高等数学

第二卷

R·罗德 著

邓立生　秦裕瑗 译

人民教育出版社

高 等 数 学

第 二 卷

R. 罗 德 著
邓立生 秦裕瑗译

本书系根据莱比锡托伊布讷出版社（B. G. Teubner Verlagsgesellschaft）出版的罗德（R. Rothe）著“高等数学”（Höhere Mathematik）第二卷 1958 年第11版译出。可供我国高等院校理工科有关专业参考。

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。

高等数学

第二卷

R. 罗德 著

邓立生　秦裕瑗 译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）
民族印刷厂印装
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

书号13012·0211 开本787×1092 1/32 印张7 12/16
字数 200,000 印数 8,501—285,000 定价 0.60 元
1962 年 5 月第 1 版 1978 年 11 月北京第 4 次印刷

序　言

本书第二卷包括：第一章是积分学的进一步闡述；第二章讲无穷級数比較詳尽；第三章讲依賴于一个参数的积分，綫积分以及复数域中的积分，最末的第四章則是讲行列式与矢量及其应用的。本卷中共有 86 个练习题分成七批。本卷的其他练习题与应用举例（包括它們的解答）讀者可以在第四卷第三至第四部分找到。

这一版中改正了第一版以来印刷上的錯誤及某些較小的前后不一致的地方，改进了一些叙述并且作了許多补充。

本书从第八版起增添了“福里哀級数的唯一性定理”一节，而以后的第九至第十一版基本上沒有变动。

讀者多次来函指出关于本书前后不一致以及需要改进的地方，这些意见对我們很有好处，謹向他們深致謝意。

W. Schmeidler

柏林，1957 年 11 月

目　录

本书中較难的练习題标有符号†。

第一章　积分学

§1. 求不定积分的一般法则

1. 积分法通常称为“微分法的逆运算”。这句話要这样来理解：設 $f(x)$ 是实变数 x 的給定的单值函数，微分法的任务便是求出导数 $f'(x)$（只要 $f(x)$ 可微）；反之，积分法的任务是定出所有的函数 $J(x)$，使其导数为已給函数 $f(x)$，或者說，使其滿足微分方程

$$J'(x)=f(x) \text{ 或 } dJ(x)=f'(x)\,dx. \tag{0}$$

由微分学可知，具有相同导数的函数之間只可能相差一个常数。由此，我們以下式来表示所有滿足微分方程(0)的那一批函数

$$\int f(x)\,dx=J(x)+C, \tag{1}$$

其中 C 表一任意常数。$\int f(x)\,dx$ 称为 $f(x)\,dx$（或簡称为 $f(x)$）的不定积分（参閱第一卷，§13）。

式(0)和式(1)的含义是完全相同的；式(1)只是形式地表出(0)的解，然而，要从給定的 $f(x)$ 去求出 $J(x)$，这一問題并未因此得到解决。暂时，我們还只能用微分法来检驗式(0)是否确实滿足。

在这一节中，我們将回顾在第一卷，§13中所讲积分法中的一些基本定理，并在有些方面作进一步的闡述。

2. 下列**基本积分与积分法则**可以直接由微分学中相应的公式推得（参閱第一卷，§13, 2 和 3），而且实质上只是它們的另一种写法。

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (\text{当 } n+1\neq 0). \tag{2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \tag{3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \tag{4}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C. \tag{5}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \tag{6}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C. \tag{7}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{9}$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C. \tag{10}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C. \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C. \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C. \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C = -\operatorname{arc}\cos x + c. \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + C = -\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x + c. \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{ar}\sinh x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar}\cosh x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C. \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar}\operatorname{tgh} x + C = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

$$=\operatorname{ar\,ctgh} x+c=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+c. \tag{18}$$

附言：*a*) 自然只有当 x 所取的实数值使积分号下的函数与公式的右端同时有意义时，上面这些公式才是有意义的。例如，(3) 仅当 $x>0$ 时才是正确的。然而，設 $x=-|x|<0$，我們有

$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{d}{dx}\ln(-x)=\frac{1}{(-x)}\cdot(-1)=\frac{1}{x},$$

于是
$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

显然，該式对于所有异于零的 x 的实数值都是适合的。同样，(14)仅当 $|x|<1$ 时适合，而(17)仅当 $|x|>1$ 时适合(还可参閱下面的 8)。

b) 上面各公式中，記为 C 或 c 的积分常数恒为一完全任意的，且与 x 无关的常数。但若在积分号下含有一个参数，則积分"常数"亦为該参数的函数；例如，在(2)中 $C=C(n)$ 是参数 n 的函数。C 确实是个常数的情形，当然也包括在 $C=C(n)$ 这一般的情形內。

$$\int A\,f(x)\,dx=A\int f(x)\,dx \quad (A\text{ 为常数}), \tag{I}$$

$$\int (u(x)+v(x))\,dx=\int u(x)\,dx+\int v(x)\,dx$$

$$(\text{分解公式}), \tag{II}$$

$$\int u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,du(x)$$

$$(\text{分部积分公式}), \tag{III}$$

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

(引入新的变量 $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$；这里 $x=\varphi(t)$ 假定是可微的且有单值的反函数)， (IV)

定积分为不定积分在其积分上下限处两个值的差：

$$F(a,b)=\int_a^b f(x)\,dx=[J(x)]_a^b=J(b)-J(a) \tag{V}$$

(参閱第一卷第 88 頁)。在那里对 $f(x)$ 所作的假定，即在区間

$a \leqslant x \leqslant b$ 上 $f(x)$ 須是連續的，现在仍暂时保留。定积分与积分变量是无关的，例如，我們仍然有

$$F(a, b)=\int_{a}^{b} f(u)\, du.$$

因若 $F(a, x)=\int_{a}^{x} f(u)\, du$，則有 $\frac{dF(a, x)}{dx}=f(x)$.

以上諸法則在所給函数 $f(x)$ 总有一个不定积分的条件下是已經証明了的。我們假定，这些公式的用法，讀者已多少懂得一些。

3. **复变函数的积分** 在第一卷，§ 30, 1 中，已經說明了一个复变数 z 的解析函数 $F(z)$ 以及它的导数 $F'(z)$ 的意义。若是 $F'(z)=f(z)$，則称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的一个积分或原函数。显然，前面讲过的积分法則，全都可以照样用在复变数的解析函数上。对于复变函数的积分，在 2 的附言 a)中所作的一些限制大都可以去掉，例如公式(3)对于所有 $x \neq 0$ 都成立，而公式(14)和(17)則对于所有 $x^2 \neq 1$ 都成立；并且，我們还可以将表中的某些积分化为其中别的积分，例如，若在(18)中設 $ix=z$, $i\,dx=dz$，这一积分就化为(15)中的积分；因为

$$\int \frac{dx}{1-x^2}=-i\int \frac{dz}{1+z^2}=-i \operatorname{arc\,tg} z+C=-i \operatorname{arc\,tg} ix+C.$$

由于(第一卷，§ 30, (19))

$$i \operatorname{arc\,tg} z=\ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}},$$

于是，若限于考虑反正切函数的主值，就有

$$-i \operatorname{arc\,tg} ix=\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

它与反正切函数的其他的值只相差一个常数，而这一常数总可合

并于积分常数中；因而我們得到与公式(18)相同的結果。

4. 例 a) $J_1=\int(a+bx^p)^m x^{p-1}\,dx\,(bp\neq 0)$. 令 $a+bx^p=t$, $bpx^{p-1}\,dx=dt$, 于是，若 $m+1\neq 0$, 則有

$$J_1=\int t^m\frac{dt}{bp}=\frac{t^{m+1}}{bp(m+1)}+C=\frac{(a+bx^p)^{m+1}}{bp(m+1)}+C,$$

若 $m=-1$, 則

$$J_2=\int\frac{x^{p-1}}{a+bx^p}dx=\frac{1}{bp}\int\frac{dt}{t}=\frac{\ln t}{bp}+C=\frac{\ln(a+bx^p)}{bp}+C.$$

b) $J_3=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}$. 令 $a+bx^2=u^2$, $bx\,dx=u\,du$, 于是

$$J_3=\frac{1}{b}\int\frac{u\,du}{u}=\frac{u}{b}+C=\frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2}+C.$$

c) $J_4=\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. 令 $x=\sin\varphi$, $dx=\cos\varphi\,d\varphi$, 于是

$$J_4=\int\cos^2\varphi\,d\varphi=\int\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int d\varphi+\frac{1}{2}\int\cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+C,$$

所以 $$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C. \qquad (19)$$

并且 $$J_5=\int\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

d) $J_6=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$. 我們可以将它分解为

$$J_6=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

上式右端的第二个积分是 J_3 当 $a=1$, $b=-1$ 的情形，于是我們立即得到

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C. \qquad (20)$$

e) $J_m=\int x^m \ln x\,dx$. 由分部积分公式(III)，令 $u=\ln x$, $v=x^m\,dx$, 于是，若 $m+1\neq 0$, 则 $v=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, 我們有

$$J_m=\ln x\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1}-\frac{1}{m+1}\int x^m\,dx=$$

$$=\frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x-\frac{1}{m+1}\right)+C;$$

特别，当 $m=0$ 就有

$$\int \ln x\,dx=x(\ln x-1)+C. \tag{21}$$

但若 $m=-1$, 则

$$\int x^{-1}\ln x\,dx=\int \ln x\,d\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C.$$

下面的一般公式是值得注意的:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln f(x)+C. \tag{22}$$

$$\int f'(x)\,f(x)\,dx=\frac{1}{2}f^2(x)+C. \tag{23}$$

例如，設 $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, 則由(22)可得

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C. \tag{24}$$

如果在上式中以 $\frac{\pi}{2}-x$ 代替 x, 則容易得到

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C. \tag{25}$$

5. 递推公式 在許多情况下，含参数 n 的积分可化为另一相同形式的积分，使所含参数的值减小 1 或者 2。若 n 为一正整数，則接連化过几次以后常可求出积分来。

a) $J_n=\int e^{-x}x^n\,dx$. 由分部积分公式(III), 設 $u=x^n$, $v=-e^{-x}$, 则可得递推公式 $J_n=-x^ne^{-x}+nJ_{n-1}$, 由此

$$J_{n-1}=-e^{-x}x^{n-1}+(n-1)J_{n-2},\ \cdots,\ J_1=-e^{-x}\cdot x+J_0,$$

其中 $J_0=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C$。逐次代入可得

$$\int e^{-x}x^n\,dx=-e^{-x}(x^n+nx^{n-1}+$$
$$+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n!)+C. \tag{26}$$

我們还可将上式表为

$$\int e^{-x}x^n\,dx=-e^{-x}(x^n+(x^n)'+$$
$$+(x^n)''+\cdots+(x^n)^{(n)})+C; \tag{27}$$

若 $g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为某一整有理函数,则由上式我們不难得到

$$\int e^{-x}g(x)\,dx=-e^{-x}(g(x)+g'(x)+$$
$$+g''(x)+\cdots+g^{(n)}(x))+C. \tag{28}$$

b) 設 $S_n=\int \sin^n x\,dx(n=0, 1, 2, \cdots)$, 应用分部积分公式可得

$$S_n=\int \sin^{n-1}x\,d(-\cos x)=$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+\int (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx,$$

在上式右端代入 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, 于是有

$$S_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(S_{n-2}-S_n),$$

由此得递推公式

$$S_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}S_{n-2}\quad (n\geqslant 2). \tag{29}$$

这样在 n 是偶数时，能把 S_n 化到 $S_0=\int dx=x+C$; 而当 n 为奇数时，能把 S_n 化到

$$S_1=\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$$

假如从 $x=0$ 到 $x=\frac{\pi}{2}$ 求积分，则因

$$\text{当 } n\geqslant 2 \text{ 时，} \left[\sin^{n-1} x\cos x\right]_0^{\pi/2}=0,$$

故
$$S_n=\frac{n-1}{n}S_{n-2},\quad S_0=\frac{\pi}{2},\quad S_1=1.$$

因而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数，}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数。}\end{cases}\tag{30}$$

若在(30)中分别代入 $x=\operatorname{arc}\cos z$ 及 $x=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} z$, 则不难得到

$$\int_0^1(1-z^2)^n\,dz=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)},\tag{30a}$$

$$\int_0^\infty\frac{dz}{(1+z^2)^n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2};\tag{30b}$$

(30b)中的上限 ∞ 对应于值 $x=0$(参閱 § 10)。

6. 例 設 m,λ,μ 为整数，于是

$$\int_0^\pi\cos mx\,dx=\left[\frac{\sin mx}{m}\right]_0^\pi=\frac{\sin m\pi}{m}=0,\quad \text{当 } m\neq0,$$
$$=\pi,\quad \text{当 } m=0.\tag{31}$$

$$\int_0^\pi\sin mx\,dx=\left[\frac{-\cos mx}{m}\right]_0^\pi=\frac{1-(-1)^m}{m}\tag{32}$$

$$=0, \quad \text{当 } m\neq 0 \text{ 且为偶数},$$

$$=\frac{2}{m}, \quad \text{当 } m \text{ 为奇数},$$

$$=0, \quad \text{当 } m=0.$$

积分

$$\int_0^\pi \cos\lambda x\cos\mu x\,dx, \qquad \int_0^\pi \sin\lambda x\sin\mu x\,dx,$$

$$\int_0^\pi \cos\lambda x\sin\mu x\,dx$$

可以分别应用下列恒等式化为上面的积分：

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta),$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta),$$

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta).$$

由此可得

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\pi \cos\lambda x\cos\mu x\,dx \\ \displaystyle\int_0^\pi \sin\lambda x\sin\mu x\,dx\end{array}\right\}=\begin{cases}0, & \text{当 } \lambda\neq\mu, \quad (33)\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } \lambda=\mu\neq 0; \quad (34)\end{cases}$$

若 $\lambda=\mu=0$，則在(33)中的积分取得值 π，而在(34)中的积分則取得值 0。我們还可得到

$$\int_0^\pi \cos\lambda x\sin\mu x\,dx=\begin{cases}0, & \text{当 } \lambda=\mu \text{ 或者当 } \lambda, \mu \text{ 同为偶数或同为奇数},\\ \dfrac{2\mu}{\mu^2-\lambda^2}, & \text{当 } \lambda, \mu \text{ 不同时为偶数或不同时为奇数。}\end{cases} \quad (35)$$

同样，我們可以得到下列結果：