

上海市

高中数学竞赛

试题及解答

(1956-2000)



SHANGHAISHI GAOZHONG SHUXUEJINGSAI SHITI JI JIEDA



上海教育出版社

上海市
高中数学竞赛
试题及解答
(1956—2000)

上海市数学会 编



SHANGHAISHI GAOZHONG SHUXUEJINGSAI SHITI JI JIEDA



上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

上海市高中数学竞赛试题及解答: 1956~2000 / 上海市数学会编. —上海: 上海教育出版社, 2002. 1
ISBN 7-5320-7732-2

I. 上... II. 上... III. 数学课—高中—竞赛题
IV. G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第000167号

上海市高中数学竞赛试题及解答

1956—2000

上海市数学会编

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

(上海永福路123号)

(邮政编码: 200031)

各地新华书店经销

商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 9 插页 4 字数 220,000

2002年1月第1版 2002年1月第1次印刷

印数 1—5,150本

ISBN 7-5320-7732-2/G·7836 定价: (软精)16.70元

前 言

1956年,根据中国数学会的指示,上海市数学会在市教育局和市科联的支持下,于当年和次年上半年,由数学家苏步青院士亲自主持举办了上海市第一届和第二届中学生数学竞赛。这两次竞赛对鼓舞青年学生向科学进军和提高中学数学教学质量都起到了良好的推动作用。当时参加的对象是本市普通中学、业余中学及速成中学高二、三年级的在校学生;竞赛方式采用初赛、复赛、决赛三级制。初赛由各校自行命题,选拔优胜者参加复赛。复赛和决赛由市竞赛委员会举办。上海市数学会中教委员会对这两次竞赛专门作了小结,并编辑出版了《上海市1956—1957年中学生数学竞赛习题汇编》(新知识出版社,1958)一书。

随后在1958年、1960年、1962年、1963年又先后举办了上海市第三、四、五、六届中学生数学竞赛,为国家发掘了一大批数学人才。1966年由于“文革”中断了竞赛工作。

1978年恢复举办了上海市第七届中学生数学竞赛,并让50名优胜者参加当年全国部分省市中学数学竞赛。在这次全国性的数学竞赛中,上海的学生取得了优异的成绩。当年全国共评选出57名优胜者(其中一等奖5名,二等奖20名,三等奖32名),上海占了25席。鲁迅中学的李骏获第一名;长风中学的徐幼干、虹口中学的王银平等12名学生获二等奖;培光中学的陈宏民等12名学生获三等奖。

1978年后,市数学会在每年上半年举办一次市级高中数学竞赛,参加对象以高三学生为主,也有少量的高一、高二尖子学生。

本书汇编了从上海市第一届中学生数学竞赛到2000年的上海市高中数学竞赛共29届的全部试题及解答,作为上海市数学会50年工作回顾的一部分。其中部分试题及解答是首次发表的。从试题

的演变可以看到50年数学竞赛工作的轨迹。上海市的一些数学家和数学工作者为此付出了艰辛的劳动。历年参加上海市高中数学竞赛命题工作的有苏步青、陈传璋、孙泽瀛、程其襄、李锐夫、黄缘芳、范际平、雷垣、杨荣祥、应制夷、郑启明、唐秀颖、谢天唯、杨亚立、金志华、吴宗初、魏木生、凌康源、何声武、蔡天亮、刘鸿坤、黄宣国、舒五昌、熊斌、叶声扬、余应龙、许三保、李大元等。由于历时较长,这一长串的名单,难免有所遗漏,敬请有关同志见谅。

举办上海市中学生数学竞赛也是一个综合性的工作,除了命题以外,还有很多组织、阅卷、评定等繁重工作,其中有上海市数学会很多会员的无私奉献。“文革”后,在市中学生数学竞赛中,原市数学会中教委员会负责人赵宪初、唐秀颖同志起了相当重要的作用;市数学会专职人员薛福田同志承担了很多具体组织工作。特别是1987年上海市中学生业余数学学校成立后,竞赛工作都是由该校负责的。市数学会中教委员会主任顾鸿达同志,市中学生业余数学学校校长曾容同志和该校全体教练员、后勤人员在组织报名、试卷批阅、优胜者评定、奖品制作、发奖等方面作了很多仔细、卓越的工作。

上海市高中数学竞赛的举办还得到了不少企业,如爱朋思纺织品有限公司、鹏欣房地产公司、弘展置业有限公司、上海教育出版社、中学生报社等的资助。

我们在此向这些为上海市高中数学竞赛出过力的个人和企业表示由衷的感谢!

本书是以李大潜院士为理事长的上海市第八届理事会提议编纂的,并得到上海市数学会史料小组的指导和帮助。学会常务理事、中学特级教师李大元同志受上海市数学会的委托,具体负责并承担了收集、整理材料并编辑成书的全部工作,他的热情而有效的劳动使本书得以较高的质量早日面世。本书编纂过程中还得到了很多同志的帮助。例如,苏步青在第一届全国数学竞赛会颁奖大会上的讲话是李大潜院士提供的;附录一(历届上海市高中数学竞赛获奖前十名名单)

中前六届获奖名单是黄宣国教授提供的。值得一提的是,李大潜院士对本书的版式、附录内容的取舍、前言的编写提出了宝贵的意见。在此一并致谢!

由于题解资料不齐,有些题目的解答是为编纂本书而重新做的,其中的缺点乃至错误祈望读者不吝指正。

上海市数学会

2001年8月

目 录

苏步青在第一届数学竞赛颁奖大会上的讲话(代序).....	1
1956 ⁺ 年试题	
第一试试题.....	5
第二试试题.....	5
第一试解答.....	6
第二试解答.....	11
1957年试题	
高二第一试试题.....	16
高三第一试试题.....	16
高二第二试试题.....	17
高三第二试试题.....	18
高二第一试解答.....	18
高三第一试解答.....	21
高二第二试解答.....	24
高三第二试解答.....	29
1958年试题	
试题.....	33
解答.....	34
1960年试题	
高一试题.....	39
高三试题.....	40
高一试题解答.....	41
高三试题解答.....	45
1962年试题	

试题	51
解答	51
1963 年试题	
第一试试题	55
第二试试题	55
第一试解答	57
第二试解答	59
1978 年试题	
第一试试题	61
第二试试题	62
第一试解答	62
第二试解答	65
1979 年试题	
第一试试题	70
第二试试题	70
第一试解答	71
第二试解答	77
1980 年试题	
第一试试题	81
第二试试题	81
第一试解答	82
第二试解答	85
1981 年试题	
第一试试题	90
第二试试题	91
第一试解答	92
第二试解答	96
1982 年试题	

第一试试题	101
第二试试题	102
第一试解答	103
第二试解答	108
1983 年试题	
第一试试题	113
第二试试题	114
第一试解答	115
第二试解答	119
1984 年试题	
第一试试题	122
第二试试题	124
第一试解答	125
第二试解答	130
1985 年试题	
第一试试题	135
第二试试题	137
第一试解答	138
第二试解答	145
1986 年试题	
第一试试题	150
第二试试题	153
第一试解答	154
第二试解答	162
1987 年试题	
第一试试题	170
第二试试题	172
第一试解答	173

第二试解答.....	173
1988 年试题	
第一试试题.....	178
第二试试题.....	179
第一试解答.....	181
第二试解答.....	181
1989 年试题	
第一试试题.....	185
第二试试题.....	186
第一试解答.....	188
第二试解答.....	188
1990 年试题	
第一试试题.....	192
第二试试题.....	194
第一试解答.....	195
第二试解答.....	196
1991 年试题	
第一试试题.....	200
第二试试题.....	202
第一试解答.....	204
第二试解答.....	204
1992 年试题	
第一试试题.....	209
第二试试题.....	211
第一试解答.....	212
第二试解答.....	212
1993 年试题	
第一试试题.....	216

第二试试题	218
第一试解答	219
第二试解答	219
1994 年试题	
第一试试题	222
第二试试题	224
第一试解答	225
第二试解答	225
1995 年试题	
试题	230
解答	231
1996 年试题	
试题	234
解答	235
1997 年试题	
第一试试题	238
第二试试题	240
第一试解答	241
第二试解答	242
1998 年试题	
试题	244
解答	245
1999 年试题	
试题	249
解答	250
2000 年试题	
试题	254
解答	255

附录一	上海市历届高中数学竞赛获奖前十名名单·····	258
附录二	历年上海市中学生参加中国数学奥林匹克(即冬令营) 名单·····	266
附录三	历届上海市中学生参加国际数学奥林匹克获奖名单 ·····	270

苏步青在第一届数学竞赛 给奖大会上的讲话

(代序)

各位先生、各位家长、各位同学：

今天在数学竞赛给奖会上看见了各位优秀同学胜利地通过竞赛而得到数学竞赛的奖励,这是我国数学史上的创举,真是空前未有的喜事,我代表中国数学会上海分会谨向各位同学致以热烈的祝贺。

刚才陈局长^①说过,这几天我们上海刚开完体育竞赛,现在又搞完数学竞赛,喜事重重。过去说起奥林匹克,好像只指体育竞赛似的,现在连数学竞赛也称为奥林匹克,这件事对我们完全是新的,我们来自旧社会的数学工作者今天又看到一件新人新事,我自己觉得年轻了二三十岁。前次在北京见过为执行中匈文化合作协定而来访问中国的一位匈牙利数学家哈约施院士,他告诉我们:数学竞赛在匈牙利举办得最早,匈牙利科学院老院士费叶尔教授就是第一届竞赛优胜者第一名。如果把年龄当做数学开展的衡量标准的话,那末,我们中国的数学要比匈牙利落后五十年。当然,我们不能这样定标准。中国古代数学的成就在人类的历史上要算是最先进的一个了。大家都知道,陈子定理就

^① 指当时上海市教育局局长陈琳珊同志。

是勾股定理在中国最早发现,比那著名的毕达哥拉斯至少要早七百年。又如杨辉三角也比巴斯喀尔早几百年就发现了。祖冲之的圆周率研究,所谓“霍纳方法”的数字系数代数方程的解法等等无一不是我们祖先辛勤钻研而得到的结果。陈旧古老的成就姑且不计,就现代数学来说,虽然在中国还没有很重要的著作,但某些方面如代数、数论、函数论、微分几何学和拓扑学等说是已经达到国际水平,我想也不会过于夸大吧!什么是国际水平呢?我不想在这里给它一个定义,只谈谈我个人的体会。我以为国际水平不像一条线那么的狭窄的而应该是像一条带似的,只要我们的学术水平落在这条“带子”里,应当可以说是已达到国际水平吧!我们在国际的著作里看到中国数学家的姓名被印刷着,他们的定理和创作被引用着,我们的数学研究牵涉到国际学者的研究,自然他们也牵涉到我们,这样就应该说是达到国际水平。至于我们的研究是否达到最前线,那就要看哪一些部门。过去有些部门确实已达到最前线,要使全面地逼近国际的最高水准,必须有待于大家的努力,因为这个最高峰是科学家自己创造起来而随时在变化着的原故。所以我说,我们不能用数学竞赛举办的早迟来衡量数学成就的高低。

但是,整个来说,中国数学还是远远地落在国际水平的后面。正如上面所说,我们虽则在某些部门达到了国际水平,而在某些部门尤其是在极重要的部门,如概率论和数理统计学、计算数学、微分方程等所谓数学的“主流方向”那是极其薄弱甚至空白的。这并不是说,我们老的一辈数学家

太不努力,年青的一辈太不争气。它的原因之一就是我们年青的时候没有人像今天数学竞赛会这样来鼓励我们去学数学;几十年来很难得的还留下来一点点的数学研究也是自发的,并不是像今天新中国所做的一样有组织有计划的。党和政府号召我们要大力开展科学研究,对于人材的来源已有很周密的计划和步骤,保证我们年年得到一定数量的培养对象——大学的数学系学生和研究生以及各研究机构的研究生,并且对于设备不断地给予我们以大力的支持,逐步地克服我们设备的不足。另一方面,我们学习苏联先进经验,加速地提高我们的学术水平,同时又得到苏联的大公无私的援助,例如为我们培养留学生,给我们装备研究上必要的图书设备等等。这就是为开展科学研究的最大的两个优点。各位同学!你们生长在这样伟大的时代里真是幸福啊!

祖国的社会主义建设迫切需要着数学,没有数学,要想开展现代国防和国民经济的建设,那是不可能的。比方拿快速电子计算机来做例子吧!它对于工厂自动化的控制,飞机、火箭的运航操纵,原子物理学方面的计算,外文的翻译,各种工程设计的计算,长期天气预报等都是必需的器具,而快速电子计算机的制造主要地决定于数学家和电子学家。它用到很抽象的、很高深的数学。如果说,机器的发明代替了人的体力劳动的话,那么我们可以说:快速电子计算机的发明替代了人的脑力劳动。但是,由于它是人造出来的,当然不能替代大脑。最近一位日本朋友寄来五、六页的福纳涅积分表,据他自己说,花了好几年工夫才计算出来

的。可是,在北京苏联潘诺夫教授带来了一本五六百页的福纳涅积分表,据说用快速电子计算机只花了二十小时。从这一个例子也可以看出:中国数学必须赶快开展起来,以适应社会主义建设的需要。党号召我们,在十二年内把主要的几门科学技术赶上国际水平,我们一定要响应党的号召,有组织地、有步骤地进行数学研究,要向科学进军。

数学竞赛会在这时候举办起来,它是及时的,是合于需要的。一方面,要使广大的高中同学通过这竞赛普遍地引起对数学的兴趣;另一方面,要从竞赛优胜者培养出优秀的数学家,这方才是又快、又省、又多、又好的办法。一般要培养五年才能成器的,在你们这批优秀的青年只需要三年,岂不是又快、又好吗!祖国的前途是光辉灿烂的,我们青年同志们——现在对数学感到无比兴趣而未来将成为祖国数学家的青年们的前途是无限幸福的。

再一次让我庆祝我们数学竞赛的良好开端,向各位优胜者祝贺无限光明的前途!

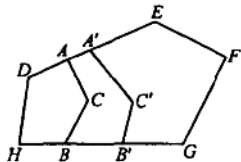
1956年6月10日

1956年试题**第一试试题**

1. (1) 设 n 为正整数, 证明 $13^{2n} - 1$ 是 168 的倍数.
 (2) 问具有哪种性质的自然数 n , 能使 $1 + 2 + \cdots + n$ 整除 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$?

2. 解不等式 $10^{2\lg x} + 4x - \log_2 32 > 0$.

3. 两块水田之间有一条曲折的水沟(如图), 今要把水沟的两岸变成直线, 而每块水田的面积不变.



- (1) 如果 A, A' 两点不变, 则水沟应如何配置?

- (2) 如果 A 点不变, 而要求水沟两岸平行, 则水沟又应如何配置?

各说明其方法.

4. 设有六位数 $1abcde$, 乘以 3 后, 变为 $abcde1$, 求这数.
 5. 作一个圆周, 要求只用圆规(不许用直尺), 把这圆周四等分.
 6. 空中有一气球, 在它的正西方 A 点, 测得它的仰角为 45° , 同时在它的正南偏东 45° 的 B 点, 测得它的仰角为 $67^\circ 30'$, A, B 两点间的距离为 266 公尺. 这两测点均离地 1 公尺, 问当测量时这气球离地多少公尺?

第二试试题

1. 从 1 到 100 的自然数中, 每次取两个数, 要它们的和大于 100, 有多少种取法?