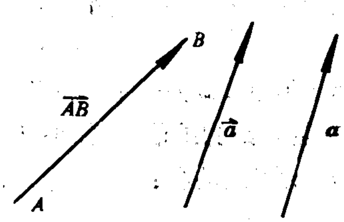


图 7.1

我们研究的向量，如无特殊声明，是指可在空间作自由平行移动的向量，它的起点可以是空间的任意一点，这种向量称为自由向量．我们把长度相等、方向相同的两个向量看作是相等的向量．

向量的长度称为向量的**模**或**绝对值**，记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$．模等于 1 的向量称为**单位向量**．模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$．零向量的方向不确定．

7-2　向量的线性运算

向量的加法、减法以及向量与数的乘法称为向量的**线性运算**．

向量的加法与减法　在中学物理中，求作用于物体上的一点处且互成角度的两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{R}$ 时，用的是所谓平行四边形法．即将力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 作为平行四边形的两边，那末对角线向量就是合力 $\boldsymbol{R}$（图 7.2(a)）．根据平行四边形的性质，也可以这样得出 $\boldsymbol{R}$：把 $\boldsymbol{F}_2$ 的起点移到 $\boldsymbol{F}_1$ 的终点，那末由 $\boldsymbol{F}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{F}_2$ 的终点的向量便是 $\boldsymbol{R}$（图 7.2(b)）．

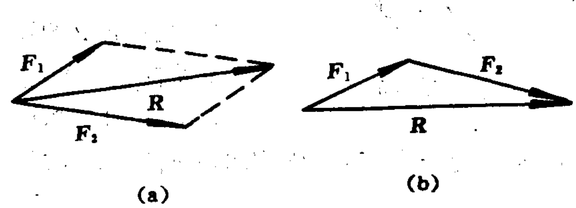


图 7.2

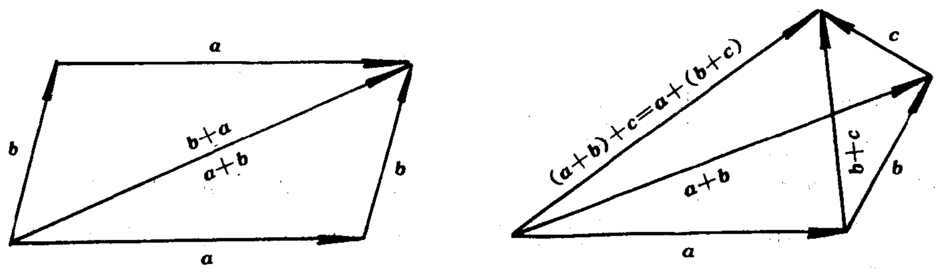
就在这个基础上产生了所谓向量的加法．

定义　设有两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果把 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至 $\boldsymbol{a}$ 的终点，那末由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．

根据这个定义，可知向量的加法满足交换律与结合律(见图 7.3).

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} \tag{2}$$



(a)　　(b)

图 7.3

定义　设有两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果另有一个向量，它与 $\boldsymbol{b}$ 相加后等于 $\boldsymbol{a}$，那末这个向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

如果把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，那末 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量(图 7.4).

这样，对于每一个向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差：$\boldsymbol{0}-\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的一个向量，记作 $-\boldsymbol{a}$，称为 $\boldsymbol{a}$ 的逆向量，这样，就有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

换句话说，减去一个向量等同于加上这个向量的逆向量.

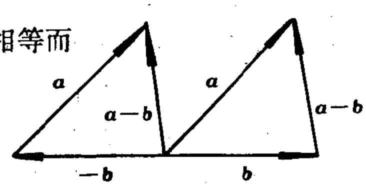


图 7.4

向量与数的乘法　如果把 n 个相等的向量相加，那末，根据加法的定义，所得到的和：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}$$

应该是一个模等于 $n|\boldsymbol{a}|$ 而方向依旧不变的向量，可记作 $n\boldsymbol{a}$. 把这个观念推广，就有了向量与数的乘法.

定义　一个向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}\lambda$，是模等于 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$ 的另一个向量，它的方向在 $\lambda>0$ 时与原向量的相同，在 $\lambda<0$ 时与原向量的相反. $0\mathrm{a}=\boldsymbol{0}$(图 7.5).

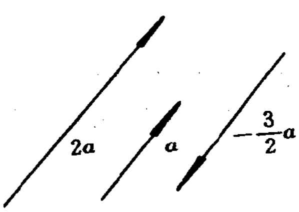


图 7.5

容易证明，这种乘积满足下列结合律与分配律：

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \tag{3}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a} \tag{4}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \tag{5}$$

(3)式是定义的明显结论.(4)式和(5)式的正确性也可根据定义从向量的伸缩 λ、μ 倍和三角形放大或缩小 λ 倍来阐明，如图 7.6(a) 和 7.6(b) 所示.

设 $\boldsymbol{a}^0$ 是方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的单位向量，那末根据向量与数的乘法可以把 $\boldsymbol{a}$ 写成：

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \quad 或 \quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{6}$$

向量的加法、减法以及向量与数的乘法统称为向量的**线性运算**.

例 1　设 P_1 与 P_2 为数轴 ox 上的任意两个不同的点，它们的坐标分别为 x_1 与 x_2. $\boldsymbol{i}$ 为数轴

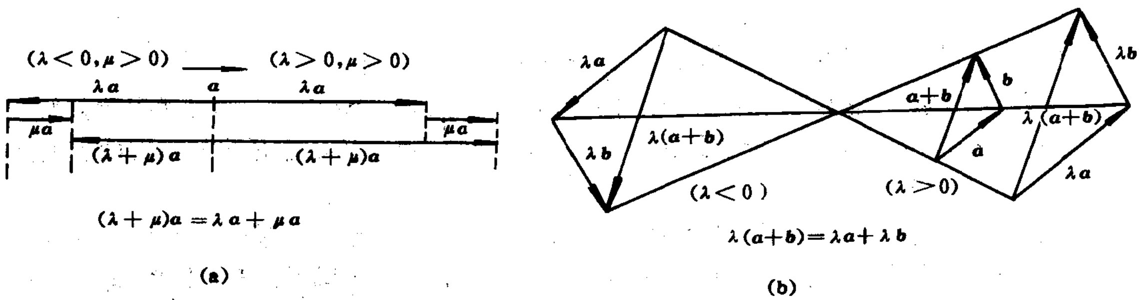


图 7.6

ox 方向上的单位向量．试证：

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i}$$

［证］ 当 $x_2 > x_1$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 ox 轴同向．因为 $|\overrightarrow{P_1P_2}| = x_2 - x_1$，所以，根据向量与数的乘积，有 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i}$.

当 $x_2 < x_1$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 ox 轴反向．因为 $|\overrightarrow{P_1P_2}| = x_1 - x_2$，所以 $\overrightarrow{P_1P_2} = -(x_1 - x_2)\boldsymbol{i} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i}$.

例 2 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，那末当且仅当 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，即 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$，其中 λ 为一实数．

［证］ 如果有一实数 λ，使 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$，那末由定义知 $\boldsymbol{a} \parallel \lambda\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$，令 $|\lambda| = |\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|$，由此得 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ 的正负取决于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是同向还是反向．

例 3 化简 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

［解］ $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ （结合律）

$= \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}$ （交换律）$= (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b})$ （结合律）

$= (1 + 2)\boldsymbol{a} + (1 - 1)\boldsymbol{b}$ （分配律）$= 3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = 3\boldsymbol{a}$ （定义）

应当指出，当有关系式 $= \lambda\boldsymbol{b}$（λ 实数）成立时，也称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线．

还应注意，像 $2/\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}$ 等式子都是没有意义的，即不能用向量去除一个数或向量．

习　题　7-1～7-2

1．回答下列各问题：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 有共同的起点，当向量 $\boldsymbol{a}$ 绕共同的起点转过一个角 α 后，恰与向量 $\boldsymbol{b}$ 重合，问 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 成立吗？为什么？

(2) 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 能否构成一个三角形？$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 能否构成一个三角形？

(3) 作用于同一点的两个力，它们合力的大小何时为零？设光滑的桌面上有一物体，力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 同时作用于物体上的一点 P 而物体不动，问 $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2$，对吗？

(4) 从 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 是否可以推出 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$？反过来，从 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ 是否可以推出 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$？

(5) 零向量与单位向量各有什么特征？试写出在非零向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量．

2．向量的线性运算满足些什么规律？利用线性运算化简下列各式：

(1) $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})$；　　(2) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b} + \dfrac{\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}}{5}\right)$；

(3) $(m - n)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (m + n)(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$，其中 m 与 n 为实数．

7-3　向量在空间有向直线上的投影

以上两节我们是从几何的角度对向量及其线性运算进行讨论的．为了要用代数的方法对向量进行研究，需要引入向量坐标这一概念．建立这一概念的依据是向量在有向直线上的投影．

先来说明什么是空间两有向直线的夹角．设 L_1 与 L_2 是空间两条有向直线，如果它们相交，必在同一平面内．把 L_1 与 L_2 的夹角 θ 规定为它们正向之间不大于 π 的角，即 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. 如果 L_1 与 L_2 不相交，那末在空间任意取定一点，通过该点作两条有向直线，分别与 L_1 和 L_2 平行且同向，我们把所作的两条相交有向直线的夹角作为 L_1 与 L_2 的夹角．如果 L_1 与 L_2 平行且方向相同，那么显然 $\theta = 0$；方向相反时，$\theta = \pi$(图 7.7).

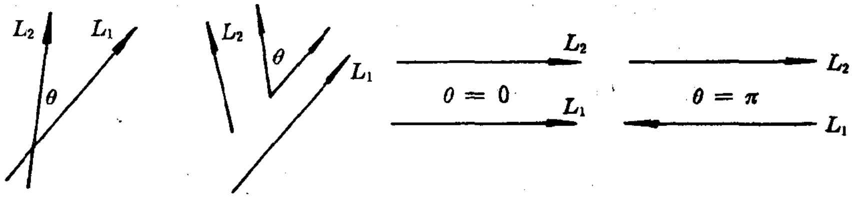
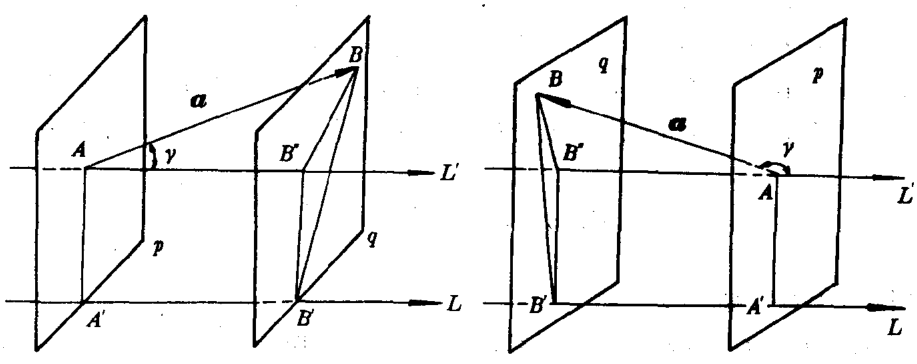


图 7.7

两个向量的夹角或一个向量与一条有向直线的夹角也作如上的规定．

下面来阐释向量在有向直线上的投影．

设在空间给定向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ 与一条有向直线 L. 过 A 与 B 分别作 L 的垂直平面 p 与 q，交 L 于 A' 与 B'(图 7.8). 点 A' 与 B' 分别称为点 A 与 B 在 L 上的投影．



(a)　　　　　　　　(b)

图 7.8

定义　设向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ 的起点 A 与终点 B 在有向直线 L 上的投影分别为 A' 与 B'，L 上的有向线段 $A'B'$ 的长度用 $|A'B'|$ 表示，那末 $A'B'$ 的值(即当 $A'B'$ 与 L 同向时等于 $|A'B'|$，反向时等于 $-|A'B'|$) 称为 $\boldsymbol{a}$ 在 L 上的投影，记作$(\boldsymbol{a})_L$. 即

$$(\boldsymbol{a})_L = \begin{cases} |A'B'|, & \text{当 } A'B' \text{ 与 } L \text{ 同向①} \\ -|A'B'|, & \text{当 } A'B' \text{ 与 } L \text{ 反向} \end{cases}$$

① 如果用有向线段 $A'B'$ 的记号同时也表示它的值，那末 $(\boldsymbol{a})_L = A'B'$.

根据这个定义，可知向量在有向直线上的投影是一个数量．为了方便，常常把$(\boldsymbol{a})_L$简记为a_L.

我们有两条关于投影的定理．

定理一　向量$\boldsymbol{a}$在有向直线L上的投影是

$$\boxed{(\boldsymbol{a})_L = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma} \tag{7}$$

其中γ为向量$\boldsymbol{a}$与有向直线L的夹角．

［证］　过A作与L平行且同向的有向直线L'，与平面q相交于B''(图7-8)．由于L与L'平行，所以L'也垂直于平面q. 直角三角形$AB''B$位于$\boldsymbol{a}$与L'所决定的平面内．

当$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$时，由图7.8(a)可知$(\boldsymbol{a})_L=|A'B'|=|AB''|$. 但在直角三角形$AB''B$内．$|AB''|=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$，从而有

$$(\boldsymbol{a})_L = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

当$\dfrac{\pi}{2}<\gamma<\pi$时，由图7.8(b)可知$(\boldsymbol{a})_L=-|A'B'|=-|AB''|$，但在直角三角形$AB''B$内，$|AB''|=|\boldsymbol{a}|\cos(\pi-\gamma)=-|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$，从而也有

$$(\boldsymbol{a})_L = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

当$\gamma=0$时，显然有$(\boldsymbol{a})_L=|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$；当$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$时，$(\boldsymbol{a})_L=0=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$；当$\gamma=\pi$时，$(\boldsymbol{a})_L=-|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$.

所以(7)式成立．

定理一中的有向直线L也可以是一个向量$\boldsymbol{b}$，这时γ为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角．我们把$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影记作$(\boldsymbol{a})_b$或简记为a_b，即有$a_b=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$. 同样，$b_a=|\boldsymbol{b}|\cos\gamma$.

由定理一知，两个相等的向量在同一条数轴上的投影是相等的．

定理二　有限个向量的和在有向直线L上的投影等于每个向量在L上投影的和，即

$$\boxed{(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)_L=(\boldsymbol{a}_1)_L+(\boldsymbol{a}_2)_L+\cdots+(\boldsymbol{a}_n)_L} \tag{8}$$

［证］　由图7.9可知

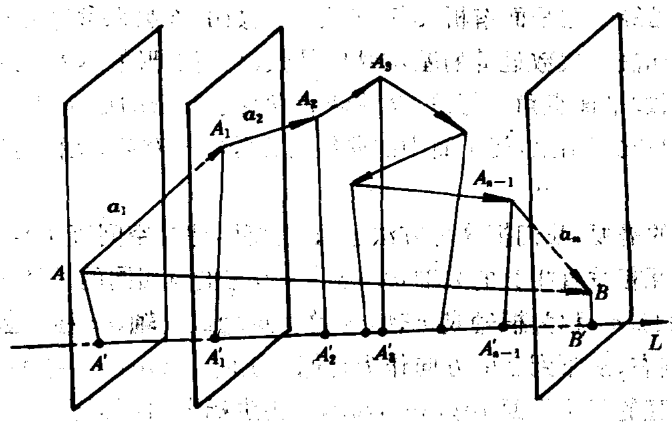


图7.9

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)_L=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}B})_L=(\overrightarrow{AB})_L=A'B'$$

又，
$$(\boldsymbol{a}_1)_L+(\boldsymbol{a}_2)_L+\cdots+(\boldsymbol{a}_n)_L=(\overrightarrow{AA_1})_L+(\overrightarrow{A_1A_2})_L+\cdots+(\overrightarrow{A_{n-1}B})_L$$

$$=A'A'_1+A'_1A_2'+\cdots+A'_{n-1}B' \quad \text{(有向线段结合法则)}$$
$$=A'B'$$

所以等式(8)成立．

例 设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 的端点 A 与 B 在数轴 u 上的投影 A' 与 B' 的坐标分别为 u_A 与 u_B，试证：$(\boldsymbol{a})_u=u_B-u_A$.

［证］ 因为向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影就是 u 轴上有向线段 $A'B'$（图 7.10）的值，而有向线段 $A'B'$ 的值：

$$A'B'=oB'-oA'=u_B-u_A$$

所以 $(\boldsymbol{a})_u=u_B-u_A$.

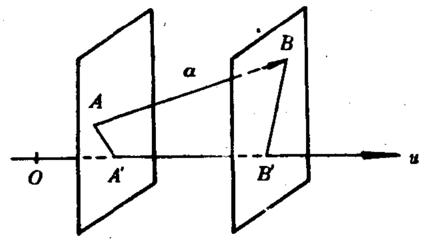


图 7.10

习　题　7-3

1. 向量在有向直线上的投影是向量还是数量？两个向量如果在给定的一条有向直线上的投影相等，问这两个向量是否相等？
2. 证明：$(\lambda\boldsymbol{a})_L=\lambda(\boldsymbol{a})_L$.

7-4　空间直角坐标系

我们在中学里已经学过平面解析几何，它是用代数的方法来解决几何问题．促成代数与几何相结合的是坐标法．代数运算的基本对象是数，几何图形的基本元素是点．数与点本来是各不相涉的，但通过平面直角坐标系，却使两者发生了紧密的联系，即平面上的点与一对有序实数一一对应．在此基础上，使平面中的曲线与方程一一对应，从而可以应用代数方法去解决几何问题．

为了以后学习的需要，我们把这种方法运用到空间，建立空间直角坐标系．

在空间作三条互相垂直相交的数轴 ox，oy 与 oz，它们有相同的长度单位，它们的交点 o 就是**坐标原点**（图 7.11）．ox 称为**横轴**或 **x 轴**，oy 称为**纵轴**或 **y 轴**，oz 称为**竖轴**或 **z 轴**，通常分别取从后到前，从左到右，从下到上的方向作为它们的正向．ox，oy，oz 统称为**坐标轴**．三个坐标轴两两决定互相垂直的三个平面 xoy，yoz，zox，称为**坐标平面**．这三个平面把空间分为八个部分，**称为卦限**．各卦限可以逐一编号，以资区别．把在 xoy 坐标平面之上、yoz 坐标平面之前，zox 坐标平面之右的卦限称为**第一卦限**．在 xoy 坐标平面之上的其余三个卦限，按逆时针方向依次称为第二、第三、第四卦限．在 xoy 坐标平面之下的四个卦限，在第一卦限下面的卦限称为第五卦限，其余按逆时针方向依次称为第六、第七、第八卦限（图 7.11）．

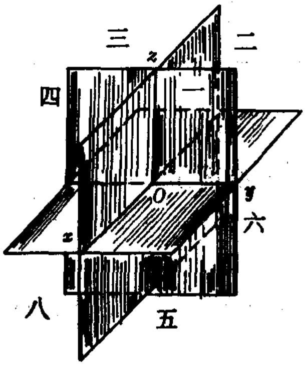


图 7.11

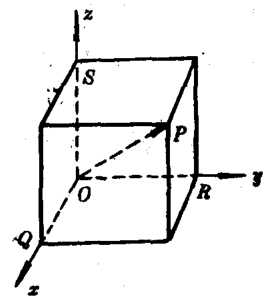


图 7.12

设在空间任取一点 P，以原点 o 为起点，P 为终点作向量 oP（图 7.12）. 我们把 oP 在三条坐标轴上的投影，即有向线段 oQ,oR,oS 的值，也就是 Q,R,S 在各自坐标轴上的坐标，称为 P 点的坐标，分别记作 x,y,z，即

$$oQ = x,\quad oR = y,\quad oS = z$$

并把它们合写在一个括号里，如 (x,y,z). 第一个数 x 叫做 P 点的**横坐标**或 x 坐标；第二个数 y 叫做 P 点的**纵坐标**或 y 坐标；第三个数 z 叫作 P 点的**竖坐标**或 z 坐标. 所以对应于空间的每一点 P，必有一组确定的坐标 (x,y,z).

反之，已知一组实数 x,y 与 z，我们可以在 x 轴上作 $oQ = x$，在 y 轴上作 $oR = y$，在 z 轴上作 $oS = z$，然后通过 Q,R 与 S 分别作 x 轴，y 轴与 z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面的交点 P 便是具有坐标 (x,y,z) 的点（图 7.12）. 所以对应于一组实数 (x,y,z) 必有空间的一个确定点 P.

这样，空间的点的集合就与一组三个有序的实数的集合构成一一对应的关系. 这就是使空间的点与实数相结合的一种坐标法，使用这种坐标法时所取定的三条互相垂直相交的数轴，构成一个**空间直角坐标系**.

我们把图 7.12 的坐标系称为**右手系**，因为如果用右手的拇指表示 x 轴的正向，食指表示 y 轴的正向，那末中指就是 z 轴的正向了（图 7.13(a)）. 如果在图 7.12 中把 x 轴与 y 轴对调，即如图 7.13(b) 所示，这样的坐标系须用左手来表示，因而称为**左手系**. 在本书中始终采用**右手系**.

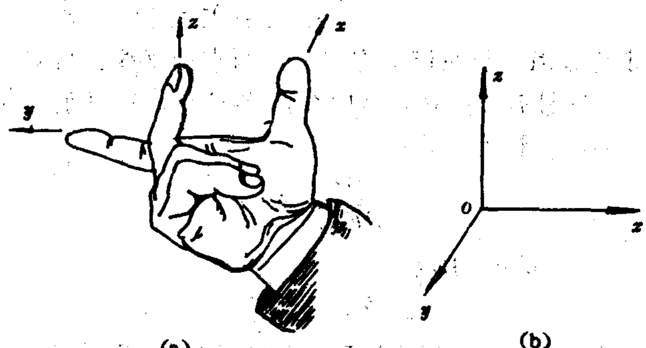


图 7.13

习 题 7-4

1. 试把八个卦限内的点的坐标的正负填入下表：

卦　　限	一	二	三	四	五	六	七	八
坐标的正负	(+,+,+)							

2. 画出下列各点在空间直角坐标系中的位置：

$(3,2,-1)$；　$(0,2,1)$；　$(3,0,0)$；　$(-2,-1,0)$.

3. 如果 P 点的坐标 (x,y,z) 具有下列条件时，它的位置在哪里？

(1) $x=0$；　(2) $y=0,\ z=0$；　(3) $x=2$；

(4) $x=2, y=-1$；　(5) $y=x$；　(6) $x=a,\ z=b$.

4. 求出点 (a,b,c) 关于(1) 原点；(2) 坐标平面；(3) 坐标轴对称的点的坐标.

7-5　两点间距离与定比分点公式

正像在平面内一样，我们利用空间直角坐标系来计算空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离 D，并把线段 P_1P_2 分成定比的分点的坐标.

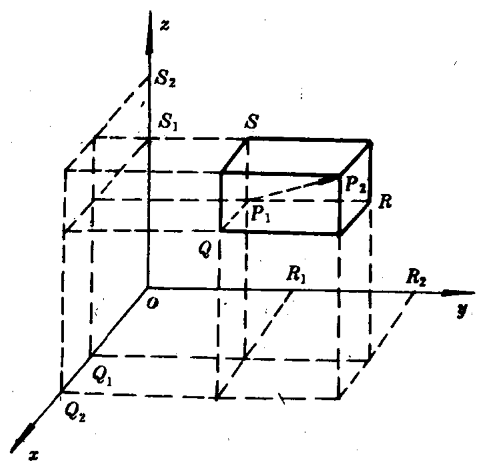


图 7.14

两点间的距离　以 P_1 与 P_2 的连线为对角线作平行六面体，那末 P_1 与 P_2 之间的距离就是向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模(图 7.14)：

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = |P_1Q|^2 + |P_1R|^2 + |P_1S|^2$$

由于向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在三条坐标轴 ox,oy,oz 上的投影分别为

$$Q_1Q_2 = x_2 - x_1,\quad R_1R_2 = y_2 - y_1,\quad S_1S_2 = z_2 - z_1$$

而 $|P_1Q| = |Q_1Q_2|, |P_1R| = |R_1R_2|, |P_1S| = |S_1S_2|$，所以所求 P_1 与 P_2 之间的距离为

$$\boxed{D = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} \tag{9}$$

定比分点　设在连接 P_1 与 P_2 两点的直线上另有一点 $P(x,y,z)$(图 7.15)，使得有向线段 P_1P 与 PP_2 的值之比为 λ，但 $\lambda \neq -1$，即有

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$$

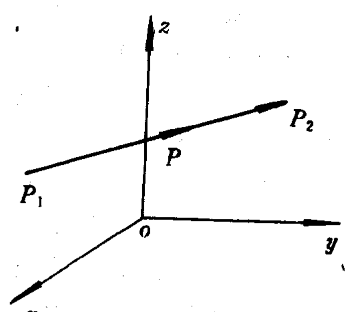


图 7.15

由于 $P_1P = \lambda PP_2$，所以

$$\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$$

把上式两端的向量分别投影到三条坐标轴上，得[参见 7-3 习题 2]

$$(\overrightarrow{P_1P})_x = (\lambda \overrightarrow{PP_2})_x = \lambda(\overrightarrow{PP_2})_x$$
$$(\overrightarrow{P_1P})_y = (\lambda \overrightarrow{PP_2})_y = \lambda(\overrightarrow{PP_2})_y$$
$$(\overrightarrow{P_1P})_z = (\lambda \overrightarrow{PP_2})_z = \lambda(\overrightarrow{PP_2})_z$$

由此三式分别得

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

解出 x,y 与 z，得

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}} \tag{10}$$

当 $\lambda=1$ 时，$P_1P=PP_2$，所以 P 为线段 P_1P_2 的中点，它的坐标是

$$\boxed{x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)} \tag{11}$$

例 1 设 P 点在 x 轴上，它到点 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求 P 点的坐标．

[解] 由于 P 点在 x 轴上，因此它的坐标可设为 $(x,0,0)$，根据距离公式，有

$$|PP_1|=\sqrt{(x-0)^2+(0-\sqrt{2})^2+(0-3)^2}=\sqrt{x^2+11}$$

$$|PP_2|=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{x^2+2}$$

依题意，$|PP_1|=2|PP_2|$，故 $\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$，从而得 $x=\pm 1$. 所以在 x 轴上符合题意的点有两点，它们的坐标是：$(1,0,0)$ 与 $(-1,0,0)$.

例 2 已知两点 $P_1(-2,5,9)$ 与 $P_2(7,-7,-12)$，求 P_1P_2 上两个三等分点的坐标．

[解] 设两个三等分点为 T_1 与 T_2，如图 7.16 所示．由于 $\frac{P_1T_2}{T_2P_2}=2$，所以对分点 T_2 来说，定比 $\lambda=2$. 设 T_2 的坐标为 (x,y,z)，由公式(10)可得

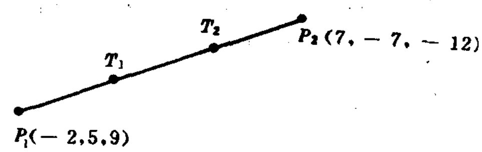


图 7.16

$$x=\frac{-2+2\times 7}{1+2}=4,$$

$$y=\frac{5+2\times(-7)}{1+2}=-3,\qquad z=\frac{9+2\times(-12)}{1+2}=-5$$

即 T_2 的坐标为 $(4,-3,-5)$.

对分点 T_1 来说，定比 $\lambda=1/2$，我们用同样的方法可求出它的坐标．但我们也可以把 T_1 看作 T_2 与 P_1 连线的中点．用中点公式求得它的坐标为 $(1,1,2)$.

习　题　7-5

1. 证明：$P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,1)$，$P_3(3,1,2)$ 为等边三角形的三个顶点．
2. 已知点 $(0,0,0)$，$(2,0,0)$，$(0,-4,0)$，$(0,0,4)$ 在同一个球面上，试求该球的半径．
3. 已知三角形的三个顶点为 $P_1(2,5,0)$，$P_2(11,3,8)$，$P_3(5,1,12)$，求三角形重心的坐标．

7-6　向量的分解

设在空间直角坐标系中有一向量 $\boldsymbol{a}$，把 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到坐标原点，然后过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 P 作三个与坐标轴垂直的平面，它们与三个坐标平面构成一个长方体(图 7.17). 根据向量加法，

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AP}$$

但 $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{oR}, \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{oS}$，所以

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{oQ} + \overrightarrow{oR} + \overrightarrow{oS}$$

这就是说，任何向量可以分解为三个与坐标轴平行的向量之和，这三个向量称为**沿坐标轴的分向量**．

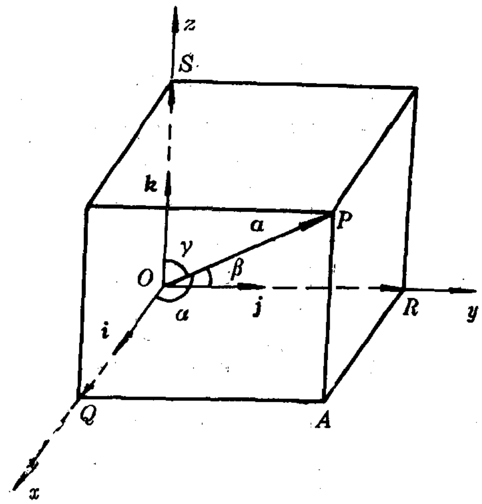


图 7.17

令 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为沿 x 轴，y 轴，z 轴正向的单位向量，并且称它们为在直角坐标系中的**基本单位向量**．根据 7-2 节向量与数的乘法，得 $\overrightarrow{oQ} = a_x\boldsymbol{i}$(参见 7-2 节例 1)，其中 a_x 是有向线段 oQ 的值，它的正负取决于 $\overrightarrow{oQ}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 的方向相同或相反．换句话说，a_x 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在横轴上的投影．同理，得 $\overrightarrow{oR} = a_y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{oS} = a_z\boldsymbol{k}$，其中 a_y 与 a_z 分别为 $\boldsymbol{a}$ 在纵轴与竖轴上的投影．因此得向量 $\boldsymbol{a}$ 的**分解式**：

$$\boxed{\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}} \qquad (12)$$

向量的坐标与方向余弦 我们知道，要确定一个向量就要知道它的模与方向．现在来讨论怎样从向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解式(12) 来求 $\boldsymbol{a}$ 的模与方向．

由于分解式(12)中的 a_x, a_y, a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴 ox, oy, oz 上的投影，所以由公式(9)得

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (13)$$

其次，由 7-3 节投影定理一知

$$\boxed{a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma} \qquad (14)$$

其中 α, β, γ 分别为 $\boldsymbol{a}$ 的方向与三条坐标轴 ox, oy, oz 正向之间的夹角($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$) 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**．方向角的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**．以(13) 式代入(14) 式．得

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}} \qquad (15)$$

由此可见，已知一个向量的投影，便可由(13)与(15)式确定向量的模与方向；反过来，知道了向量的模与方向，便可由(14)式确定向量的投影．因此，向量 $\boldsymbol{a}$ 与它的投影即三个数 a_x, a_y, a_z 之间成一一对应关系，犹如点与它的坐标 x, y, z 之间成一一对应关系一样，所以我们称分解式(12) 中的三个数 a_x, a_y, a_z 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**，记作

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**．有时也称 a_x, a_y, a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**分量**．

由(15) 式可知，单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 的坐标就是它的方向余弦：

$$\boldsymbol{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

特别，基本单位向量的坐标是：

$$\boldsymbol{i} = \{1,0,0\}, \quad \boldsymbol{j} = \{0,1,0\}, \quad \boldsymbol{k} = \{0,0,1\}$$

以 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量的坐标是：

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

把(15)式中的三个式子各自两边平方后再相加，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=1$$

所以任意一个非零向量的方向余弦的平方和等于1，即

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1} \tag{16}$$

从方向角与方向余弦的定义可知，与向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 方向相反的向量 $-\boldsymbol{a}$ 的方向角为 $\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma$，从而方向余弦 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta,\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma$ 都要改变正负号，由(14)式知，它的坐标也要改变正负号，即

$$-\boldsymbol{a}=\{-a_x,-a_y,-a_z\}$$

例1 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量的分解式.

［解］ 所求的单位向量有两个，一个与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，另一个与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.
由于 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$，因此

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{6}{11}\boldsymbol{i}+\frac{7}{11}\boldsymbol{j}-\frac{6}{11}\boldsymbol{k}$$

$$-\boldsymbol{a}^0=-\frac{6}{11}\boldsymbol{i}-\frac{7}{11}\boldsymbol{j}+\frac{6}{11}\boldsymbol{k}$$

例2 设有向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，$|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$，它与 x 轴与 y 轴的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{\pi}{4}$. 如果 P_1 的坐标为 $(1,0,3)$，求 P_2 的坐标.

［解］ 首先，让我们来确定 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向，设 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角为 α,β,γ，于是 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，由(16)式知

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1$$

从而有 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$，即 $\gamma=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. 所以这样的向量有两个.

设 P_2 的坐标为 (x,y,z) 那末根据公式(14)，有

$$x-1=2\cos\frac{\pi}{3},\quad y-0=2\cos\frac{\pi}{4},\quad z-3=2\cos\frac{\pi}{3}$$

或 $$x-1=2\cos\frac{\pi}{3},\quad y-0=2\cos\frac{\pi}{4},\quad z-3=2\cos\frac{2\pi}{3}$$

由此得 P_2 的坐标为 $(2,\sqrt{2},4)$ 或 $(2,\sqrt{2},2)$.

空间直线的方向数 和向量一样，空间一条有向直线 L 的正向也与三条坐标轴的正向有三个夹角(在0与 π 之间) α,β,γ，它们的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 L 的方向余弦，公式(16)也成立.

与这条有向直线 L 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 成比例的三个数 A,B,C，称为直线 L 的方向数，即有

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=A:B:C$$

由此可知，